Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

И.Р. Салахутдинов
А.А. Глущенко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ

(учебное пособие рекомендовано Федеральным учебно-методическим объединением по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 23.00.00 - Техника и технологии наземного транспорта)

Ульяновск – 2023

УДК 656.13
ББК 39.38
С 16

Салахутдинов И.Р. Моделирование транспортных процессов: учебное пособие для студентов инженерного факультета / И.Р. Салахутдинов, А.А. Глущенко. – Ульяновск: УлГАУ, 2023. – 104 с.

Рецензенты: Хусаинов Альберт Шамильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Проектирование и сервис автомобилей» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»

Шиляев Сергей Александрович, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Конструкторско-технологическая подготовка машиностроительных производств» ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет»

Учебное пособие содержит сведения, необходимые для формирования профессиональных компетенций при подготовке студентов, и допущено Федеральным УМО по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 23.00.00 – «Техника и технологии наземного транспорта» в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», уровень образования – «бакалавриат», специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», уровень образования – «специалитет»

16+

Печатается по решению методической комиссии инженерного факультета Ульяновского государственного аграрного университета имени П.А. Столыпина
Протокол № 6 от 17 января 2023 г.

ISBN 978-5-6048795-5-9

ВВЕДЕНИЕ

Транспортные системы занимают важнейшее место в обеспечении всех сфер деятельности экономики и общества страны. Поэтому их эффективное функционирование является необходимым условием развития и совершенствования экономики и качества жизни населения.

Повышение эффективности транспортных систем предполагает решение большой совокупности взаимосвязанных задач. Процесс оптимизации транспортных систем заключается в отыскании оптимальных пропорций между количественными значениями и тенденциями изменения материальных, технологических и организационных факторов, связанных с их функционированием. Для осуществления оптимизации необходимо иметь формализованное описание закономерностей функционирования транспортных систем, в котором количественные значения возможных изменений учитываемых факторов были бы связаны между собой и с экономическими показателями или показателями качества работы транспортных систем математическими соотношениями. Для этого используется ряд инструментов, одним из которых является моделирование. Грамотно организованное движение на дорогах с учетом различных видов транспорта, загруженности трафика, регулярных пробок в пиковые часы нагрузки, низкой пропускной способности – результат обоснованных решений и тщательного анализа существующей ситуации и потребностей.

Транспортные системы, их анализ и реализация позволяют решать широкий круг задач по организации дорожного движения с использованием информационных и информационно-управляющих процессов. Поэтому изучение функционирования транспортно-логистических систем, в том числе с использованием средств математического и компьютерного моделирования, остается актуальной задачей.

Учебное пособие предназначено для подготовки студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

I ГЛОССАРИЙ

Аналитические модели - математические модели, в которых поведение системы или течение процессов записаны в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегрально-дифференциальных, конечноразностных и т.п.) или логических условий.

Аналоговая модель – это модель, основанная на. аналогии или подобии между объектами, операциями или процессами, имеющими различную физическую природу.

Гидродинамические модели – модели, в которых транспортный поток подобен движению жидкости.

Детерминированное моделирование - отображение процессов, в которых предполагается отсутствие случайных воздействий.

Динамическое моделирование - исследование объекта во времени.

Дискретные модели – это модели, которые описывают поведение оригинала только в отдельные промежутки времени.

Имитационные модели - это модели, содержащие отдельные подпроцессы, которые не могут быть описаны функциональными соотношениями, используемыми для аналитических моделей. Для их описания используются экспертные и кибернетические методы, а также опытные данные, используются для анализа и расчета процессов и систем большой сложности. Имитационной моделью называется также специальный программный комплекс, который позволяет имитировать деятельность какого-либо сложного объекта.

Дисперсионный анализ - метод в математической статистике, направленный на поиск зависимостей в экспериментальных данных путём исследования значимости различий в средних значениях.

Кибернетический метод - используется для составления математических моделей вероятностных транспортных процессов, их отдельных составляющих и оптимизации указанных систем и процессов по этим моделям.

Макроскопические модели - это модели описывающие движение автомобилей в усредненных терминах (плотность, средняя скорость и другие).

Микроскопические модели - модели, в которых явно моделируется движение каждого автомобиля.

Модель - формализованное описание процесса или явления, структура которого определяется как его объективными свойствами, так и субъективным целевым характером исследования.

Моделирование - процесс построения, изучения и применения моделей.

Моделирование транспортных процессов – это замещение реальных транспортных процессов по перевозке грузов и пассажиров моделью с целью получения, в процессе ее исследования, информации о свойствах реальных транспортных процессов

Наглядное моделирование **–** моделирование на базе представлений человека о реальных объектах, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте (механические, графические и другие).

Оградительные устройства – средства защиты, препятствующие попаданию человека в опасную зону.

Сетевое планирование (сетевой анализ) - класс прикладных методов управления проектами, обеспечивающий планирование, анализ сроков выполнения (ранних и поздних) нереализованных частей проектов; позволяет увязать выполнение различных работ и процессов во времени, составить сетевой график, получив прогноз общей продолжительности реализации всего проекта.

Смешанная модель – это статистическая модель, содержащая как фиксированные эффекты, так и случайные эффекты.

Статическое моделирование - описание состояния объекта в фиксированный момент времени.

Стохастическое моделирование - моделирование, учитывающее вероятностные процессы и события.

Теория массового обслуживания - применяется для оптимизации процессов, носящих стохастический, случайный характер.

Целочисленное программирование - решение задач только в целых числах.

Эвристические методы - решение задач в условиях, когда нельзя точно определить границы их применения и оценить допустимые погрешности, называются.

II ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Планируемыми результатами обучения по дисциплине «Моделирование транспортных процессов» являются знания, умения, владения и/или опыт деятельности, характеризующие этапы/уровни формирования компетенций и обеспечивающие достижение планируемых результатов освоения образовательной программы в целом.

Цель дисциплины – приобретение обучающимися знаний об основах моделирования для решения производственных задач с комплексной оценкой воздействия различных факторов.

Задачи дисциплины:

- изучение общих вопросов применения методов прикладной математики при решении конкретных задач;
- определение оптимальной производственной программы;
- анализ влияния различных факторов на производственный процесс;
- определение оптимального плана при выполнении переместительных операций;
- анализ функционирования систем массового обслуживания.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- основные методы моделирования производственных процессов и комплексной оценки решаемой задачи;
- основные принципы управления операциями с учетом технических и технологических факторов;

уметь:

- подбирать приемлемую модель и критерий оптимальности для решения конкретной производственной задачи;

владеть:

- возможностью широкого использования полученных знаний в решении практических задач по анализу полученных результатов.

III ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

1 ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Моделирование транспортных процессов – это замещение реальных транспортных процессов по перевозке грузов и пассажиров моделью с целью получения, в процессе ее исследования, информации о свойствах реальных транспортных процессов.

1.1 Понятие о моделировании

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний. Термин «модель» широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. В отношении экономики можно дать ряд определений слову «модель»:

1) упрощенное представление действительности, абстрактное обобщение, воплощенное в определенной форме;

2) упрощенное представление экономической действительности, показывающее взаимосвязи между выбранными экономическими переменными;

3) формализованное описание процесса или явления, структура которого определяется как его объективными свойствами, так и субъективным целевым характером исследования.

Под моделирование понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Процесс математического моделирования включает в себя три структурных элемента: объект исследования, субъект (исследователь), модель, опосредующую отношения между познающим субъектом и познаваемым объектом. Ниже представлена общая схема процесса моделирования:

- постановка цели и формирование критерия. На этом этапе требуется сформулировать сущность проблемы, правильно поставленную цель, принимаемые предпосылки и допущения, также необходимо выделить основные черты и свойства моделируемого объекта и изучить его структуру;

- построения модели предполагает наличие определенных сведений об объекте-оригинале, поэтому на втором этапе происходит подготовка исходной информации, т.е. сбор и анализ данных исследуемого объекта. От правильного подбора данных для анализа зависит конечный результат моделирования. Анализ информации состоит из двух основных частей: первая часть предполагает подбор данных, а вторая – на базе имеющихся данных изучает объект или явление;

- на третьем этапе строится математическая модель. Этот этап формализации задачи, т.е. выбор математического аппарата, отражающего условный образ объекта. Познавательные возможности модели определяются тем, что модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта, поэтому любая модель замещает оригинал в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определенные стороны исследуемого объекта или характеризующих его с разной степенью детализации;

- математический анализ модели или конструирование модели. На этом этапе исследуются общие свойства модели и методы ее решений;

- численное вычисление включает как разработку методов решения построенной модели, так и серию экспериментальных расчетов с учетом возможных вариантов конкретной задачи;

- на последнем этапе происходит анализ численных результатов и их применение. Модель проверяется на адекватность, т.е. рассматривается вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их к практической деятельности.

Моделирование представляет собой циклический процесс, т.е. за первым циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а первоначально построенная модель постепенно совершенствуется.

Математическая модель некоторого объекта исследования – это его описание на математическом языке. При построении любой математической модели необходимо соблюдать и учитывать ряд принципов.

Принцип информационной достаточности. При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Существует некоторый критический уровень сведений о системе (уровень информационной достаточности), при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.

Принцип осуществимости. Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, и за конечное время.

Принцип множественности моделей. Данный принцип является ключевым. Речь идет о том, что создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно при использовании любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны реальности. Для более полного ее исследования необходим ряд моделей, позволяющих с разных сторон и с разной степенью детальности отражать рассматриваемый процесс.

Принцип агрегирования. В большинстве случаев сложную систему можно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. Принцип агрегирования позволяет, кроме того, достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования.

Принцип параметризации. В ряде случаев моделируемая система имеет в своем составе некоторые относительно изолированные подсистемы, характеризующиеся определенным параметром, в том числе векторным. Такие подсистемы можно заменять в модели соответствующими числовыми величинами, а не описывать процесс их функционирования. При необходимости зависимость значений этих величин от ситуации может задаваться в виде таблицы, графика или аналитического выражения (формулы). Принцип параметризации позволяет сократить объем и продолжительность моделирования. Однако надо иметь в виду, что параметризация снижает адекватность модели.

Степень реализации перечисленных принципов и каждой конкретной модели может быть различной, причем это зависит не только от желания разработчика, но и от соблюдения им технологии моделирования. А любая технология предполагает наличие определенной последовательности действий

Общая цель моделирования может быть сформулирована следующим образом: это определение (расчет) значений выбранного показателя эффективности для различных стратегий проведения операции (или вариантов реализации проектируемой системы). При разработке конкретной модели цель моделирования должна уточняться с учетом используемого критерия эффективности.

Любой транспортный процесс можно представить в виде взаимосвязанной системы элементов. Таким образом, при построении моделей объектов используется системный подход, представляющий собой методологию решения сложных задач, в основе которой лежит рассмотрение объекта как системы, функционирующей в некоторой среде. Системный подход предполагает раскрытие целостности объекта, выявление и изучение его внутренней структуры, а также связей с внешней средой. При этом объект представляется как часть реального мира, которая выделяется и исследуется в связи с решаемой задачей построения модели. Кроме этого, системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель проектирования, а объект рассматривается во взаимосвязи с окружающей средой. Сложный объект может быть разделен на подсистемы, представляющие собой части объекта, удовлетворяющие следующим требованиям:

·- подсистема является функционально независимой частью объекта. Она связана с другими подсистемами, обменивается с ними информацией и энергией;

·- для каждой подсистемы могут быть определены функции или свойства, не совпадающие со свойствами всей системы;

·- каждая из подсистем может быть подвергнута дальнейшему делению до уровня элементов.

Таким образом, систему можно определить как представление объекта в виде набора подсистем, элементов и связей с целью его создания, исследования или усовершенствования. Для системного подхода важным является определение структуры системы, т.е. совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие.

Однако использование метода моделирования имеет ряд проблем:

·- все объекты являются сложными, поэтому изучение их трудоемко;

·- при исследовании важное значение имеет информация. Она должна быть точной и достоверной, а затраты на ее сбор и время не должны превышать эффекта от использования модели;

·- в большинстве случаев факторы носят случайный характер, и учесть их влияние на объект исследования не всегда возможно.

Таким образом, любая транспортная система представляет собой сложную систему, в которой взаимодействуют десятки и сотни экономических, технических и социальных процессов, постоянно изменяющихся под воздействием внешних условий, в том числе и научно- технического прогресса. В таких условиях управление транспортными системами превращается в сложнейшую задачу, требующую специальных средств и методов, которыми обладает наука математическое моделирование.

1.2 Виды моделей и их общая характеристика

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе все виды моделирования могут быть разделены на: детерминированные и стохастические; статические и динамические; дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.

Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, т.е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий. Стохастическое моделирование отражает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса, и оцениваются средние характеристики. Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а динамическое моделирование отражает поведение объекта во времени. Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, а непрерывное отражает непрерывные процессы в системах.

В зависимости от формы представления объекта (системы) можно выделить мысленное и наглядное моделирование.

При наглядном моделировании на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте (механические, графические и другие). При исследовании транспортных процессов и систем на автомобильном транспорте наиболее широко используется математическое моделирование, являющееся разделом мысленного моделирования.

Под *математическим моделированием* понимают установление соответствия данному реальному транспортному процессу или системе некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики рассматриваемого реального транспортного процесса и транспортной системы.

Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальную систему и процесс лишь с некоторой степенью приближения к действительности. При решении практических задач автомобильно-дорожного комплекса, как правило, не применяются строгие методы решений. Широко используются смекалка и интуиция инженерно-технического и управленческого персонала. В модели реальных транспортных процессов и систем вносятся упрощающие допущения. Такой метод позволяет подобрать для решаемой задачи из набора средств современной математики приемлемый алгоритм и найти хотя бы приближенное решение. Такие методы решений задач в условиях, когда нельзя точно определить границы их применения и оценить допустимые погрешности, называются *эвристическими.* Раздел математики, объединяющий эти методы, носит название математическое программирование. Здесь термин «программирование» является синонимом термина «планирование», так как подразумевается составление планов оптимального решения задач.

Преимущества математического моделирования перед другими видами (графическим, аналоговым, механическим и т.д.) заключаются в широком использовании математических моделей, низкой стоимости их создания, быстром получении результатов исследований, возможности проведения расчетных экспериментов и проверки правильности построения модели. Конечно, математическая модель всегда является упрощенной, однако она достаточно наглядна и позволяет адекватно описать транспортную систему и транспортный процесс.

Математическое моделирование при решении задач автомобильно-дорожного комплекса можно разделить на оптимизационное (аналитическое) и имитационное. Соответственно математические модели можно разделить на аналитические и имитационные.

Рис. 1 - Моделирование загрузки транспортной сети

Аналитические модели составляются на первом этапе процесса оптимизационного (аналитического) моделирования. К аналитическим моделям относятся математические модели, в которых поведение системы или течение процессов записаны в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегрально-дифференциальных, конечноразностных и т.п.) или логических условий.

Аналитические модели применяются обычно в системах малой и средней сложности, а также для анализа отдельных вспомогательных процессов в более сложных системах.

Аналитическая модель в общем виде описывается уравнением, связывающим зависимую переменную величину y, называемую также параметром оптимизации, результативным признаком или функцией отклика, с одной или несколькими другими независимыми меняющимися величинами $X, x_2 \dots x_n$, называемыми также факториальными величинами, факторами или аргументами:

$$y = f\{x_1, x_2 \dots x_n).$$

При решении задачи оптимизации требуется найти значения факториальных величин $x/, x_2 \dots x_n$, которые позволяют достигнуть экстремального (минимального или максимального) значения параметра оптимизации (целевой функции *F):*

$$F — y — f(x_1,x_2...Xn)\min(\max).$$

Решение задачи оптимизации выполняется в условиях неопределенности эвристическим методом, так как число зависимостей всегда меньше числа неизвестных.

Имитационные модели - это модели более высокого уровня по сравнению с аналитическими. Имитационные модели содержат отдельные подпроцессы, которые не могут быть описаны функциональными соотношениями, используемыми для аналитических моделей. Для их описания используются экспертные и кибернетические методы, а также опытные данные. Эти модели используются для анализа и расчета процессов и систем большой сложности.

Имитационной моделью называется также специальный программный комплекс, который позволяет имитировать деятельность какого-либо сложного объекта. Он запускает в компьютере параллельные взаимодействующие вычислительные процессы, являющиеся по своим временным параметрам (с точностью до масштабов времени и пространства) аналогами исследуемых процессов. В странах, занимающих лидирующее положение в создании новых компьютерных систем и технологий, научное направление Computer Science использует именно такую трактовку имитационного моделирования. Во многих случаях имитационный эксперимент является единственным способом описания реальных сложных систем, поскольку процессы, протекающие в таких системах, являясь многокритериальными, связаны, кроме того, с длительными временными интервалами.

Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы систем, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и другие, которые часто создают трудности при исследованиях на аналитических моделях.

Методология имитационного моделирования основана на воспроизведении реальных или гипотетических бизнес-процессов в специальной компьютерной среде, образующей виртуальный мир предприятия, организации, производства и любого другого объекта управления. Эта технология появилась в 60-х годах XX в., и на протяжении многих лет она не только остается одной из основных в исследовании операций, но и бурно развивается в области реинжиринга, бизнес-процессов и новых направлений искусственного интеллекта.

После составления математической модели разрабатываются методы ее решения. Эти методы должны позволить найти оптимальное решение задачи и составить программу (план), обеспечивающую оптимальное использование ресурсов. Обязательным условием при этом является наличие нескольких альтернативных решений задачи, из которых выбирается наилучший вариант.

На автомобильном транспорте математические методы используются достаточно широко: для составления оптимальных схем грузопотоков с целью минимизации расстояний перевозки грузов; распределения клиентуры между автотранспортными предприятиями; распределения автобусных маршрутов между автобусными предприятиями; для снижения нулевых пробегов транспортных средств; маршрутизации перевозок с целью минимизации непроизводительных порожних пробегов автомобилей при перевозке грузов; минимизации времени доставки грузов клиентам; определения кратчайших путей между пунктами и других.

При решении задач качественной организации и адаптации автомобильных перевозок широко применяются методы математического программирования.

Корреляционно-регрессионный анализ является важнейшим элементом моделирования. Корреляционный анализ позволяет исследовать взаимосвязи показателей и, что очень важно, оценить силу этой связи. При этом исходят из того, что изучаемое явление имеет случайный, вероятностный характер и подчинено статистическим законам. С помощью корреляционного анализа можно построить математическую модель закономерности изменения основного показателя в связи с изменением факторов, на него влияющих. Эту закономерность называют *регрессией,* а анализ ее свойств *регрессионным анализом.* Метод корреляционно-регрессионного анализа позволяет решать задачи, как в линейной, так и в нелинейной трактовке.

Линейное программирование является наиболее разработанным видом. Задачи линейного программирования описывают линейные, пропорциональные зависимости между рассматриваемыми величинами. В соответствующие выражения входят переменные первой степени. Математическая модель задачи линейного программирования включает: линейную целевую функцию, линейные ограничения на используемые ресурсы, переменные величины. Целевая функция строится на основе выбранного критерия оптимальности.

Процесс решения задач линейного программирования многошаговый: по определенным правилам выбирается начальный вариант решения, который затем с каждым последующим шагом улучшается. Конечный итог - это получение наилучшего с точки зрения критерия оптимальности решения, обеспечивающего максимум или минимум целевой функции.

Динамическое программирование используется при решении задач, параметры которых меняются во времени, т.е. имеют динамический характер. Процесс решения таких задач распадается на несколько этапов. На каждом этапе определяется оптимальное решение для части неизвестных, которое служит исходным условием для определения оптимального решения следующего этапа. Оптимальный план последнего этапа является оптимальным решением всей задачи.

Целочисленное программирование предполагает решение задач только в целых числах.

Теория массового обслуживания применяется для оптимизации процессов, носящих стохастический, случайный характер. К таким задачам относятся автомобильные перевозки, работа пунктов погрузки и другие, которые можно рассматривать как систему массового обслуживания. Теория массового обслуживания является одним из разделов теории вероятностей, выделившимся в последние годы в самостоятельный раздел математики.

Сетевое планирование и управление - эффективный метод календарного планирования и управления. Сетевой график используется в качестве информационной динамической модели, отражающей процесс выполнения какого-либо комплекса работ и конечную цель.

Дисперсионный анализ позволяет выполнять качественный анализ транспортных процессов и определять, являются ли средние арифметические значения параметра оптимизации, получаемые при различных уровнях факторов, одинаковыми или их следует считать различными. Сутью дисперсионного анализа является разложение суммарной дисперсии на составляющие - общую, факторную и остаточную с дальнейшим решением задач математической статистики. Основы дисперсионного анализа и полная его классификация разработана Р. Фишером (Англия) в 1920-1930-х годах.

С помощью дисперсионного анализа можно решать задачи о влиянии состояния дороги на скорость движения автомобилей; квалификации водителей на безопасность движения, на время простоев под погрузкой-выгрузкой; влиянии качества горюче-смазочных материалов на надежность автомобилей в эксплуатации и др.

Корреляционно-спектральный анализ в автотранспортном производстве существенно расширяет использование спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, систем глобальной связи и мониторинга подвижного состава, а также электронной картографии. Метод позволяет аналитически проектировать и адаптировать современные, качественно управляемые, вероятностные системы доставки грузов и пассажиров на базе составляющих их отдельных подпроцессов (груженых и холостых пробегов, процессов погрузки и выгрузки, простоев на пограничных пунктах и станциях технического обслуживания и т.д.). В процессе проектирования и адаптации корреляционным анализом выявляются неуправляемые «вредные» факторы в указанных процессах, вызывающие лишние затраты времени и неритмичность перевозок. По результатам анализа проектируются «идеальные» процессы доставки грузов и пассажиров. При этом используются прямое и обратное финитные (в конечном интервале времени) преобразования Фурье.

Регрессионный анализ и *теория планирования эксперимента* используются для составления математических моделей вероятностных транспортных процессов, их отдельных составляющих и оптимизации указанных систем и процессов по этим моделям.

Широкие возможности использования этого метода также дают новые технические достижения, внедряемые в автотранспортное производство (прежде всего, это спутниковая навигация, глобальные связь и мониторинг автотранспорта, электронная картография).

Кибернетический метод используется для составления математических моделей вероятностных транспортных процессов, их отдельных составляющих и оптимизации указанных систем и процессов по этим моделям.

При этом процессы перевозок в целом и отдельные их составляющие рассматриваются как кибернетические системы («черные ящики»). Экспертным путем с использованием методов теории планирования эксперимента составляются матрицы факторов влияния и определяются необходимые ограничения. Для вычисления математических моделей используются методы регрессионного анализа.

Символическая (математическая) логика использует символические способы представлений, выводов и эвристических поисков решений автотранспортных задач, базирующиеся на методах символической логики, с помощью исчислений (формализованных языков), в отличие от традиционных числовых способов представления данных и решений с использованием, составленных человеком и им же запрограммированных алгоритмов. Используется в интеллектуальных экспертных системах.

Макроскопические модели Учёные пытались описать и формализовать процессы, лежащие в основе феноменов транспортного потока, более полувека. В 1950х сэр Джеймс Лайтхилл, эксперт в гидродинамике, заметил, что поток автомобилей на дороге имеет много общего с потоком жидкости в трубе. Первая известная компьютерная транспортная модель (Lighthill-Whitham-Richardsmodel) полностью описывает абстракцию дорожного потока с помощью дифференциальных уравнений. Это была первая макроскопическая транспортная модель. На тот момент использование готового математического аппарата, который уже применялся для вычислений на ЭВМ, для решения проблемы из совершенно иной области было интересным решением.

Макромодели не рассматривают индивидуальные транспортные средства, которые в данных условиях являются не более чем молекулами жидкости; такие модели способны лишь имитировать общие свойства автомобильного потока.

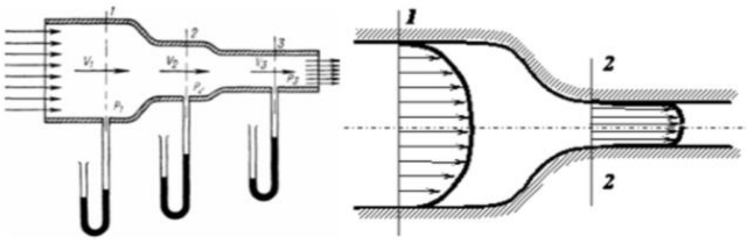


Рис. 2 -Иллюстрации принципов гидродинамики

Несмотря на этот факт, модели данного класса способны имитировать несколько характерных для автомобильного потока процессов, начиная с изменения скорости в сужениях и расширениях дороги, заканчивая «старт -стоп движением» в пробках (которое может быть хорошо описано как ударные волны). Благодаря макроскопическим транспортным моделям было получено множество сведений о реальном автомобильном движении, что говорит о их исторической важности для данной темы. Простота, ограничения и допущения, лежащие в основе моделей данного класса, объясняют их врождённые недостатки. Макромоделям не хватает детализации, и они не могут генерировать надёжных результатов для дорожных сетей с очень ограниченной ёмкостью, к коим относятся дороги больших городов. Вождение автомобиля не ограничивается ускорением и торможением – небольшим количеством таких параметров, как «скорость потока» и «плотность потока» невозможно описать разнообразие возникающих на дорогах ситуаций.

Модель оптимальных стратегий Процесс формирования загрузки сети общественного транспорта имеет особенности, не характерные для загрузки сети автомобильного транспорта. Если пользователь сети УДС в ситуации равновесия использует оптимальный путь для своего движения до цели, то пользователь сети пассажирского транспорта может определить для себя оптимальную стратегию поведения в ходе движения к цели. Под стратегией поведения пассажира в сети общественного транспорта понимается набор правил, руководствуясь которыми в процессе своего движения, пользователь достигает точки назначения. Простейшим примером стратегии является следование априорно выбранному пути, что соответствует поведению участников движения в моделях равновесного распределения. Более сложные стратегии возникают, если пассажир в ходе движения принимает те или иные решения о продолжении своего пути в зависимости от информации, полученной в ходе движения. Например, решение, принимаемое в очередном пересадочном узле, может зависеть от того, какое транспортное средство будет отправляться из узла первым. Еще более сложные стратегии предусматривают, например, такую возможность: пассажир может принять решение сменить транспортное средство, увидев из окна автобуса, что есть возможность пересесть на автобус-экспресс, и др.

Стандартная модель оптимальных стратегий исходит из упрощенного описания поведения пользователя. Согласно этой модели выбор стратегии достижения цели состоит в следующем:

- для каждого узла, в котором может оказаться пассажир в процессе движения к цели, среди всех возможных продолжений фиксируется некоторый выбранный набор. Будем говорить, что выбранные продолжения «включены в стратегию». Важно, что набор фиксируется «заранее», т.е. не в процессе движения, а на этапе выбора стратегии;
- оказавшись в том или ином узле, пользователь всегда выбирает то из продолжений, включенных в стратегию, которое первым предоставит возможность обслуживания (отправление транспортного средства). Поскольку события прихода и отправления транспортных средств можно рассматривать как случайные события с некоторым законом распределения, то конкретные пути реализуются с той или иной вероятностью. Таким образом, модель оптимальных стратегий является изначально стохастической моделью.

Для математического описания модели необходимо расширить транспортный граф до маршрутного графа. Маршруты общественного транспорта описываются дополнительными узлами и дугами. Будем называть узлы и дуги обычного графа базовыми узлами и дугами в маршрутном графе. Рассмотрим базовую дугу, по которой проходят k маршрутов общественного транспорта. Над каждой такой дугой размещается k маршрутных дуг, соответствующих поездке вдоль этой дуги на одном из маршрутов. Сама базовая дуга также входит в граф как дуга для пешеходного движения. Для упрощения описания принимается, что остановки общественного транспорта всегда располагаются в узлах базового графа. Все маршрутные узлы, в которых делается остановка, соединяются с соответствующим базовым узлом условными дугам посадками и высадками.

Данное выше определение стратегии может быть сформулировано в терминах маршрутного графа так: в каждом узле маршрутного графа среди всех исходящих дуг фиксируется некоторый набор дуг, включенных в стратегию. Попав в узел, пользователь может продолжить движение по одной из фиксированных дуг. Таким образом, задание стратегии эквивалентно заданию некоторого подграфа всего маршрутного графа. Будем называть этот подграф графом стратегии.

Стратегия называется допустимой, если:

- она не содержит циклов, т.е., двигаясь по дугам, включенным в стратегию, нельзя вернуться повторно в уже пройденный узел;

- она обеспечивает достижение цели, т.е., выбирая в каждом узле произвольную дугу, из числа включенных в стратегию, пользователь всегда за конечное число шагов попадет в целевой узел.

Для каждой дуги маршрутного графа заданы две характеристики:

c_a — обобщенная цена дуги, включающая, как всегда, среднее время движения по дуге и другие добавки, выраженные в условных минутах. Будем в дальнейшем говорить просто о времени.

f_a — частота обслуживания. Эта характеристика имеет смысл только для дуг посадок. Она численно равна среднему количеству отправлений транспортных средств из данного узла по тому маршруту, на который осуществляется посадка.

Величина $1=f_a$ — это средний интервал отправления. Для единообразия описания транспортного графа можно считать, что все дуги обладают этими двумя характеристиками. При этом частота обслуживания для всех дуг, не являющихся дугами-посадками, равна бесконечности. Соответственно, среднее время ожидания обслуживания на этих дугах равно нулю.

Предполагая, что время прибытия пассажира в узел распределено равномерно, а интервал отправления постоянный и равен $1/f_a$, получим, что среднее время движения по дуге, включая ожидание, равно $1/2f_a + c_a$. Зная обобщенную цену и частоту всех дуг, можно вычислить среднее время достижения цели от любого узла при использовании данной стратегии. Это можно сделать рекуррентно. Пусть k — номер целевого узла, t_i — среднее время достижения узла k из узла i при использовании данной стратегии. Очевидно, $tk = 0$. Рассмотрим произвольный узел i. Возможные продолжения согласно выбранной стратегии — это дуги $a = (i;j) \epsilon A+i$. Пусть tj уже вычислено для всех конечных узлов этих дуг. Тогда среднее время ti:

$$t_i = \frac{1/2 + \sum f_a \left(c_a + t_j\right)}{\sum f_a}.$$

Пользуясь этой рекуррентной формулой, можно вычислить среднее время для любого узла.

Оптимальной стратегией для достижения цели k из узла i называется стратегия, при которой среднее время достижения цели из данного узла наименьшее среди всех допустимых стратегий. Среднее время в оптимальной стратегии можно также называть потенциалом узла i по отношению к узлу k.

Оптимальная стратегия обладает следующим важным свойством: оптимальная стратегия для любого узла отправления i одновременно является оптимальной стратегией и для всех промежуточных узлов j, которые могут встретиться при движении в соответствии с этой стратегией. Данное свойство вполне аналогично свойству Беллмана для кратчайших путей, согласно которому отрезок кратчайшего пути от некоторого промежуточного узла до конечного узла сам является кратчайшим путем от промежуточного узла. Действительно, если при добавлении или исключении из стратегии какой-либо исходящей дуги узла j потенциал этого узла уменьшается, то, очевидно, должны уменьшиться и потенциалы всех узлов, из которых можно попасть в узел j. Данное свойство позволяет определить одну стратегию для достижения цели k, являющуюся оптимальной сразу для всех узлов отправления. Действительно, пометим в каждом узле сети исходящие дуги, входящие в оптимальную стратегию для этого узла. Совокупность этих помеченных дуг, очевидно, определит оптимальную стратегию для всех узлов.

Для вычисления оптимальной стратегии (т.е. выделения подграфа в маршрутном графе) для произвольного целевого узла применяется алгоритм, аналогичный алгоритму послойного расширения при поиске кратчайших путей.

Метод клеточных автоматов. Очень удобным аппаратом для реализации микроскопических моделей оказались клеточные автоматы. Эта теория зародилась в середине XX века в трудах нескольких независимых учёных (Конрад Цузе, Джон фон Нейман). Наиболее полно она проработана известным математиком Джоном фон Нейманом, сотрудничавшим в то время со Станиславом Уламом.

Клеточные автоматы в простейшем виде представляют собой двумерную сетку произвольного размера, состоящую из ячеек. Состояние сетки (конфигурация) обновляется с течением времени, причём состояние каждой ячейки в следующий момент времени зависит от состояния ближайших её соседей (смежных ячеек) и, возможно, от её собственного состояния на текущей итерации. Количество возможных состояний ячейки конечно. В моделях клеточных автоматов дорога разбивается на клетки, время считается дискретным. Каждая ячейка может находиться в каком-либо состоянии, которое определяется набором правил, зависящих от состояний соседних ячеек. Случайные возмущения вносят элемент стохастичности. Достоинством такого подхода является высокая эффективность при компьютерном моделировании. Недостатком же является относительно низкая точность в микроскопических масштабах, из-за дискретной природы клеточного автомата.

Дороги в реальном мире могут состоять из множества полос движения в одном направлении. На данный момент наиболее популярным методом микроскопического моделирования транспорта является использование метода клеточных автоматов, который позволяет сымитировать многополосные магистрали. Главная идея состоит в том, чтобы представлять дороги в виде численных матриц – каждая строка соответствует полосе, каждая ячейка соответствует участку дороги установленной длины, чаще всего около семи метров. Некоторые числа в матрице означают автомобили, передвигающиеся с соответствующей скоростью, с помощью других могут быть закодированы пустые участки дорог, аварии и другие препятствия.

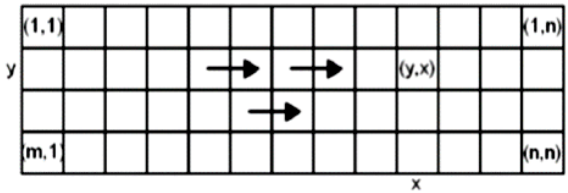


Рис. 3 - Участок дороги в представлении метода конечных автоматов

Протяжка модели производится шаг за шагом путём применения некоторого набора правил к каждой ячейке, как «переместиться на *n* ячеек вперёд», если впереди нет препятствий и медлительных транспортных средств, или «сменить полосу и переместиться на *n*-1 ячеек вперёд» и т.д. Полностью формализованные модели могут даже иметь набор предварительно рассчитанных действий для набора возможных ситуационных паттернов; в этом случае системе нужно лишь подобрать подходящее правило для участка матрицы вокруг «автомобиля» и перезаписать его «ответом» из библиотеки действий для получения позиции машины на следующем шаге. Нагель и Шрекенберг описали первую реализацию транспортной модели на клеточных автоматах в 1992 году; она была очень проста и симулировала только одну полосу. С тех пор методы, базирующиеся на клеточных автоматах, были признаны наиболее адекватными и эффективными для моделирования транспортных потоков, большинство разрабатываемых на данный момент моделей основаны на этом подходе. Они уже сейчас используются для анализа эффективности перекрёстков и затруднённого дорожного движения, но существует проблема – в подобных модели не предусмотрена возможность назначения отдельным автомобилям индивидуальных целей, а это очень важно для изучения дорожного потока в масштабах города.

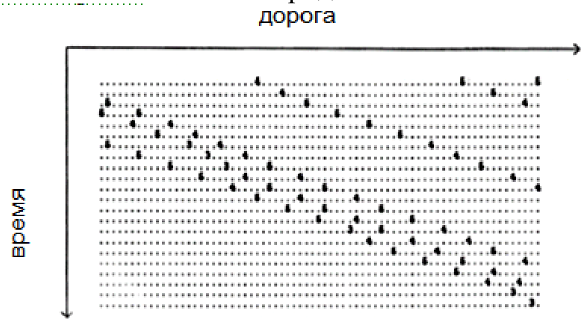


Рис. 4 - Пространственно-временная диаграмма модели на клеточных автоматах Нагеля – Шрекенберга

Многоагентные модели. В агентноориентированных транспортных моделях главным объектом является водитель. Каждый водитель вместе с автомобилем может обладать широким набором индивидуальных параметров: характеристики автомобиля, оказываемое воздействие на окружающую среду, информация о привычках водителя и т.д. Весь набор параметров каждого водителя используется на каждом шаге модели. Недостатком данного метода является наибольшая сложность модели среди всех рассмотренных, а также высокие требования к вычислительным системам – но на сегодняшний день это является приемлемой ценой.

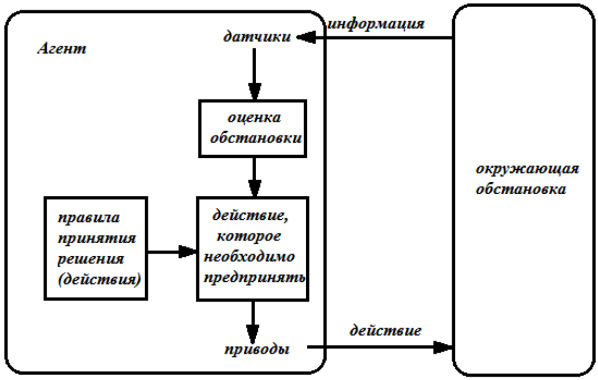


Рис. 5 - Концепция агента

Одной из наиболее интересных особенностей многоагентных систем является взаимодействие между агентами. Каждый агент, с точки зрения остальных агентов, является «чёрным ящиком» с неизвестными параметрами и непредсказуемыми намерениями. Агенты вынуждены действовать в соответствии с текущим окружением (информация о котором может быть неполной: водитель может не видеть сквозь здания и не знать точного коэффициента сопротивления асфальта), принимая во внимание сигналы от других агентов и доступные невооружённому взгляду параметры (каждый водитель должен каким -то образом оценивать скорость окружающих транспортных средств). Каждый агент «думает» за себя как настоящий водитель, его действия не определяются кем-то извне – внутренняя и внешняя по отношению к агенту информация обрабатывается с помощью экспертной системы, которая выдаёт вывод о действии, которое будет выполнено водителем на следующем шаге.

Экспертная система содержит базу знаний, формируемую разработчиком модели во время анализа реального опыта вождения людей; эта информация может быть получена с помощью опросов, бесед с водителями или даже с помощью сбора телеметрии с транспортных средств. Идея состоит в том, чтобы использовать матрицы для дискретизации дорог – подобная мера должна уменьшить общее количество вычислений по сравнению с континуальными моделями, но не обязывает хранить информацию об автомобилях внутри ячеек. Элементы дорожных матриц будут хранить только идентификационные номера автомобилей и различных дорожных объектов, что позволит эмулировать огромное количество транспортных средств; обрабатывать их параметры и определять их действия на каждом шаге будет единая экспертная система. Подобный подход хорошо ложится на объектно-ориентированную парадигму программирования и даёт возможность вносить почти любые изменения в модель автомобиля. Станет возможным имитировать не только обычные автомобили, но и наземные транспортные средства всех возможных видов, включая автобусы, троллейбусы, трамваи, поезда, грузовики, автопоезда и даже велосипеды.

Планируется выделить два раздельных слоев «мышления» агентов: стратегический и тактический. Первый будет обрабатывать основные цели агента, например, отвечать за выбор пути к пункту назначения. Тактический слой будет ответственен за принятие ситуационных решений, которые будут направлены на избежание опасных ситуаций – следует ли перестраиваться, какой скоростной режим уместен в данный момент и т.д. Экспертная система водителя не будет обладать исчерпывающей базой знаний – данная работа не предполагает идеальное соответствие модели с реальным миром, которое является практически недостижимым ввиду обилия влияющих на транспортный поток случайных факторов; её должно быть достаточно для имитации наиболее значимых аспектов процесса вождения. Поведенческие паттерны человека тоже невозможно полностью формализовать, поэтому использование эвристик является неотъемлемой частью разрабатываемой модели. Но, так или иначе, нет причин полагать, что вышеперечисленные аппроксимации не позволят создать достаточно адекватную реальности модель транспортного движения.

Использование *метода перколяции* для моделирования транспортных потоков. В современных разработках МАДИ используются модели случайного графа и теория перколяции, которая применяется, в основном для моделирования протекания жидкостей на абстрактных решетках. В работах. Московского технологического университета (МИРЭА), г. Москва, Россия. Теорию перколяции применили к случайному графу дорожной сети. Идея метода перколяции заключается в следующем: если убрать все улицы и оставить одни перекрестки, то получим некоторую решетку, через которую "просачиваюся" машины. Теория перколяции обычно применяется к анализу просачивания жидкости. В МАДИ ее применили для анализа транспортной ситуации на загруженных перекрестках.

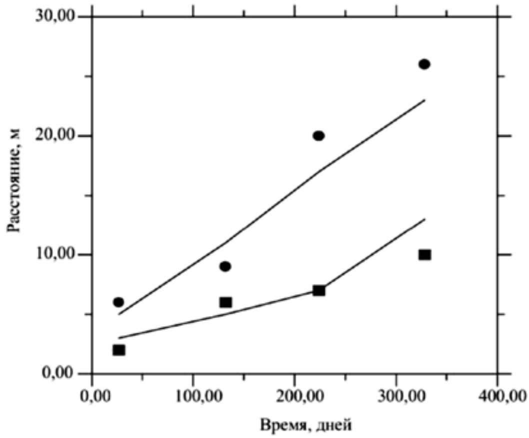


Рис. 6 - Метод перколяции

В результате работы микроскопических методов, как правило, получают следующие данные: длина очереди, время задержки транспортных средств, средняя скорость, максимальная или минимальная скорость, время движения автомобилей.

Основным достоинством микроскопических моделей является возможность получения оценок с высокой точностью. Однако высокая степень детализации в микромоделях влечет за собой следующие недостатки: требуется много ресурсов для сбора исходных данных; для получения достоверных результатов нужно большое число прогонов модели; необходима калибровка параметров; высокая чувствительность к ошибкам в исходных данных; сложности в получении аналитических зависимостей.

Метод электродинамического моделирования транспортных потоков. По своей сути транспорт является проводником материального потока, единственной причиной его движения на межорганизационном уровне. Отечественные предприятия транспорта, особенно те, которые связаны с международными перевозками, одними из первых почувствовали необходимость внедрения информационных технологий в управление производственными процессами. Очевидным стало то, что эффективная деятельность транспортных компаний уже невозможна без широкого использования информационных технологий.

Дифференцированный контроль на трассе с помощью бортовой ЭВМ и электронный обмен данными позволяет существенно увеличить оборот информации, отказаться от путевых документов и тем самым экономить значительные финансовые средства. На транспортных средствах устанавливаются электронные тахографы и бортовые вычислительные системы с магнитными носителями информации, позволяющие автоматизировать учет работы транспортного средства и водителей, оперативно контролировать соблюдение режимов труда и отдыха. Кроме того, важное значение имеют программы маршрутизации и калькуляции себестоимости, оптимальной загрузки транспортных средств, снабжения запасными частями. С их помощью можно выполнять расчеты протяженности маршрутов, времени их прохождения, остановок на пограничных переходах и заправках, оперативно оценивать дорожные условия и расход топлива на маршруте.

Среди отечественных программ следует отметить геоинформационные системы (к примеру, ГНС Омск, Новосибирск и т.д.), которые широко используются в практике составления маршрутов. Среди отраслевых решений можно привести автоматизированную информационную систему "RG-Soft: Оконная Компания", созданную на платформе 1С: Предприятие 8", которая разработана специально для производственных компаний, занимающихся производством, реализацией и установкой пластиковых окон.

Конфигурация "RG-Soft: Оконная компания" предназначена для автоматизации учета и анализа бизнес-процессов производителей и дилеров окон, и дверей. Система охватывает широкий спектр управленческих задач от приема и обработки заказов до анализа финансовых результатов деятельности предприятия Конфигурация содержит три интерфейса: заявки и управление замерами; доставки; журнал договоров.

Другой пример отечественной разработки в области системы контроля транспорта - система "Каньон". Это аппаратно-программный комплекс, предназначенный для повышения эффективности эксплуатации авто- и стройтехники в части контроля за выполнением транспортного задания и экономии ТСМ.

Система "Каньон" состоит из бортового микропроцессорного устройства (прибор "Каньон"), регистрирующего в энергонезависимой памяти параметры со встроенного GPS-приемника (координаты маршрута движения) и параметры штатного электрооборудования и ряда дополнительных датчиков, установленных на автотранспортном средстве. Оперативные данные переносятся в информационную систему по возвращении из поездки. Система предназначена для решения комплекса проблем, связанных с управлением автотранспортным предприятием. Благодаря регистрации первичной информации, позволяющей контролировать маршрут и скорость движения, место и продолжительность стоянок.

Современные программно-аппаратные средства находят широкое применение во всем мире и внедряются в практику в Российской Федерации. Одним из последних решений в этой области является создание отечественной системы навигации ГЛОНАСС, которая в настоящее время развивается и проходит настройку.

Однополосная модель или правило движущегося потока. Простейшая модель транспортного потока, в которой автомобили движутся в одном направлении, останавливаясь и продолжая движение в зависимости от наличия автомобилей впереди. Из-за существования такой сферы применения модели она получила дополнительное название — “правило транспортного потока”. Состояние автомата описывается с помощью одномерного массива ячеек, каждая из которых содержит одно из значений — 0 или 1. На каждом шаге к автомату применяется набор правил, приведённый в таблице. Нам необходимо вычислить состояние центральной ячейки в первой строке. Левая и правая ячейки будут определять новое состояние центральной ячейки.

Шаблон

111	110	101	100	011	010	001	000

Центральная клетка

10	1	1	1	0	0	0

Правило перехода между клетками описано в таблице

Шаг	Конфигурация						
00	1	0	1	0	1	1	1
10	1	1	1	1	0	0	0
20	1	1	0	1	1	1	0
30	0	0	1	0	0	0	0
40	0	1	1	1	1	1	0
50	0	0	0	0	0	1	0

Математически правила перехода автомобиля из клетки в клетку можно записать для различных состояний следующим образом:

Ускорение

Если скорость рассматриваемого автомобиля меньше максимально разрешенной скорости, то она может увеличиться на единицу, т.е. это ускорение:

$$v_i(t) = min(v_i(t-1)+1, v_{max}).$$

Торможение

Если новая скорость рассматриваемого автомобиля равна или больше расстояния до ближайшего автомобиля, то эта скорость приравнивается к расстоянию до впереди идущего автомобиля:

$$v_i(t) = min(v_i(t), \quad q_г(t-1).$$

Случайные возмущения

С некоторой вероятностью водитель может изменить скорость - это случайные возмущения, которые учитываются по формуле:

$$if \quad \xi(t)<p \; then \quad v_i(t) = max(v_i(t)-1, \; 0).$$

Новое положение автомобиля в клетке.

Новое положение автомобиля в сетке автомата определяется по формуле:

$$n_i(t) = n_i(t-1)+v_i(t).$$

Первое выражение определяет стремление водителей ехать с максимальной скоростью, второе выражение гарантирует, что не будет столкновений с впереди идущими автомобилями. Третье условие учитывает возможные случайные изменения скорости водителями. Четвертое выражение определяет, на сколько клеток в нашем клеточном автомате передвинется автомобиль за одну итерацию.

Контрольные вопросы:

1. Что такое моделирование?

2. Какие структурные элементы входят в процесс математического моделирования?

3. Расскажите схему математического моделирования.

4. Какие принципы необходимо соблюдать и учитывать при построении любой математической модели?

5. Виды моделей и их общая характеристика.

2 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Наиболее широко распространенной в практической деятельности и простейшей транспортной задачей является определение минимальных затрат при перевозке груза от производителя (поставщика (пункта загрузки)) к потребителю (в пункт назначения).

Условия таких задач, как правило, формируются с помощью таблицы (табл. 1).

В шапку таблицы вносят потребителей n (место доставки) груза $b_j \in \{b_1, b_2,\ldots, b_n\}$, в последней строчке таблицы – потребности соответствующего потребителя в перевозимом грузе (Q_{1n}, Q_{2n},…, Q_{nn}). В первом столбце таблицы– поставщиков m ($a_i \in \{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$), в последнем столбце таблицы - мощность (запасы) поставщика (количество груза находящееся в месте погрузки (Q_{1m}, Q_{2m},…, Q_{mm}). $C_{ij} \in \{C_{11}, C_{12},\ldots, C_{1n}, C_{21}, C_{22},\ldots, C_{2n}, C_{m1},\ldots, C_{mn}\}$ – стоимость перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю.

Таблица 1

Условия транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_n	*Мощность поставщика*
a_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	Q_{1m}
a_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	Q_{2m}
…	…	…	…	…	…
a_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	Q_{mm}
Потребность получателя			…		ΣQ

Выразим планируемую поставку (объем перевозимого груза) от i-го поставщика j-му потребителю через x_{ij}.

Тогда математическая модель транспортной задачи примет вид:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to min.$$

Модель имеет следующие ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,...,m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,...,n, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,n.$$

Показывающие, что группа уравнений m описывает требование, что запасы необходимого груза m поставщиков будут вывезены полностью, а группа уравнений n – требование, что запросы потребителей будут удовлетворены полностью.

Число переменных x_{ij} равно $m \cdot n$, то есть равно числу клеток в таблице.

В случае, если суммарная мощность (потребного груза) поставщиков равна суммарному спросу потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

То транспортная задача является задачей с правильным балансом, а ее модель – закрытой.

В том случае, если суммарная мощность (потребного груза) поставщиков не равна суммарному спросу потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

То транспортная задача является задачей с неправильным балансом, а ее модель – открытой.

Любое из решений транспортной задачи ($x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}$) называется распределением поставок, которое может быть записано в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспортная задача называется несбалансированной транспортной задачей, если условие баланса нарушаются; в случае выполнения условия баланса она называется сбалансированной транспортной задачей. Очевидно, в случае сбалансированной модели весь имеющийся в наличии груз развозится полностью, и все потребности заказчиков полностью удовлетворены; в случае же открытой модели либо все заказчики удовлетворены и при этом на некоторых базах остаются излишки груза ($a > b$) , либо весь груз оказывается израсходованным, хотя потребности полностью не удовлетворены ($a < b$) . Если в реальной задаче условия баланса не выполняются, то можно добиться его выполнения искусственными приемами:

1. Превышение запасов над потребностями.

В этом случае вводится ―фиктивный потребитель с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для потребителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.

2. Превышение потребностей над запасами.

Вводится ―фиктивный производитель с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для производителя равна 0, т.к. поставки фактически нет

Методами отыскания опорного решения для транспортной задачи являются:

1) метод «северо-западного угла»;
2) метод минимальной стоимости;
3) метод двойного предпочтения;
4) метод Фогеля;
5) венгерский метод.

Вырожденные планы. Циклы и пополнение плана.

Прежде, чем перейти к анализу оптимальности планов и способам их улучшения, выясним, каким требованиям должны удовлетворять составляемые планы. Для этого вернемся к системе ограничений. В соответствии с определением плана перевозок у матрицы $X=\{x_{ij}\}$ сумма элементов i-й строки равняется a_i, $i = 1, 2,..., m$, а сумма элементов j-го столбца равняется b_j, $j = 1, 2,..., n$. Условие закрытости транспортной задачи $b = a$ означает, что среди $m+ n$ уравнений системы ограничений независимыми являются только $m + n - 1$ уравнений, поэтому в любом базисном решении этой системы должно быть $m + n - 1$ базисных переменных. Поскольку свободные переменные в таком решении равны нулю, то в транспортной таблице им будут соответствовать пустые клетки.

Клетки таблицы, в которые записаны отличные от нуля перевозки, называются *базисными*, а остальные (пустые) - *свободными*.

План называется *вырожденным*, если количество базисных клеток в нем меньше, чем $m + n -1$.

Если на каком-то этапе решения получился вырожденный план, то его необходимо *пополнить,* проставив в недостающем числе клеток нулевую перевозку и превратив, тем самым, эти клетки в базисные. Общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменятся. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Приведем условия, которым должен соответствовать пополненный план.

Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная линия может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

План называется *ациклическим*, если его базисные клетки не содержат циклов.

Доказано, что оптимальные планы являются ациклическими, поэтому и первоначальный план также должен удовлетворять этому требованию.

Заметим, что планы, полученные с помощью метода северо-западного угла и метода наименьшей стоимости, ациклические.

Однако если план оказался вырожденным, то при его пополнении требование ацикличности необходимо учитывать.

Для анализа полученных планов и их последующего улучшения удобно ввести дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые *потенциалами*.

Контрольные вопросы:

1. Какая транспортная задача является "открытой"?

2. Какая транспортная задача является "закрытой"?

3. Какие искусственные приемы применяются для приведения транспортной задачи к балансу?

4. Перечислите методы отыскания опорного плана.

3 РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

3.1 Метод «северо-западного угла»

В соответствии с данным методом таблица заполняется с верхнего левого угла («северо-западный угол») таким образом, что для обеспечения запросов потребителей запасы поставщика используются до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после этого используются запасы следующего по номеру поставщика.

В клетку таблицы 1.1 заносится меньшее из чисел a_1 или b_1.

Если $a_1 > b_1$, то в клетку таблицы вносится значение b_1. Если $a_1 < b_1$, то в клетку таблицы вносится значение a_1. В этом случае первый столбец или первая строка таблицы «закрыты», то есть потребности первого потребителя удовлетворены полностью (если внесено значение b_1) или предложение первого поставщика исчерпаны полностью (если внесено значение a_1).

После этого в случае $a_1 > b_1$ переходят ко второй клетке строки, а в случае $a_1 < b_1$ к нижней клетке первого столбца таблицы. В первом случае в клетке 1.2 вписываем значение (a_1 - b_1) и величину b_2. Во втором случае в клетке 2.1 вписываем (b_1 - a_1) и a_2.

Процесс продолжается до тех пор, пока на каком-либо шаге не будет исчерпан ресурс a_m и удовлетворены потребности b_n.

Рассмотрим решение на примере.

Пусть заданы условия транспортной задачи (табл. 2), с указание мощности поставщиков, потребности получателей и стоимости перевозки единицы груза (тыс. руб.).

Проверяем задачу на правильность баланса:

100 + 300 + 180 + 320 = 400 + 250 + 120 + 130

Задача является задачей с правильным балансом, поскольку сумма запасов и сумма потребностей равны, и составляют 900 ед.

Таблица 2

Условия транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*
a_1	*10*	*7*	*2*	*5*	*100*
a_2	*4*	*9*	*8*	*1*	*300*
a_3	*5*	*12*	*16*	*8*	*180*
a_4	*7*	*4*	*6*	*3*	*320*
Потребность получателя	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*

В первую клетку вписываем значение $a_1 = 100$, так как $a_1 < b_1$ (100 < 400) (табл. 3), при этом возможности поставщика a_1 исчерпаны полностью, первая строка «закрыта». Тогда переходим к нижней клетке 1.2 первого столбца. Потребитель b_1 удовлетворил свои потребности только на 100 ед., осталось 400 – 100 = 300 ед., у поставщика a_2 запас 300 ед., вписываем. Запасы поставщика a_2 исчерпаны полностью, потребности получателя удовлетворены полностью, строка 2 «закрыта», столбец 1 «закрыт».

Таблица 3

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*
a_1	*10* ***100***	*7*	*2*	*5*	*100*
a_2	*4* ***300***	*9*	*8*	*1*	*300*
a_3	*5*	*12* ***180***	*16*	*8*	*180*
a_4	*7*	*4* ***70***	*6* ***120***	*3* ***130***	*320*
Потребность получателя	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*

Далее переходим к клетке 2.3: 250 – 180 = 70, переходим к клетке 2.4: 320 – 70 = 250 столбец 2 «закрыт», потребитель b_2 удовлетворен полностью. Переходим в клетку 3.4: 250 – 120 = 130, вписываем 120, столбец 3 «закрыт», переходим к клетке 4.4: 130 = 130. Таблица заполнена.

Опорный план будет задаваться матрицей:

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 120 & 130 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки по таблице:

$$C = 100 \cdot 10 + 300 \cdot 4 + 180 \cdot 12 + 70 \cdot 4 + 120 \cdot 6 + 130 \cdot 3 = 5750 \text{ тыс. руб.}$$

3.2 Метод минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости заключается в распределении потребностей получателя в соответствии с возможностями поставщика в клетках с минимальной стоимостью (табл. 4).

Из всей таблицы выбирают наименьшую стоимость и в клетку, которая ей соответствует, вписывают, по возможности, наибольшее значение a_i или b_j. Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику запасы которого исчерпаны, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены.

Из оставшейся таблицы снова выбирают наименьшее значение стоимости и так далее, пока все запасы не будут распределены, а потребители - удовлетворены.

Опорный план будет задаваться матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 170 & 0 & 0 & 130 \\ 180 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 250 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4

Решение транспортной задачи по минимальной стоимости

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*
a_1	10	7	2 **100**	5	100
a_2	4 **170**	9	8	1 **130**	300
a_3	5 **180**	12	16	8	180
a_4	7 **50**	4 **250**	6 **20**	3	320
Потребность получателя	400	250	120	130	900

Стоимость перевозки по таблице:

С=100 · 2 + 170 ·4 + 130 · 1 + 180 · 5 + 50· 7 + 250 · 4 + 20 · 6 = 3380 тыс. руб.

Как видно, это значительно меньше, поэтому этот план ближе к оптимальному.

3.3 Метод двойного предпочтения

Если таблица стоимостей велика, то перебор всех элементов затруднителен. В этом, случае используют метод двойного предпочтения, суть которого заключается в следующем.

В каждом столбце отмечают знаком *V* клетку с наименьшей стоимостью. Затем, то же проделывают в каждой строке. В результате некоторые клетки имеют отметку *VV*. В них находится минимальная стоимость, как по столбцу, так и по строке. В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок, каждый раз, исключая из рассмотрения соответствующие столбцы или строки. Затем распределяют перевозки по клеткам, отмеченным знаком *V*. В оставшейся части таблицы перевозки распределяют по наименьшей стоимости.

Применим метод двойного предпочтения к задаче, условия которой записаны в таблице 2. Проведем расстановку знаков в столбцах и строках (табл. 5). Распределим объемы перевозок, начиная с наименьшей стоимости (табл. 6).

Опорный план будет задаваться матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 180 & 0 & 0 & 120 \\ 180 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 250 & 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Таблица 5

Построение опорного плана

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*
a_1	10	7	VV 2	5	100
a_2	V 4	9	8	VV 1	300

a_3	V 5	12	16	8	180
a_4	7	V 4	6	V 3	320
Потребность получателя	400	250	120	130	900

Таблица 6

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*
a_1	10	7	VV 2 **100**	5	100
a_2	V 4 **180**	9	8	VV 1 **120**	300
a_3	V 5 **180**	12	16	8	180
a_4	7 **40**	V 4 **250**	6 **20**	V 3 **10**	320
Потребность получателя	400	250	120	130	900

Стоимость перевозки по таблице:

$C=100 \cdot 2 + 180 \cdot 4 + 120 \cdot 1 + 180 \cdot 5 + 40 \cdot 7 + 250 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 3 = 3370$ тыс. руб.

Как видно, стоимость перевозки незначительно меньше, этот план также ближе к оптимальному.

3.4 Метод аппроксимации Фогеля

Метод Фогеля состоит в вычислении для каждой строки транспортной таблицы разницы между двумя наименьшими тарифами. Аналогичное действие выполняют для каждого столбца этой таблицы. Наибольшая разница между двумя минимальными тарифами соответствует наиболее предпочтительной строке или столбцу (если есть несколько строк или столбцов с одинаковой разницей, то выбор между ними произволен). В пределах этой строки или столбца отыскивают ячейку с минимальным тарифом, куда пишут отгрузку. Строки поставщиков или столбцы потребителей, которые полностью исчерпали свои возможности по отгрузке или потребности которых в товаре были удовлетворены, вычеркиваются из таблицы (в примерах ниже они закрашиваются серым цветом), и вычисление повторяются до полного удовлетворения спроса и исчерпания отгрузок без учета вычеркнутых («серых») ячеек. Для примера разберем транспортную задачу, представленную в таблице 2.

Таблица 7

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	*Разность*		
a_1	*10*	*7*	*2* **100**	*5*	*100*	*3*		
a_2	*4*	*9*	*8*	*1*	*300*	*3*		
a_3	*5*	*12*	*16*	*8*	*180*	*3*		
a_4	*7*	*4*	*6*	*3*	*320*	*1*		
Потребность получателя	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*			
Разность	*1*	*3*	*4*	*2*				

Вычислим разницы между двумя минимальными тарифами по строкам.

Строка 1: 5-2=3
Строка 2: 4-1=3
Строка 3: 8-5=3
Строка 4: 4-3=1
И затем по столбцам.
Столбец 1: 5-4=1
Столбец 2: 7-4=3
Столбец 3: 6-2=4
Столбец 4: 3-1=2

Наиболее предпочтителен столбец 3, поскольку разница для него максимальна.

В столбце 3 найдем минимальную цену — 2 тыс.руб./ед. в строке 1. В нашем примере это 1-й поставщик, 3-й потребитель. Вписываем в эту ячейку максимальный объем, который позволяет запас поставщика и спрос потребителя (берем 100 ед.). Поскольку запас поставщика полностью исчерпан, закрашиваем соответствующую строку в серый цвет.

Вычислим разницы между двумя минимальными тарифами по строкам (не учитывая закрашенные серым и распределенные ячейки).

Строка 2: 4-1=3

Строка 3: 8-5=3

Строка 4: 4-3=1

И затем по столбцам.

Столбец 1: 5-4=1

Столбец 2: 9-4=5

Столбец 3: 8-6=2

Столбец 4: 3-1=2

Максимальную разницу имеет столбец 2, в нем выбираем минимальный тариф, не учитывая закрашенные ячейки.

В нашем примере это 4-й поставщик, 2-й потребитель с ценой доставки 4 тыс. руб./ед.

Вписываем в эту ячейку максимальный объем, который позволяет запас поставщика и спрос потребителя (250 ед., табл. 8). Поскольку спрос потребителя полностью удовлетворен, закрашиваем соответствующий столбец в серый цвет.

Таблица 8

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	*Разность*		
a_1	10	7	2 **100**	5	*100*	*3*		
a_2	4	9	8	1	*300*	*3*	*3*	
a_3	5	12	16	8	*180*	*3*	*3*	
a_4	7	4 **250**	6	3	*320*	*1*	*1*	
Потребность получателя	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*			
Разность	*1*	*3*	*4*	*2*				
	1	*5*	*2*	*2*				

Вычислим разницы между двумя минимальными тарифами по строкам (не учитывая закрашенные серым и распределенные ячейки).

Строка 2: 4-1=3

Строка 3: 8-5=3

Строка 4: 6-3=3

И затем по столбцам.

Столбец 1: 5-4=1

Столбец 3: 8-6=2

Столбец 4: 3-1=2

Максимальная разница в тарифе у трех строк, возьмем любую из них, например строку 2, а в ней — выберем минимальный тариф, не учитывая закрашенные ячейки.

В нашем примере это 2-й поставщик, 4-й потребитель.

Вписываем в эту ячейку максимальный объем, который позволяет запас поставщика и спрос потребителя (130 ед., табл. 9). Поскольку потребности потребителя полностью удовлетворены, закрашиваем соответствующий столбец в серый цвет.

Таблица 9

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	*Разность*		
a_1	10	7	2 **100**	5	100	3		
a_2	4	9	8	1 **130**	300	3	3	3
a_3	5	12	16	8	180	3	3	3
a_4	7	4 **250**	6	3	320	1	1	3
Потребность получателя	400	250	120	130	900			
Разность	1	3	4	2				
	1	5	2	2				
	1		2	2				

Вычислим разницы между двумя минимальными тарифами по строкам (не учитывая закрашенные серым и распределенные ячейки).

Строка 2: 8-4=4

Строка 3: 16-5=11

Строка 4: 7-6=1

И затем по столбцам.

Столбец 1: 5-4=1

Столбец 3: 8-6=2

Максимальная разница в тарифе у строки 3, в ней выберем минимальный тариф, не учитывая закрашенные ячейки.

В нашем примере это 3-й поставщик, 1-й потребитель.

Вписываем в эту ячейку максимальный объем, который позволяет запас поставщика и спрос потребителя (180 ед., табл. 10). Поскольку запасы поставщика полностью исчерпаны, закрашиваем соответствующую строку в серый цвет.

Вычислим разницы между двумя минимальными тарифами по строкам (не учитывая закрашенные серым и распределенные ячейки).

Строка 2: 8-4=4

Строка 4: 7-6=1

Таблица 10

Решение транспортной задачи

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	*Разность*		
a_1	10	7	2 ***100***	5	*100*	*3*		
a_2	4	9	8	1 ***130***	*300*	*3*	*3*	*3*
a_3	5 ***180***	12	16	8	*180*	*3*	*3*	*3*
a_4	7	4 ***250***	6	3	*320*	*1*	*1*	*3*
Потребность получателя	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*			
Разность	*1*	*3*	*4*	*2*				
	1	*5*	*2*	*2*				
	1		*2*	*2*				

И затем по столбцам.

Столбец 1: 7-4=3

Столбец 3: 8-6=2

Максимальная разница в тарифе у строки 2, в ней выберем минимальный тариф, не учитывая закрашенные ячейки.

В нашем примере это 2-й поставщик, 1-й потребитель.

Вписываем в эту ячейку максимальный объем, который позволяет запас поставщика и спрос потребителя (остаток у поставщика 300-130=170 ед., табл. 11). Поскольку запасы поставщика полностью исчерпаны, закрашиваем соответствующую строку в серый цвет.

Оставшиеся значения распределяем по ячейкам.

Опорный план будет задаваться матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 170 & 0 & 0 & 130 \\ 180 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 250 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 11

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	*Разность*		
a_1	10	7	2 **100**	5	100	3		
a_2	4 **170**	9	8	1 **130**	300	3	3	3
a_3	5 **180**	12	16	8	180	3	3	3
a_4	7	4 **250**	6	3	320	1	1	3
Потребность получателя	400	250	120	130	900			
Разность	1	3	4	2				
	1	5	2	2				
	1		2	2				

Таблица 12

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*
a_1	10	7	2 **100**	5	*100*
a_2	4 **170**	9	8	1 **130**	*300*
a_3	5 **180**	12	16	8	*180*
a_4	7 **50**	4 **250**	6 **20**	3	*320*
Потребность получателя	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*

Стоимость перевозки по таблице:

$C=100 \cdot 2 + 170 \cdot 4 + 130 \cdot 1 + 180 \cdot 5 + 50 \cdot 7 + 250 \cdot 4 + 20 \cdot 6 = 3380$ тыс. руб.

3.5 Венгерский метод

Идея метода была высказана венгерским математиком Эгервари и состоит в следующем: строится начальный план перевозок, неудовлетворяющий в общем случае всем условиям задачи (из некоторых пунктов производства не весь продукт вывозится, потребность части пунктов потребления не полностью удовлетворена). Далее осуществляется переход к новому плану, более близкому к оптимальному. Последовательное применение этого приема за конечное число итераций приводит к решению задачи.

Возьмем за пример транспортную задачу, изложенную в таблице 2.

Таблица 13

Условия транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*

a_1	10	7	2	5	100
a_2	4	9	8	1	300
a_3	5	12	16	8	180
a_4	7	4	6	3	320
Потребность получателя	400	250	120	130	900

Преобразуем матрицу стоимостей, вычитая из элементов каждой строки минимальный элемент этой строки. Получим матрицу стоимостей, в которой в каждой строке есть хотя бы один ноль (табл. 14).

Вычтем из всех элементов каждого столбца, не содержащего ноль, его минимальный элемент. Получили матрицу, где в каждой сроке и в каждом столбце есть по нулю (табл. 15).

Таблица 14

Предварительный этап 1

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	
a_1	8	5	0	3	100	- 2
a_2	3	8	7	0	300	- 1
a_3	0	7	11	3	180	- 5
a_4	4	1	3	0	320	- 3
Потребность получателя	400	250	120	130	900	

Таблица 15

Предварительный этап 2

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*

a_1	8	4	0	3	100
a_2	3	7	7	0	300
a_3	0	6	11	3	180
a_4	4	0	3	0	320
Потребность получателя	400	250	120	130	900
		- 1			

Попробуем распределить перевозки по нулевым клеткам. Перевозки по нулевым клеткам распределить невозможно. Обратим внимание на вторую строку, которая содержит ноль только в пятом столбце. Предложение второй строки составляет 300 единиц, а потребность четвертого потребителя, к которому мы можем их направить лишь 130 единиц. Преобразуем матрицу перевозок так, чтобы во второй строке появились еще нули.

Вычтем из элементов второй строки её минимальный элемент, не принимая в расчет нули. Это элемент 3. Для того, чтобы не появилось отрицательных элементов, прибавим к столбцам, содержащим нули во второй строке этот элемент, т.е. 3 (табл. 16).

Таблица 16

Предварительный этап 3

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	
a_1	8	4	0	6	100	
a_2	0	4	4	0	300	- 3
a_3	0	6	11	6	180	
a_4	4	0	3	0	320	
Потребность получателя	400	250	120	130	900	
				+ 3		

Видим, что в нулевых ячейках нам опять не удается распределить перевозимый груз, так как в столбце 3-го потребность 120 ед, а запасы поставщика 100 ед. Принимаем решение о увеличении количества нулей для 3-го потребителя.

Таблица 17

Предварительный этап 4

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*
a_1	8	4	0	6	100
a_2	0	4	1	0	300
a_3	0	6	8	6	180
a_4	4	0	0	0	320
Потребность получателя	400	250	120	130	900
			- 3		

Вычтем минимальное значение для показателей 3-го столбца, не принимая во внимание нули (табл. 17), либо в строке 2 либо в строке 4. Проведем итерацию для 2 строки, отняв минимальное значение 4, для предотвращения появления минусового значения для столбцов прибавим 4.

Попробуем опять осуществить перевозки по клеткам, в которых стоят нули (табл. 18).

Таблица 18

Предварительный этап 4

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*
a_1	8	4	0 **100**	6	100
a_2	0 **220**	4	1	0 **80**	300
a_3	0 **180**	6	8	6	180
a_4	4	0 **250**	0 **20**	0 **50**	320

Потребность получателя	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*
			- 3		

Опорный план будет задаваться матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 220 & 0 & 0 & 80 \\ 180 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки по таблице:
С=100 · 2 + 220 ·4 + 80 · 1 + 180 · 5 + 250 · 4 + 20 · 6 +
+ 50 · 3 = 3330 тыс. руб.

Контрольные вопросы:

1. Этапы решения методом "северо-западного угла".
2. Этапы решения методом минимальной стоимости.
3. Этапы решения методом двойного предпочтения.
4. Этапы решения методом Фогеля.
5. Этапы решения венгерским методом.
6. Дайте сравнительную характеристику методам решения транспортной задачи.

4 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

4.1 Метод потенциалов

Один из наиболее применяемых и подходящих для большинства случаев методов — итерационное улучшение плана перевозок. Суть его в следующем: находим некий опорный план и проверяем его на оптимальность ($Z \rightarrow \min$). Если план оптимален — решение найдено. Если нет — улучшает план столько раз, сколько потребуется, пока не будет найден оптимальный план.

Для анализа полученных планов и их последующего улучшения удобно ввести дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые потенциалами. Этот метод улучшения плана перевозок называется методом потенциалов.

Сопоставим каждому поставщику a_i и каждому потребителю b_j соответствующие величины U_i и V_j так, чтобы для всех базисных клеток плана было выполнено следующее соотношение: $U_i + V_j = C_{ij}$. C_{ij} - стоимость перевозки единицы груза занятой клетки в i- й строке и j-м столбце. Рассмотрим пример транспортной задачи (табл. 19). Добавим к транспортной таблице дополнительную строку и столбец для U_i и V_j.

Предположим, что $U_1 = 0$ (табл. 19). Тогда мы сможем найти $V_4 = C_{14} — U_1 = 5 — 0 = 5$.

Зная V_4 можем найти $U_4 = C_{14} — V_4 = 3 — 5 = -2$.

По аналогии находим следующие значения:

$V_3 = C_{43} — U_4 = 6 — (-2) = 8.$

$V_2 = C_{42} — U_4 = 4 — (-2) = 6.$

$V_1 = C_{41} — U_4 = 7 — (-2) = 9.$

$U_3 = C_{43} — V_4 = 8 — 5 = 3.$

$U_2 = C_{42} — V_4 = 1 — 5 = -4.$

Таблица 19

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	U_i
a_1	10	7	2 **100**	5	100	$U_1 = 0$
a_2	4 **170**	9	8	1 **130**	300	$U_2 = -4$
a_3	5 **180**	12	16	8	180	$U_3 = 3$
a_4	7 **50**	4 **250**	6 **20**	3	320	$U_4 = -2$
Потребность получателя	400	250	120	130	900	
V_j	$V_1=9$	$V_2=6$	$V_3=8$	$V_4= 5$		

Для каждой свободной клетки плана вычислим разности $\Delta C_{ij} = C_{ij} — (U_i + V_j)$, и запишем полученные значения в левых нижних углах соответствующих ячеек (табл. 20).

Таблица 20

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	U_i
a_1	**10** 1	7 1	2 -6 **100**	5 0	*100*	$U_1 = 0$
a_2	4 -1 **170**	9 7	8 4	1 0 **130**	*300*	$U_2 = -4$
a_3	5 -7 **180**	12 3	16 5	8 0	*180*	$U_3 = 3$
a_4	7 0 **50**	4 0 **250**	6 0 **20**	3 0	*320*	$U_4 = -2$
Потреб-ность получа-теля	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*	
V_j	$V_1=9$	$V_2=6$	$V_3=8$	$V_4=5$		

$\Delta C_{11} = C_{11} — (U_1 + V_1) = 10 — (0 + 9) = 1;$
$\Delta C_{12} = C_{12} — (U_1 + V_2) = 7 — (0 + 6) = 1;$
$\Delta C_{13} = C_{13} — (U_1 + V_3) = 2 — (0 + 8) = -6;$
$\Delta C_{14} = C_{14} — (U_1 + V_4) = 5 — (0 + 5) = 0.$

Аналогично проводим расчет для остальных ячеек.

Найдем ячейку с наибольшей по абсолютной величине (т. е. без учета знака, по модулю) отрицательной разностью ΔC_{ij} и построим цикл, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными. Такой цикл всегда существует и единствен.

Отметим ячейку с отрицательной разностью ΔC_{ij} знаком «-», следующую знаком «+», и так далее, поочередно. Затем находим минимальное значение груза в ячейках цикла имеющих знак «+» (здесь это 50) и вписываем его в свободную ячейку со знаком «+». Затем последовательно обходим все ячейки цикла, поочередно вычитая и прибавляя к ним минимальное значение (в соответствии со знаками, которыми эти ячейки помечены: где минус — вычитаем, где плюс — прибавляем).

Таблица 21

Решение транспортной задачи

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	b_4	*Мощность поставщика*	U_i
a_1	**10** 1	7 1	2 -6 **100**	5 0	*100*	$U_1 = 0$
a_2	4 -1 **170**	9 7	8 4	1 0 **130**	*300*	$U_2 = -4$
a_3	- 5 -7 **130**	+ 12 3 50	16 5	8 0	*180*	$U_3 = 3$
a_4	+ 7 0 **100**	- 4 0 **200**	6 0 **20**	3 0	*320*	$U_4 = -2$
Потребность получателя	*400*	*250*	*120*	*130*	*900*	
V_j	$V_1=9$	$V_2=6$	$V_3=8$	$V_4=5$		

Получим новый опорный план перевозок (табл. 21).

4.2 Метод вычеркивания циклов

Метод вычеркивания позволяет проверить, является ли данное решение транспортной задачи опорным.

Пусть допустимое решение транспортной задачи, которое имеет $m+n$-1 отличных от нуля координат, записано в таблицу. Чтобы данное решение было опорным, векторы-условий, соответствующие положительным координатам, а также базисным нулям, должны быть линейно независимыми. Для этого занятые решением клетки таблицы должны быть расположены так, чтобы нельзя было из них образовать цикл.

Строка или столбец таблицы с одной занятой клеткой не может входить в какой-либо цикл, так как цикл имеет две и только две клетки в каждой строке или столбце. Следовательно, чтобы вычеркнуть сначала либо все строки таблицы, содержащие по одной занятой клетке, либо все столбцы, содержащие по одной занятой клетке, далее вернуться к столбцам (строкам) и продолжать вычеркивание.

Если в результате вычеркивания все строки и столбцы будут вычеркнуты, значит, из занятых клеток таблицы нельзя выделить часть, образующую цикл, и система соответствующих векторов-условий является линейно независимой, а решение является опорным.

Если же после вычеркивания останется часть клеток, то эти клетки образуют цикл, система соответствующих векторов-условий является линейно зависимой, а решение не является опорным.

Примеры "вычеркнутого" (опорного) и "не вычеркнутого" (не опорного решений):

Опорный план будет задаваться матрицей:

$$X=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

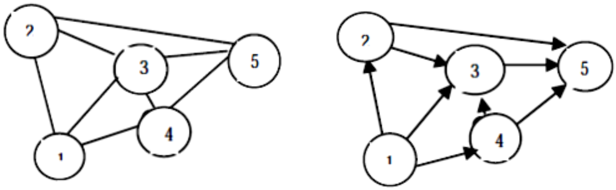
Логика вычеркивания: сначала вычеркиваются все столбцы, в которых всего одна занятая клетка (5 0 0), затем вычеркиваются все строки, в которых всего одна занятая клетка (0 15), (2 0), повторить цикл (7), (1).

4.3 Транспортная задача в сетевой форме

Транспортная задача может быть представлена в виде схемы сети. Сетевая транспортной задачи является более наглядной, так как хорошо отражает реальную картину перевозок. Кроме того, сетевой метод позволяет учесть пропускную способность отдельных участков дорожной сети, тогда как матричная форма позволяет учесть пропускную способность только приемных пунктов. Сетевая форма транспортной задачи требует меньше подготовительных работ. Если погрузка выгрузка совершаются в узлах, то для решения задачи достаточно всего лишь раз составить макет сети с указанием расстояния или стоимости перевозки. Рассматриваемая задача непосредственно связана с теорией графов.

4.3.1 Понятие графов

Графом называется множество точек, соединённых линиями. Обозначается граф *G (I, K)*, где *I* = 1, 2, …, *n* –множество точек. Точки, входящие в множество *I*, называются *вершинами* графа. *К* - множество отрезков, соединяющих вершины графа. Эти отрезки называются *рёбрами* графа. Пример графа показан на рисунке 7.



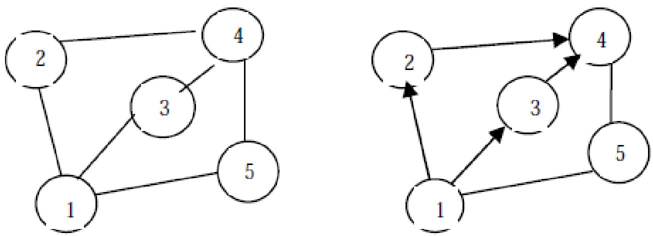
а) *б)*

Рис. 7 –Пример графа

а – граф; б – ориентированный граф

Точки 1, 2, 3, 4, 5 являются вершинами графа. Рёбрами являются отрезки (1-2), (1-3), (1-4), (1-5), (2-3), (3-4), (2-5), (3-5), (4-5). Если рёбра ориентированы то есть, указано направление движения, то граф называется *ориентированным* (рис. 7, *б*)

Любые две вершины графа называется *смежными* если они соединены ребром. Для графа, показанного на рисунке 8, смежными являются пары вершин: (1-2), (1-3), (1-5), (2-4), (3-4), (4-5).



а) *б)*

Рис. 8 – Типы графа:

а – неориентированный; б – смешанный

Если рёбра графа не ориентированы, то граф называется *неориентированным* (рис. 8, *а*). Граф, в котором есть и ориентированные ребра, и неориентированные называется *смешанным* (рис. 8, *б*)

Два графа называются *изомрфными*, если между их вершинами существует соответствие, сохраняющее смежность (рис. 9).

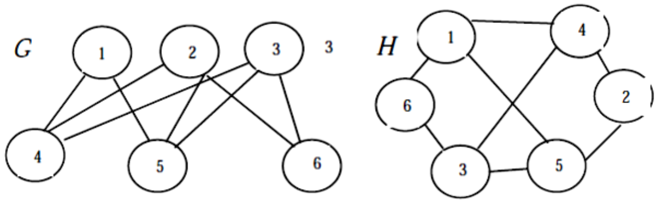
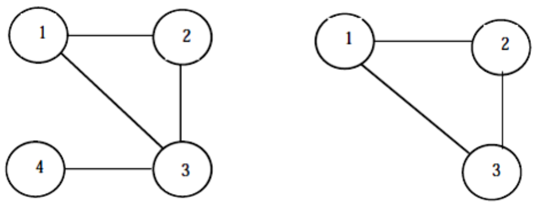


Рис. 9 – Изоморфные графы

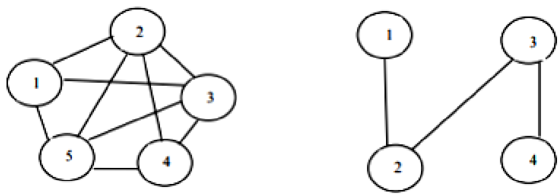
Изоморфизм графов обозначают $G \cong H$. *Подграфом* графа называется граф, у которого все вершины и рёбра принадлежат графу G. Для графа *а*, приведённого на рисунке 10, подграфом является граф *б*.



а) *б)*

Рис. 10 – Граф (*а*) и его подграф (*б*)

Граф, у которого все вершины соединены между собой, называется *полным* (рис. 11, *а*). *Степенью вершины* называется число рёбер графа, которым принадлежит эта вершина. Для графа, показанного на рисунке 11, *б*, степень первой вершины равна 1, степень второй вершины равна 2. Степень вершины может быть чётно или нечётной. Число вершин нечётной степени – чётно. Это утверждение справедливо для любого графа

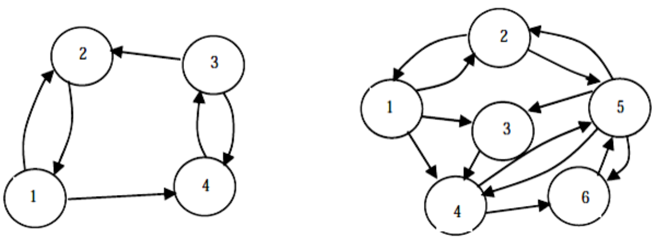


а) *б)*

Рис. 11 – Полный (*а*) и неполный (*б*) графы

Дугой на графе называется ориентированная пара (x_i, x_j) вершин x_i и x_j. Например, для графа (рис. 12, *а*) дугами являются: (1-2), (2-1), (3-4) и (4-3).

Путём (маршрутом) на графе называется последовательность сцепленных дуг позволяющих пройти из одной вершины в другую. Для графа (рис. 12, *б*) примерами пути являются: (1-2-5-6), (1-2-5-4), (1-4-6), (1-4-6-5)Б (1-4-5-2).



а) *б)*

Рис. 12 – Путь (маршрут) на графе (*а*), цепь (*б*)

Маршрут называется *цепью*, если все его рёбра различны (рис. 13, *а*). Цепь называется *простой*, если все её вершины различны (рис. 14).

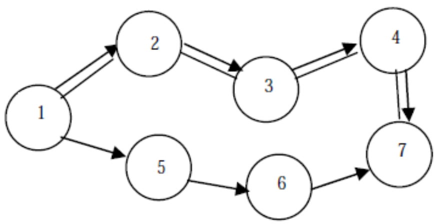
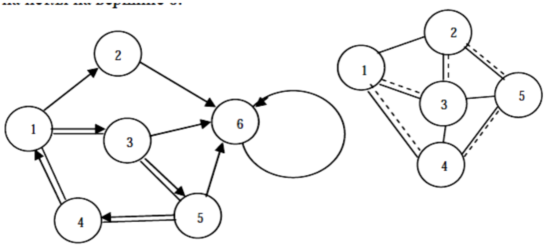


Рис. 14 – Простая цепь

Замкнутая простая цепь называется *циклом* (рис.15, *а*). Цикл, содержащий отличные друг друга рёбра, называется *простым*, в противном случае – *сложным*. Контур, образованный одной дугой, называется *петлёй* (рис. 15, а, показана петля на вершине 6).

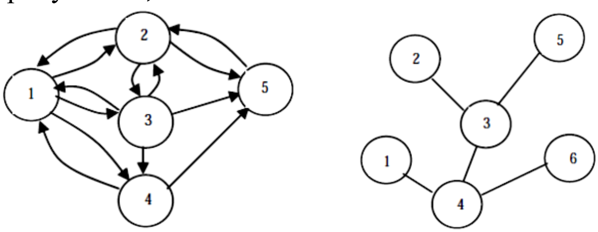
Гамильтоновым циклом (путём) на графе называется цикл, проходящий через каждую вершину графа только один раз. Гамильтонов цикл (путь) всегда является простым. Он может не содержать все рёбра графа. Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется *гамильтоновым графом* (рис. 15, *б*). Гамильтонов цикл показан пунктирной линией. На графе может быть несколько гамильтоновых циклов.



а) *б)*

Рис. 15 – Типы графов:
а – с петлей; б – с гамильтоновым циклом

Если в графе существует маршрут, соединяющий две любые вершины, то граф называется *связным* (рис. 16, *а*). Связный граф, не содержащий циклов, называется *деревом*. Для графа, показанного на рисунке 16, *а*, деревом является граф, приведённый на рисунке 16, *б*.



а) *б)*

Рис. 16 – Типы графов:
а – связный; б – дерево связного графа

Дерево не имеет петель и кратных рёбер, и любые две вершины связаны единственной цепью. Вершины дерева, степень которого равна единице, называется *висячей*. Например, для дерева (рис. 16, *б*), висячими будут вершины 1, 2, 5 и 6.

Ветвями дерева являются рёбра графа, входящие в дерево. Для дерева (рис. 16, *б*) ветвями являются ребра (1-4), (4-6), (3-4), (2-3) и (3-5). Граф без циклов, состоящий из нескольких деревьев, называется *лесом* (рис. 17)

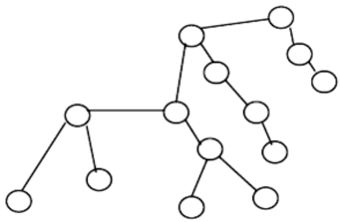


Рис. 17 – Лес

Ориентированный граф, элементами которого поставлены в соответствие некоторые параметры, называется *сетью*. Параметры задаются для верши и для дуг графа. Параметром вершины i является некоторое число a_i, называемое интенсивностью или дивергенцией $diva_i$. Вершины, для которых $diva_i > 0$, называются *источниками*, вершины, для которых - $diva_i < 0$ называются *стоками*. Если $diva_i = 0$, то - *нейтральными*.

Для транспортной сети источниками являются пункты отправления грузов и пассажиров, стоками – грузо - и пассажиро - поглощающие пункты. Нейтральными являются все пункты, в которых нет ни потребления, ни производства. Параметром дуги (i, j) является некоторое число d_{ij}, называемое пропускной способностью дуги Пропускная способность транспортной сети определяется максимальным количеством груза, которое соответствующая коммуникация может пропустить за единицу времени.

Потоком на сети называется функция, сопоставляющая каждой дуге (i, j) целое число x_{ij} и обладающая следующими свойствами:

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \quad (i,j) \in G,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

для вершин k, не являющихся ни источником, ни стоком,

$$\sum_{i} x_{sk} = \sum_{j} x_{ks'},$$

где s – источник; s/ - сток.

Условия означают:

- поток по любому ребру не может превышать пропускную способность ребра;
- для вершин, не являющихся ни источником, ни стоком, количество ввозимого груза должно равняться количеству вывозимого груза;
- сколько груза вывозится от грузоотправителей, сколько и ввозится грузополучателям.

Для любой сети максимально возможный поток из s в s' равен минимальной пропускной способности разреза, отделяющего s от s'. Дуга называется *насыщенной* если поток на ней равен ее пропускной способности. Если поток на дуге меньше её пропускной способности, то дуга является *ненасыщенной*, а если поток равен нулю, то *свободной*.

4.3.2 Метод потенциалов в сетевой постановке

Найти оптимальный опорный план перевозок транспортной задачи (рис. 18). Поставщиками являют ты 1 и 4. Потребителями – пункты 2, 3, 5 и 7. Объём поставок 90 единиц. Объёмы потребления поставлены в вершинах со знаком «-» - 90 единиц. Модель транспортной задачи является закрытой.

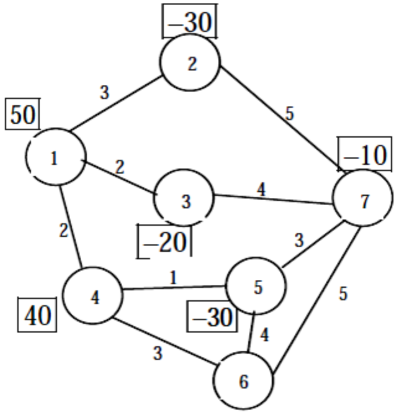


Рис. 18 – Транспортная задача

Строим опорный план. Количество дуг равно 5 < n-1=7. План не является оптимальным. Вводим одну дугу с нулевой поставкой по дуге (2-7) (штрих-пуктирная линия, рис. 19). Число дуг $n-1=6$.

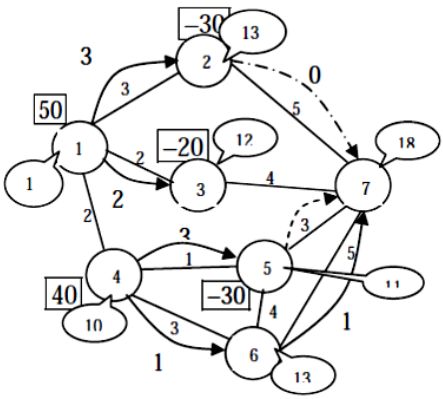


Рис. 19 – Опорный план транспортной задачи

Вычисляем потенциалы вершин графа. Присвоим вершине 1 потенциал $П_1 = 10$, и проведем расчет потенциалов остальных вершин:

$П_2 = П_1 + 3 = 10 + 3 = 13,$

$П_3 = П_1 + 2 = 10 + 2 = 12,$
$П_7 = П_2 + 5 = 13 + 5 = 18,$
$П_6 = П_7 - 5 = 18 - 5 = 13,$
$П_4 = П_6 - 3 = 13 - 3 = 10,$
$П_5 = П_4 + 1 = 10 + 1 = 11.$

Определим оценку ребер графа не имеющих дуг:
дуга 1-4 $Δ_{14} = 2 – (10 – 10) = 2 > 0,$
дуга 3-7 $Δ_{37} = 4 – (18 – 12) = -2 < 0,$
дуга 5-7 $Δ_{57} = 3 – (18 – 11) = -4 < 0,$
дуга 5-6 $Δ_{56} = 4 – (13 – 11) = 2 > 0.$

План не является оптимальным, так как не выполняется условие $Δ_{ij} \geq 0$. Для улучшения плана выбираем дугу с наибольшей отрицательной оценкой, это дуга (5-7), направим ее от меньшего значения потенциала к большему (от 5 вершины к 7 вершине). В соответствии с рисунком 19, дуги (4-6) и (6-7) имеют противоположное направление дуге (5-7), таким образом, величина перемещаемого груза будет min{10, 10}=10.

Соответственно поставка груза на дугах (4-5) и (5-7) увеличится на 10 единиц, а на дугах (4-6) и (6-7) уменьшится на 10 единиц, тогда по дуге (4-6) перевозок не будет и она аннулируется. Получаем улучшенный план перевозок (рис. 20).

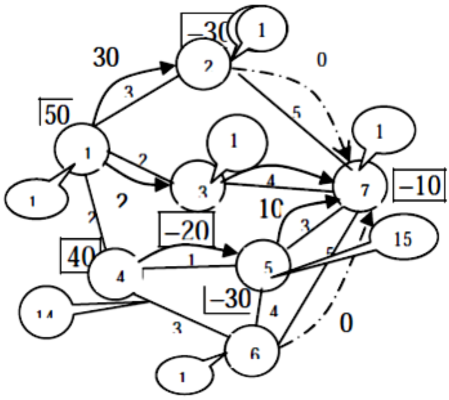


Рис. 20 – Улучшенный план перевозок

Проведем расчет потенциалов для улучшенного плана:
$П_2 = П_1 + 3 = 10 + 3 = 13,$

$П_3 = П_1 + 2 = 10 + 2 = 12,$
$П_7 = П_2 + 5 = 13 + 5 = 18,$
$П_6 = П_7 - 5 = 18 - 5 = 13,$
$П_5 = П_7 - 3 = 18 - 3 = 15,$
$П_4 = П_5 - 1 = 15 - 1 = 14.$

Определим оценку ребер графа не имеющих дуг:
дуга 3-7 $Δ_{37} = 4 – (18 – 12) = -2 < 0,$
дуга 6-5 $Δ_{65} = 4 – (15 – 13) = 2 > 0,$
дуга 6-4 $Δ_{64} = 3 – (14 – 13) = 2 > 0,$
дуга 1-4 $Δ_{14} = 2 – (14 – 10) = 2 > 0.$

План не является оптимальным, так как не выполняется условие $Δ_{ij} \geq 0$. Для улучшения плана выбираем дугу (3-7), максимальные поставки дуге от других дуг раны нулю. Получаем улучшенный план перевозок (рис. 21).

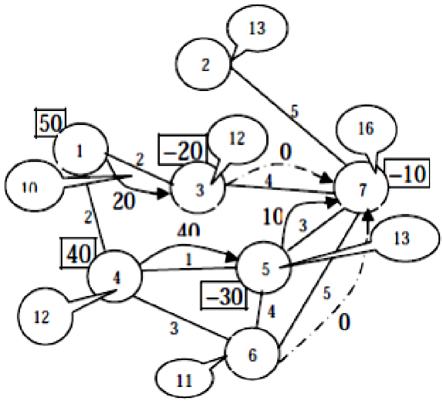


Рис. 21 – Улучшенный план перевозок

Проведем расчет потенциалов для улучшенного плана:
$П_2 = П_1 + 3 = 10 + 3 = 13,$
$П_3 = П_1 + 2 = 10 + 2 = 12,$
$П_7 = П_3 + 4 = 12 + 4 = 16,$
$П_6 = П_7 - 5 = 16 - 5 = 11,$
$П_5 = П_7 - 3 = 16 - 3 = 13,$
$П_4 = П_5 - 1 = 13 - 1 = 12.$

Определим оценку ребер графа не имеющих дуг:
дуга 2-7 $Δ_{27} = 5 – (16 – 13) = 2 > 0,$

дуга 6-5 $\Delta_{65} = 4 - (13 - 1) = 2 > 0$,

дуга 6-4 $\Delta_{64} = 3 - (12 - 11) = 2 > 0$,

дуга 1-2 $\Delta_{12} = 2 - (12 - 10) = 0$.

План является оптимальным, так как выполняется условие $\Delta_{ij} \geq 0$.

Суммарные транспортные расходы составят:

$C = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 0 + 40 + 30 + 0 + 5 \cdot 10 = 250.$

4.3.3 Метод построения критического пути

Критический путь представляет собой непрерывную последовательность взаимосвязанных работ и событий от начального до конечного события, имеющую наибольшую длину.

Работы и события, через которые проходит критический путь, называются *критическими*.

Пути, близкие по времени к критическим, называются *подкритическими*. Любой некритический путь на сетевом графике имеет определённый *резерв времени*, который равен разности между суммой критических работ, лежащих на критическом пути, замыкающем дугу, и некритических, лежащих на самом пути. Наличие резервов времени у некритических работ даёт возможность свободно маневрировать внутренними ресурсами и этим ускорять выполнение критических и подкритических работ.

Для определения критического пути на сетевом графике наиболее применяемыми являются метод потенциалов и динамического программирования.

Метод потенциалов

Метод заключается в определении потенциалов вершин графа, отражающих расстояние от начальной вершины до рассматриваемой. Метод потенциалов рассматривается в направлении увеличения потенциалов вершин графа.

Потенциалы вершин вычисляются по формуле:

$$П_j = П_i + t_{ij}. \quad i \in J_Н, j \in J_К,$$

где $J_н$ - множество начальных событий; $J_к$ - множество конечных событий, $П_i$ - потенциал предыдущей вершины J; t_{ij} i - продолжительность работы $(i - j)$, то есть, это длина ребра между вершинами i и j.

Если $П_j > П_i$, то вершине j присваивается потенциал $П_j$. Если $П_j < П_i$, то потенциал вершины j принимается равным $П_i$. Потенциал конечной вершины является длиной критического пути. Перед началом расчёта всем вершинам (событиям) графа (сетевого графика) присваиваются самые малые потенциалы – 0.

Рассмотрим задачу (рис. 22).

События пронумерованы цифрами в кружках: 1 – начальное событие, 16 – конечное событие. Продолжительность работ показана цифрами над рёбрами. Найдём критический путь с помощью метода *потенциалов*.

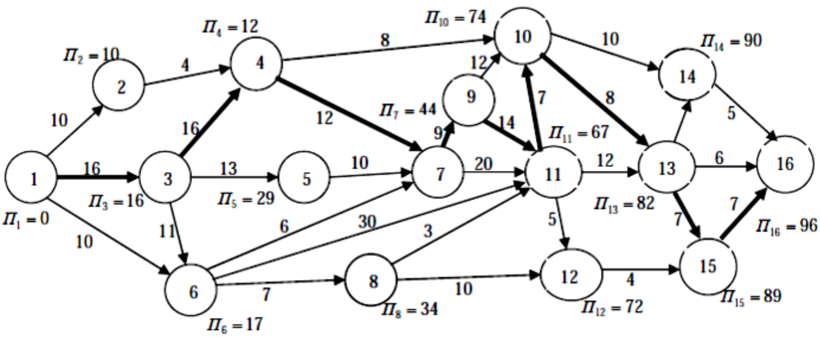


Рис. 21 – Транспортная задача

Присвоим всем вершинам графа (сетевого графика) $П_1$=0.

Определяем потенциал вершин, связанных с 1-й вершиной:

$П_2 = П_1 + t_{12} = 0 + 10 > П_2 = 10$, принимаем $П_2 = 10$.

$П_3 = П_1 + t_{12} = 0 + 16 > 0$, принимаем $П_3 = 16$.

$П_6 = П_1 + t_{12} = 0 + 10 > 0$, принимаем $П_3 = 10$.

Потенциал вершины 4, связанной с вершиной 2:

$П_4 = П_2 + t_{12} = 10 + 4 > 0$, принимаем $П_4 = 14$.

Для вершин, связанных с событием 3:

$П_4 = П_3 + t_{34} = 16 + 16 = 32 >$ ранее рассчитанного $П_4 = 14$, принимаем $П_4 = 32$.

$П_5 = П_3 + t_{35} = 16 + 13 = 29 > 0$, принимаем $П_5 = 29$.

$П_6 = П_3 + t_{36} = 16 + 11 = 27 > 0$, принимаем $П_5 = 27$.

Для вершин, связанных с событием 4:

$П_5 = П_3 + t_{35} = 16 + 13 = 29 > 0$, принимаем $П_5 = 29$.

$П_7 = П_4 + t_{47} = 32 + 12 = 44 > 0$, принимаем $П_7 = 44$.

Для вершины 7, связанных с событием 5:

$П_7 = П_5 + t_{57} = 29 + 10 = 39$ < ранее рассчитанного $П_7 = 44$, принимаем $П_7 = 44$.

Для вершин, связанных с событием 6:

$П_7 = П_6 + t_{67} = 27 + 6 = 33$ < ранее рассчитанного $П_7 = 44$, принимаем $П_7 = 44$.

$П_{10} = П_6 + t_{610} = 27 + 30 = 57 > 0$, принимаем $П_{10} = 57$.

$П_8 = П_6 + t_{68} = 27 + 7 = 34 > 0$, принимаем $П_8 = 34$.

Для вершин, связанных с событием 7:

$П_9 = П_7 + t_{79} = 44 + 9 = 53 > 0$, принимаем $П_9 = 53$.

$П_{10} = П_7 + t_{710} = 44 + 20 = 64$ > ранее рассчитанного $П_{10} = 57$, принимаем $П_{10} = 64$.

Для вершин, связанных с событием 8:

$П_{10} = П_8 + t_{810} = 34 + 3 = 37$ < ранее рассчитанного $П_{10} = 64$, принимаем $П_{10} = 64$.

$П_{12} = П_8 + t_{812} = 34 + 10 = 44 > 0$, принимаем $П_{12} = 44$.

Для вершин, связанных с событием 9:

$П_{11} = П_9 + t_{911} = 53 + 12 = 65 > 0$, принимаем $П_{11} = 65$.

$П_{10} = П_9 + t_{910} = 53 + 14 = 67$ < ранее рассчитанного $П_{10} = 64$, принимаем $П_{10} = 67$.

Для вершин, связанных с событием 10:

$П_{11} = П_{10} + t_{1011} = 67 + 7 = 74$ > ранее рассчитанного $П_{11} = 65$, принимаем $П_{11} = 74$.

$П_{13} = П_{10} + t_{1013} = 67 + 12 = 79 > 0$, принимаем $П_{13} = 79$.

$П_{12} = П_{10} + t_{1012} = 67 + 5 = 72$ > ранее рассчитанного $П_{12} = 44$, принимаем $П_{12} = 67$.

Для вершин, связанных с событием 11:

$П_{13} = П_{11} + t_{1113} = 74 + 8 = 82$ > ранее рассчитанного $П_{13} = 79$, принимаем $П_{13} = 82$.

$П_{14} = П_{10} + t_{1114} = 74 + 10 = 84 > 0$, принимаем $П_{14} = 84$.

Для вершин, связанных с событием 12:

$П_{15} = П_{12} + t_{1215} = 72 + 4 = 76 > 0$, принимаем $П_{15} = 76$.

Для вершин, связанных с событием 13:

$П_{14} = П_{13} + t_{1314} = 82 + 8 = 90$ > ранее рассчитанного $П_{14} = 84$, принимаем $П_{14} = 90$.

$П_{16} = П_{13} + t_{1316} = 82 + 6 = 88 > 0$, принимаем $П_{16} = 88$.

$П_{15} = П_{13} + t_{1315} = 82 + 7 = 89 >$ ранее рассчитанного $П_{15} = 76$, принимаем $П_{15} = 89$.

Для вершин, связанных с событием 14:

$П_{16} = П_{14} + t_{1416} = 90 + 5 = 95 >$ ранее рассчитанного $П_{16} = 88$, принимаем $П_{16} = 95$.

Для вершины 16, связанной с событием 15:

$П_{16} = П_{15} + t_{1516} = 89 + 7 = 96 >$ ранее рассчитанного $П_{16} = 95$, принимаем $П_{16} = 96$.

Поставим значения потенциалов над соответствующими вершинами и рассмотрим их в обратном порядке. Работы $(i – j)$, для которых $П_j–П_i=t_{ij}$ включаются в критический путь. На схеме (рис. 21) критический путь выделен жирной линией. Для него:

$П_{16} – П_{15} = 96 – 89 = 7 = t_{1516}$,
$П_{15} – П_{13} = 89 – 82 = 7 = t_{1315}$,
$П_{13} – П_{11} = 82 – 74 = 8 = t_{1113}$,
$П_{11} – П_{10} = 74 – 67 = 7 = t_{1011}$,
$П_{10} – П_9 = 67 – 53 = 14 = t_{910}$,
$П_9 – П_7 = 53 – 44 = 9 = t_{79}$,
$П_7 – П_4 = 44 – 32 = 12 = t_{47}$,
$П_4 – П_3 = 32 – 16 = 16 = t_{34}$,
$П_3 – П_1 = 16 – 9 = 7 = t_{13}$.

4.3.4 Поиск кратчайшего пути алгоритмом Дейкстры

Алгоритм Дейкстры решает задачу о кратчайших путях из одной вершины до других вершин графа.

Каждой вершине графа сопоставляется метка - минимальное известное расстояние от этой вершины до первоначальной вершины. Алгоритм работает пошагово - на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены.

Метка первоначальной вершины полагается равной нулю, метки остальных вершин - бесконечности. Это отражает то, что расстояния от начальной вершины до других вершин пока неизвестны. Все вершины графа помечаются как непосещенные.

Если все вершины посещены, алгоритм завершается. В противном случае из еще не посещенных вершин выбирается вершина, имеющая минимальную метку. Рассматриваются всевозможные маршруты, в которых вершина является предпоследним пунктом. Вершины, соединенные с вершиной ребрами, называются соседями этой вершины. Для каждого соседа рассматривается новая длина пути, равная сумме текущей метки первоначальной вершины и длины ребра, соединяющего эту вершину с соседом. Если полученная длина меньше метки соседа, проводится замена метки этой длиной. Рассмотрев всех соседей, помечается вершина как посещенная и шаг повторяется.

Пусть требуется найти расстояния от 1-й вершины до всех остальных (рис. 22).

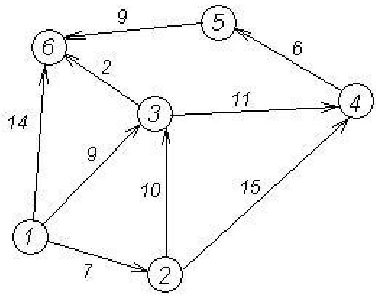


Рис. 22 – Граф транспортной задачи

Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (ребра графа). В кружках обозначены номера вершин, над ребрами обозначена их «цена» — длина пути. Рядом с каждой вершиной обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.

Рассмотрим шаг алгоритма Дейкстры для данного примера. Присвоим вершинам метки: 1 – 0, остальным вершинам - ∞ (рис. 22).

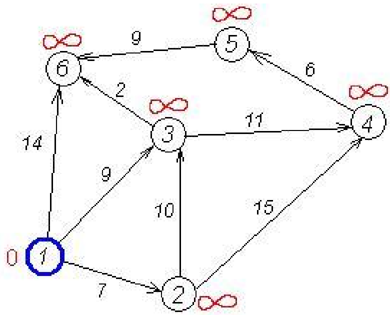


Рис. 23 – Присвоение меток

Первый шаг. Минимальную метку имеет вершина 1. Ее соседями являются вершины 2, 3 и 6.

Первый по очереди сосед вершины 1 — вершина 2, потому что длина пути до нее минимальна. Длина пути в нее через вершину 1 равна кратчайшему расстоянию до вершины 1 + длина ребра, идущего из 1 в 2, то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки вершины 2, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7 (рис. 24).

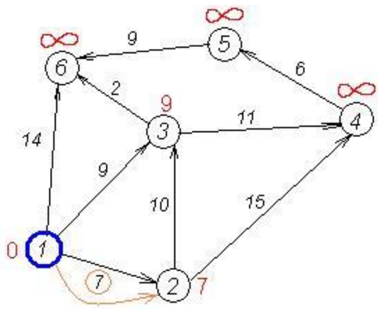
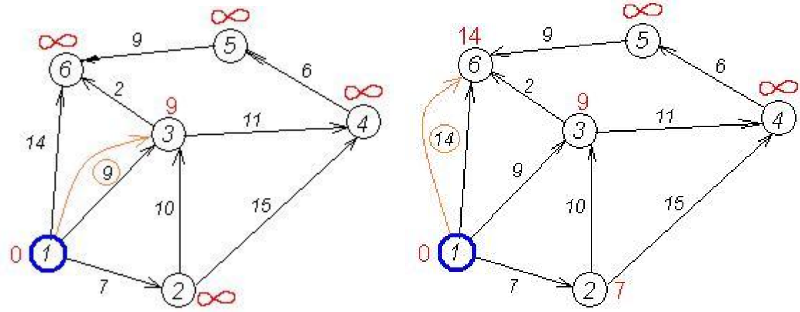


Рис. 24 – Длина пути от вершины 1 до вершины 2

Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й (рис. 25, *а*) и 6-й рис. 25, *б*).



а) б)

Рис. 25 – Длина пути от вершины 1 до вершины 3 (*а*) и вершины 6 (*б*)

Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит (то, что это действительно так, впервые доказал Дейкстра). Вычеркиваем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена (рис. 26). Вершинам 2 и 6 присваиваем метки, равные расстоянию до них от вершины 1 (соответственно 7 и 14).

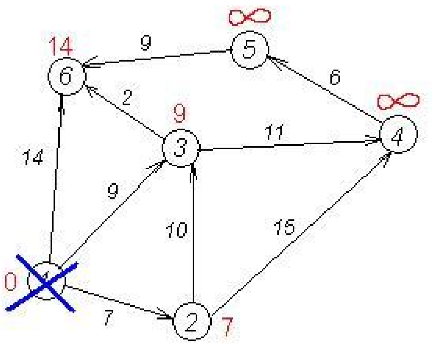
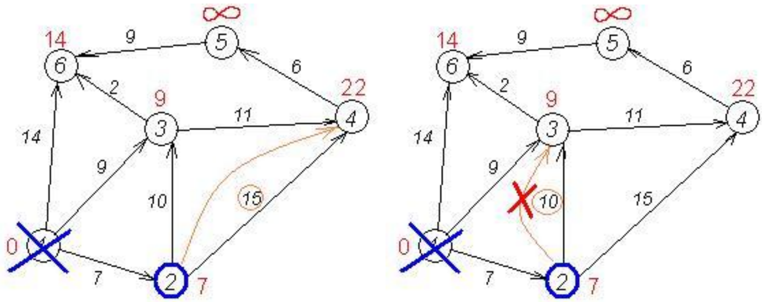


Рис. 26 – Вершина 1 посещена, вершинам 2 и 6 присвоены метки

Второй шаг. Шаг алгоритма повторяется. Находим «ближайшую» из не посещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7.



а) *б)*

Рис. 27 – Длина пути от вершины 2 до вершины 3 (*а*) и вершины 4 (*б*)

Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются 1, 3, 4.

Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем.

Следующий сосед вершины 2 — вершины 4 и 3. Если идти к ним через 2-ю вершину, то длина такого пути будет: кратчайшее расстояние до 2 + расстояние между вершинами 2 и 4 = 7 + 15 = 22. Поскольку $22 < \infty$, устанавливаем метку вершины 4 равной 22 (рис. 27, *а*).

Ещё один сосед вершины 2 — вершина 3. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет = 7 + 10 = 17. Но текущая метка третьей вершины равна 9<17, поэтому метка не меняется (рис. 27, *б*).

Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем ее как посещенную.

Третий шаг. Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3.

Дальнейшие шаги. Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин (Это будут по порядку 6, 4 и 5).

Завершение выполнения алгоритма. Алгоритм заканчивает работу, когда вычеркнуты все вершины. Результат его работы: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й — 20, до 6-й — 11.

Алгоритм Дейкстры всякий раз выбирает для обработки вершины с наименьшей оценкой кратчайшего пути.

4.3.5 Поиск кратчайшего пути алгоритмом Флойда

Алгоритм Флойда является более общим по сравнению с алгоритмом Дейкстры, так как находит кратчайшие расстояние между любыми двумя вершинами графа. В алгоритме граф представлен в виде квадратной матрицы с n строками и n столбцами.

Основная идея алгоритма Флойда заключается в следующем. Пусть есть три узла i, j и k и заданы расстояния между ними (рис. 28). Если выполняется неравенство $d_{ij} + d_{jk} < d_{ik}$, то целесообразно заменить путь $i \to k$ путем $i \to j \to k$. Такая замена (далее ее будем условно называть треугольным оператором) выполняется систематически в процессе выполнения алгоритма Флойда.

Найдем для сети, показанной на рисунке 29, кратчайшие пути между любыми двумя узлами. Расстояние между узлами этой сети проставлены на рисунке возле соответствующих ребер.

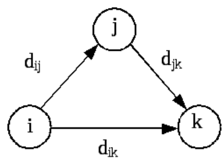


Рис. 28 – Треугольный оператор

Ребро *(3, 5)* ориентированно, поэтому не допускается движение от узла *5* к узлу *3*. Все остальные ребра допускают движение в обе стороны:

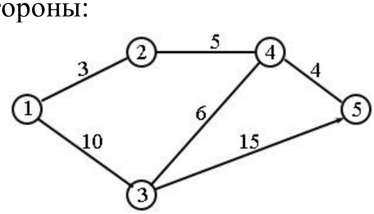


Рис. 29 – Пример транспортной задачи

Шаг 0. Начальные матрицы D_0 и S_0 строятся непосредственно по заданной схеме сети. Матрица D_0 симметрична, за исключением пары элементов d_{35} и d_{53}, где d_{53} равно бесконечности, поскольку невозможен переход от узла 5 к узлу 3:

D_0

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	∞	5	∞
3	10	∞	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_0

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	3	4	5
3	1	2	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Рис. 30 – Начальное состояние

Шаг 1. В матрице D_0 выделены ведущие строка и столбец $(k = 1)$. Двойной рамкой представлены элементы d_{23} и d_{32}, единственные среди элементов матрицы D_0, значения которых можно улучшить с помощью треугольного оператора. Таким образом, чтобы на основе матриц D_0 и S_0 получить матрицы D_1 и S_1, выполняем следующие действия.

- Заменяем d_{23} на $d_{21} + d_{13} = 3 + 10 = 13$ и устанавливаем $s_{23} = 1$.
- Заменяем d_{32} на $d_{31} + d_{12} = 10 + 3 = 13$ и устанавливаем $s_{32} = 1$.

Матрицы D_1 и S_1 имеют следующий вид:

D_1

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	**13**	5	∞
3	10	**13**	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_1

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	**1**	4	5
3	1	**1**	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Рис. 31 – Матрицы D_1 и S_1

Шаг 2. Полагаем $k = 2$; в матрице D_1 выделены ведущие строка и столбец. Треугольный оператор применяется к элементам матрицы D_1 и S_1, выделенным двойной рамкой. В результате получаем матрицы D_2 и S_2:

D2

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S2

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Рис. 32 – Матрицы D_2 и S_2

Шаг 3. Полагаем $k = 3$; в матрице D_2 выделены ведущие строка и столбец. Треугольный оператор применяется к элементам матрицы D_2 и S_2, выделенным двойной рамкой. В результате получаем матрицы D_3 и S_3:

D3

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	25
2	3	—	13	5	28
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S3

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	3
2	1	—	1	4	3
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Рис. 33 – Матрицы D_3 и S_3

Шаг 4. Полагаем $k = 4$, ведущие строка и столбец в матрице D_3 выделены. Получаем новые матрицы D_4 и S_4:

D_4

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	**12**
2	3	—	**11**	5	**9**
3	10	**11**	—	6	**10**
4	8	5	6	—	4
5	**12**	**9**	**10**	4	—

S_4

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	**4**
2	1	—	**4**	4	**4**
3	1	**4**	—	4	**4**
4	2	2	3	—	5
5	**4**	**4**	**4**	4	—

Рис. 34 – Матрицы D_4 и S_4

<u>*Шаг 5.*</u> Полагаем $k = 5$, ведущие строка и столбец в матрице D_4 выделены. Никаких действий на этом шаге не выполняем; вычисления закончены.

Конечные матрицы D_4 и S_4 содержат всю информацию, необходимую для определения кратчайших путей между любыми двумя узлами сети. Например, кратчайшее расстояние между узлами *1* и *5* равно $d_{15} = 12$.

Для нахождения соответствующих маршрутов напомним, что сегмент маршрута (i, j) состоит из ребра (i, j) только в том случае, когда $s_{ij} = j$. В противном случае узлы i и j связаны, по крайней мере, через один промежуточный узел. Например, поскольку $s_{15} = 4$ и $s_{45} = 5$, сначала кратчайший маршрут между узлами *1* и *5* будет иметь вид $1 \to 4 \to 5$. Но так как s_{14} не равно *4*, узлы *1* и *4* в определенном пути не связаны одним ребром (но в исходной сети они могут быть связаны непосредственно). Далее следует определить промежуточный узел (узлы) между первым и четвертым узлами. Имеем $s_{14} = 2$ и $s_{24} = 4$, поэтому маршрут $1 \to 4$ заменяем $1 \to 2 \to 4$. Поскольку $s_{12} = 2$ и $s_{24} = 4$, других промежуточных узлов нет. Комбинируя определенные сегменты маршрута, окончательно получаем следующий кратчайший путь от узла *1* до узла *5*: $1 \to 2 \to 4 \to 5$. Длина этого пути равна *12* километрам.

Контрольные вопросы:

1. Этапы решения задач методом потенциалов.

2. Что положено в основу метода потенциалов?

3. Из чего вытекает критерий оптимальности допустимого плана транспортной задачи?

4. Какие условия должны быть соблюдены при построении цепочки преобразования плана в методе потенциалов?

5. Что следует делать при возникновении ситуации вырожденности текущего плана в транспортной задаче?

6. Приведите формулировку линейной сетевой задачи.

7. Покажите, что транспортная задача в матричной постановке является частным случаем транспортной задачи в сетевой постановке.

8. Дайте определение понятия «остов сети». Какая связь существует между остовом сети и базисом транспортной задачи в сетевой постановке?

9. В чем состоит задача о кратчайшем пути?

IV ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

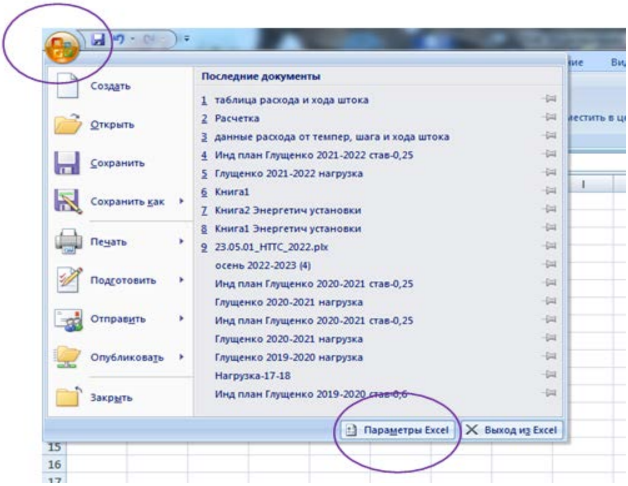
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
Решение транспортной задачи

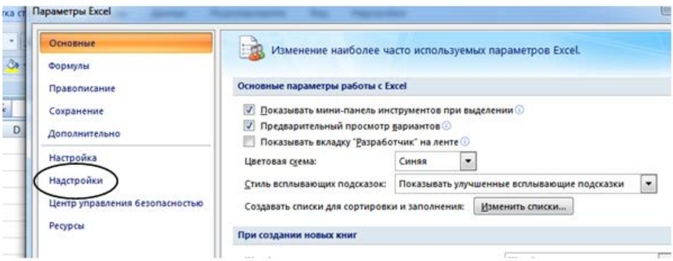
Цель занятия: освоение методов решение транспортной задачи.

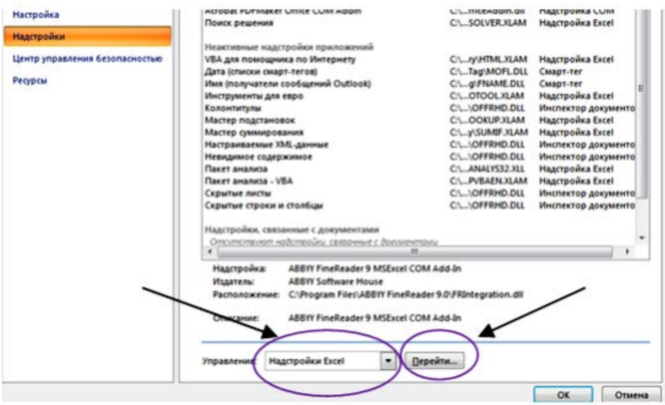
Задание: провести расчет транспортной задачи методами «Северо-западного угла», «Минимальной стоимости», «Двойного предпочтения», метод Фогеля, венгерским методом и в программе Excel. Оценить эффективность различных методов по полученным расчетным данным.

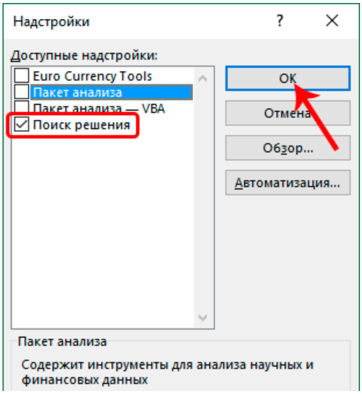
Методика решения транспортной задачи в Excel

Открыть программу Excel. Нажать кнопку «Офис» («Файл»), затем выбрать «Параметры Excel». В открывшемся окне выбираем кнопку «Надстройки». В появившемся окне внизу в ячейке «Управление» выбираем «Надстройки Excel» и затем нажимаем «Перейти». В открывшемся окне ставим галочку напротив надстройки «Поиск решения» и жмем OK.


Последние документы
Создать
Открыть
Сохранить
Сохранить как
Печать
Подготовить
Отправить
Опубликовать
Закрыть
1 таблица расхода и хода штока
2 Расчетка
3 данные расхода от темпер, шага и хода штока
4 Инд план Глущенко 2021-2022 став-0,25
5 Глущенко 2021-2022 нагрузка
6 Книга1
7 Книга2 Энергетич установки
8 Книга1 Энергетич установки
9 23.05.01_НТТС_2022.plx
осень 2022-2023 (4)
Инд план Глущенко 2020-2021 став-0,25
Глущенко 2020-2021 нагрузка
Инд план Глущенко 2020-2021 став-0,25
Глущенко 2020-2021 нагрузка
Глущенко 2019-2020 нагрузка
Нагрузка-17-18
Инд план Глущенко 2019-2020 став-0,6
Параметры Excel
Выход из Excel

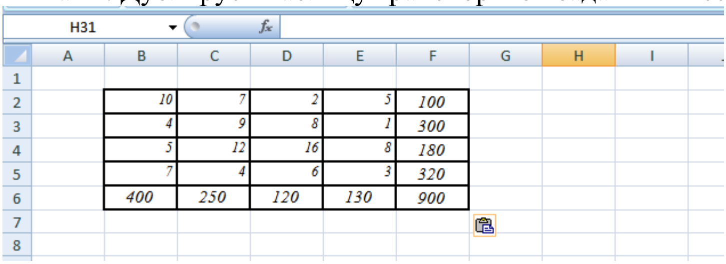

Параметры Excel
Основные
Формулы
Правописание
Сохранение
Дополнительно
Настройка
Надстройки
Центр управления безопасностью
Ресурсы
Изменение наиболее часто используемых параметров Excel.
Основные параметры работы с Excel
Показывать мини-панель инструментов при выделении
Предварительный просмотр вариантов
Показывать вкладку "Разработчик" на ленте
Цветовая схема: Синяя
Стиль всплывающих подсказок: Показывать улучшенные всплывающие подсказки
Создавать списки для сортировки и заполнения: Изменить списки...
При создании новых книг


Настройка
Надстройки
Центр управления безопасностью
Ресурсы
Поиск решения C:\...SOLVER.XLAM Надстройка Excel
Неактивные надстройки приложений
VBA для помощника по Интернету C:\...y\HTML.XLAM Надстройка Excel
Дата (списки смарт-тегов) C:\...Tag\MOFL.DLL Смарт-тег
Имя (получатели сообщений Outlook) C:\...g\FNAME.DLL Смарт-тег
Инструменты для евро C:\...OTOOL.XLAM Надстройка Excel
Колонтитулы C:\...\OFFRHD.DLL Инспектор документов
Мастер подстановок C:\...OOKUP.XLAM Надстройка Excel
Мастер суммирования C:\...y\SUMIF.XLAM Надстройка Excel
Настраиваемые XML-данные C:\...\OFFRHD.DLL Инспектор документов
Невидимое содержимое C:\...\OFFRHD.DLL Инспектор документов
Пакет анализа C:\...ANALYS32.XLL Надстройка Excel
Пакет анализа - VBA C:\...PVBAEN.XLAM Надстройка Excel
Скрытые листы C:\...\OFFRHD.DLL Инспектор документов
Скрытые строки и столбцы C:\...\OFFRHD.DLL Инспектор документов
Надстройки, связанные с документами
Надстройка: ABBYY FineReader 9 MSExcel COM Add-In
Издатель: ABBYY Software House
Расположение: C:\Program Files\ABBYY FineReader 9.0\FRIntegration.dll
ABBYY FineReader 9 MSExcel COM Add-In
Управление: Надстройки Excel
Перейти...
ОК
Отмена



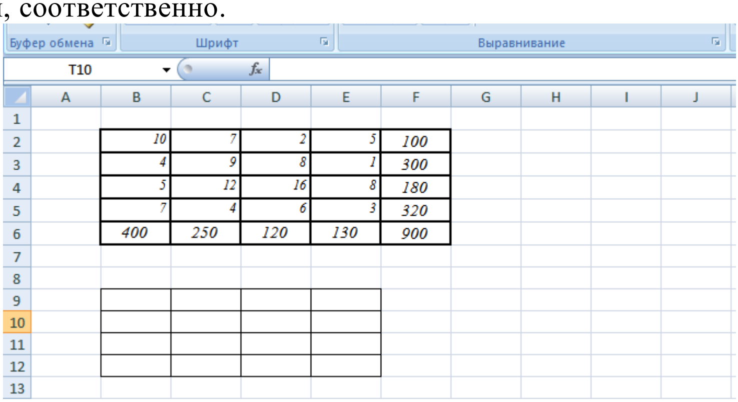
Поиск решения активирован. Решение рассмотрим на примере транспортной задачи таблицы 2.

Шаг 1. Дублируем таблицу транспортной задачи в Excel.



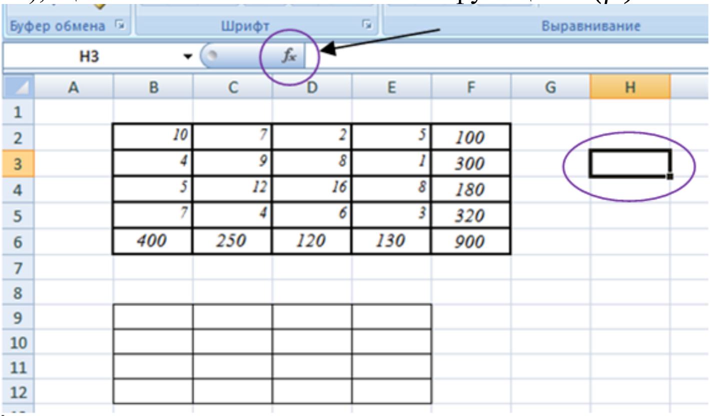
10	7	2	5	100
4	9	8	1	300
5	12	16	8	180
7	4	6	3	320
400	250	120	130	900

Шаг 2. Ниже строим таблицу, количество строк и столбцов в которой соответствует числу поставщиков и потребителей, соответственно.

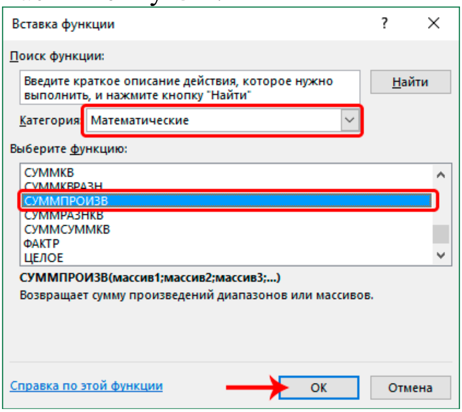


10	7	2	5	100
4	9	8	1	300
5	12	16	8	180
7	4	6	3	320
400	250	120	130	900

Шаг 3. Перейдя в любую свободную ячейку (например, H3), щелкаем по кнопке «Вставить функцию» *(fx)*.



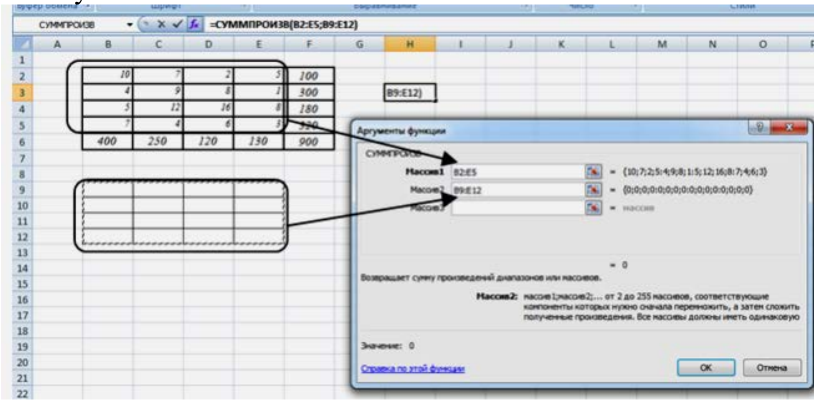
В открывшемся окне выбираем категорию «Математические», в списке операторов отмечаем «СУММПРОИЗВ», после чего нажимаем кнопку OK.



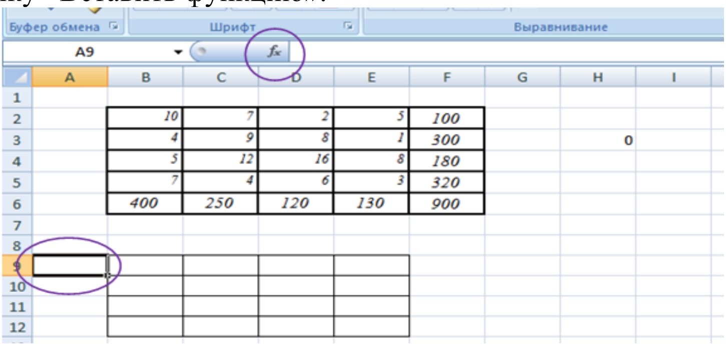
На экране отобразится окно, в котором нужно заполнить аргументы:

- в поле для ввода значения напротив первого аргумента «Массив1» указываем координаты диапазона ячеек матрицы затрат (B2, E5). Сделать это можно, используя клавиши на клавиатуре, или выделив нужную область в самой таблице с помощью зажатой левой кнопки мыши.

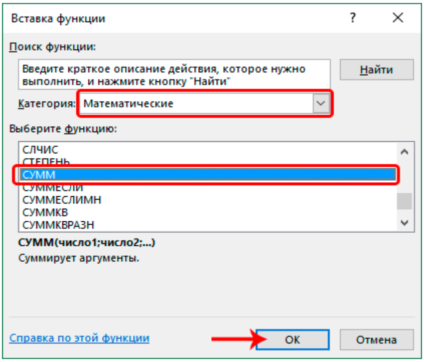
- в качестве значения второго аргумента «Массив2» указываем диапазон ячеек новой таблицы (B9, E12). Затем нажать кнопку OK.



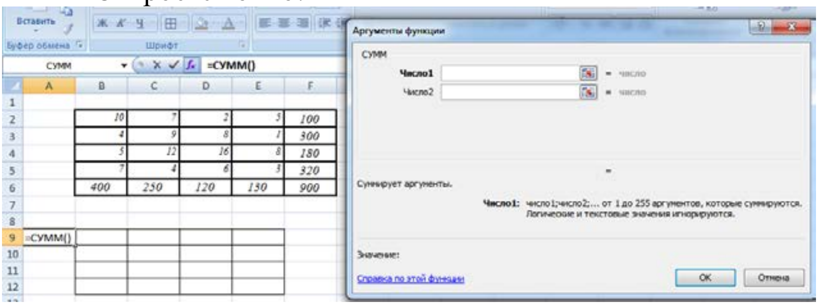
Встаем курсором в ячейку, расположенную слева от самого верхнего левого элемента новой таблицы, и нажимаем кнопку «Вставить функцию».



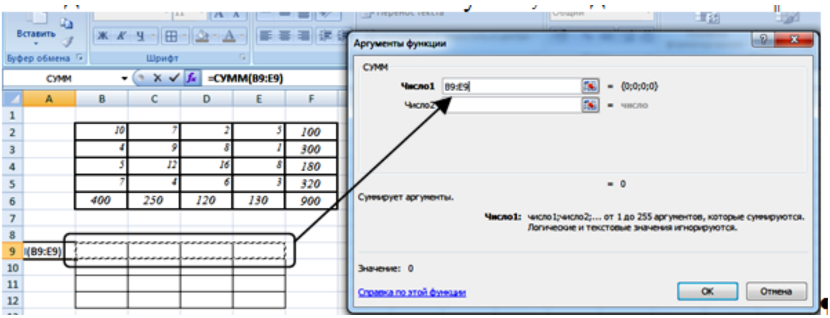
В открывшемся окне выбираем категорию «Математические», в списке операторов отмечаем «СУММ», после чего нажимаем кнопку OK.



Откроется окно:

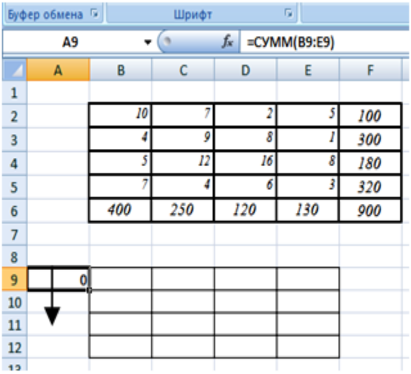


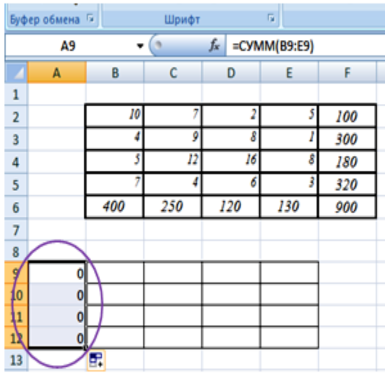
В качестве значения аргумента «Число1» указываем верхнюю строку созданной для расчетов таблицы (целиком) – вручную или методом выделения на листе. Нажимаем кнопку ОК.



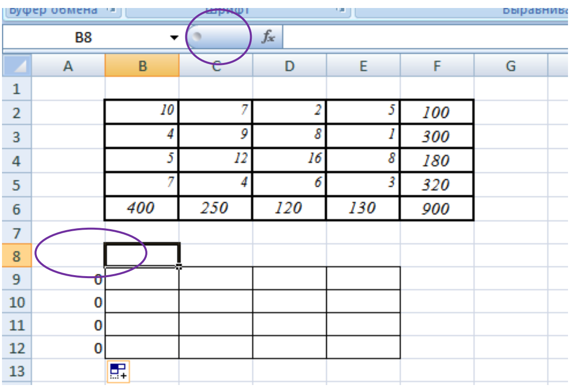
В ячейке с функцией появится результат, равный нулю. Наводим указатель мыши на ее правый нижний угол, и когда появится «Маркер заполнения» в виде черного плюсика, зажав левую кнопку мыши, тянем его до конца таблицы.

Это позволит скопировать формулу и получить аналогичные результаты для остальных строк.

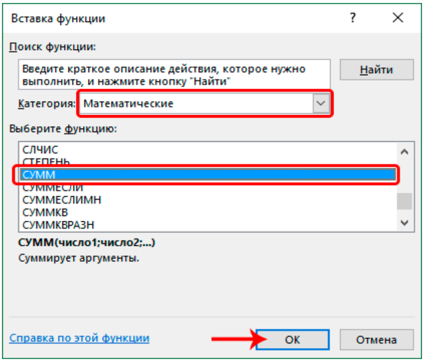




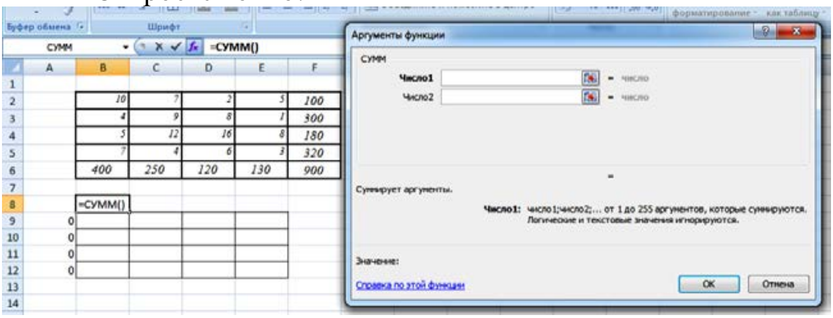
Встаем курсором в ячейку, расположенную сверху от самого верхнего левого элемента новой таблицы, и нажимаем кнопку «Вставить функцию».



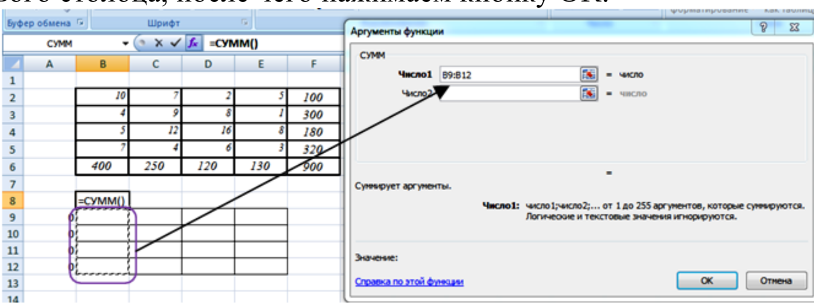
В открывшемся окне выбираем категорию «Математические», в списке операторов отмечаем «СУММ», после чего нажимаем кнопку ОК.



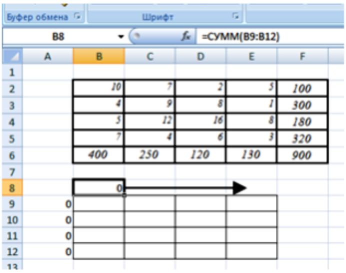
Откроется окно:

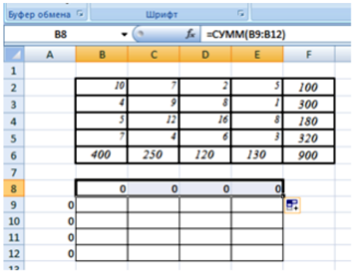


В качестве значении аргумента «Число1» указываем (вручную или с помощью выделения на листе) все ячейки первого столбца, после чего нажимаем кнопку ОК.

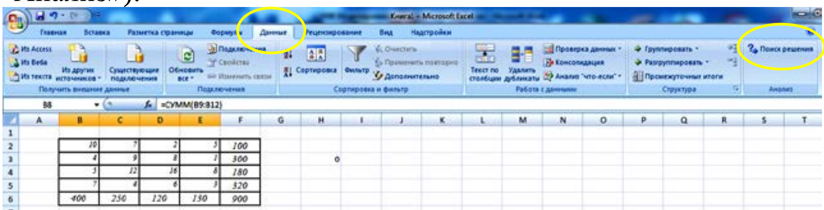


С помощью «Маркера заполнения» выполняем копирование формулы на оставшиеся ячейки строки.





Переключаемся во вкладку «Данные», где жмем по кнопке функции «Поиск решения» (группа инструментов «Анализ»).

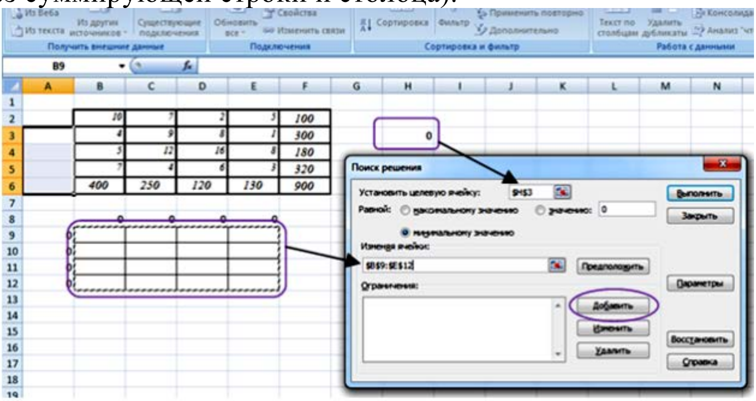


Откроется окно с параметрами функции:

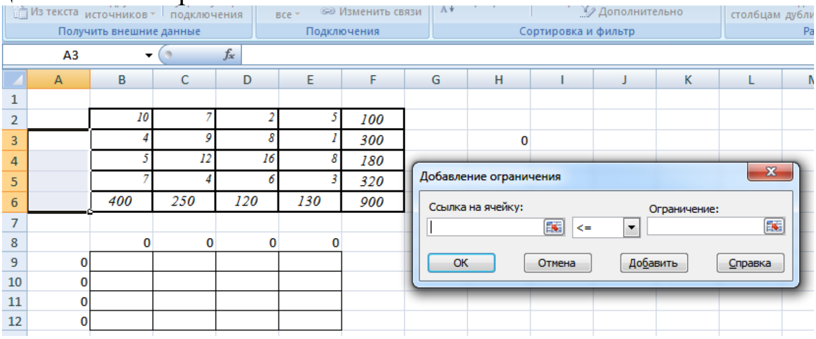
- в качестве значения параметра «Установить целевую ячейку» указываем координаты ячейки, в которую ранее была вставлена функция «СУММПРОИЗВ» (H3).

- для параметра «Равной» выбираем вариант – «Минимум».

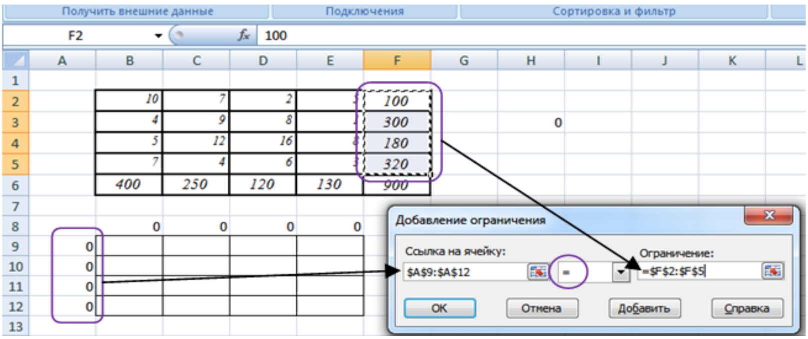
- в области для ввода значений напротив параметра «Изменяя ячейки» указываем диапазон ячеек новой таблицы (без суммирующей строки и столбца).



- нажимаем кнопку «Добавить» в блоке «Ограничения», откроется окно, в котором добавляются ограничения – сумма значений первых столбцов исходной и созданной таблицы должны быть равны:



- в поле «Ссылка на ячейки» указывается нужный диапазон данных в таблице для расчетов.

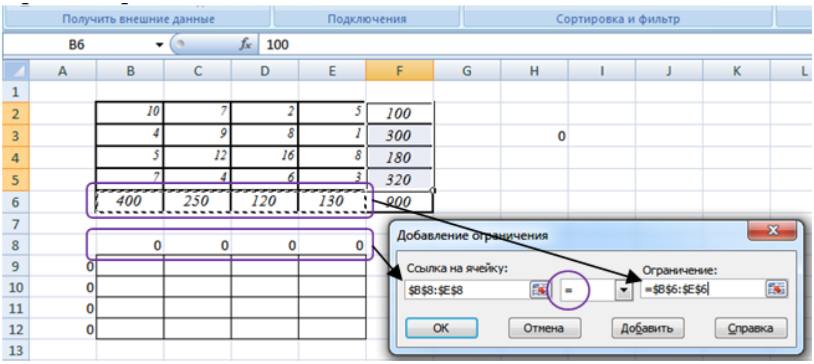


- затем выбираем знак «равно».

- в качестве значения для параметра «Ограничение» указываем координаты аналогичного столбца в исходной таблице.

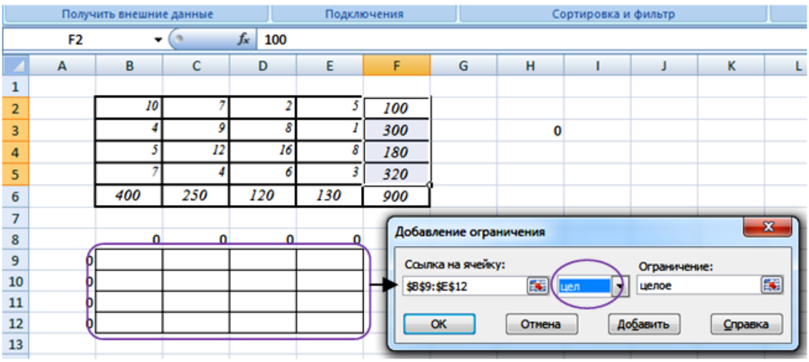
- нажимаем ОК.

Таким же способом добавляем условие по равенству сумм верхних строк таблиц.

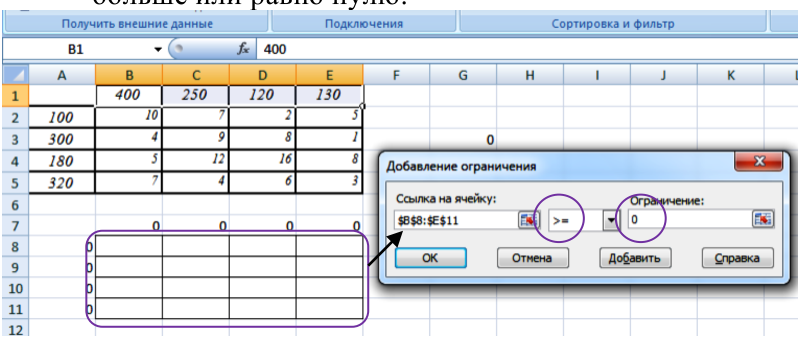


Также добавляем следующие условия касательно суммы ячеек в таблице для расчетов (диапазон совпадает с тем, который мы указали для параметра «Изменяя ячейки переменных»):

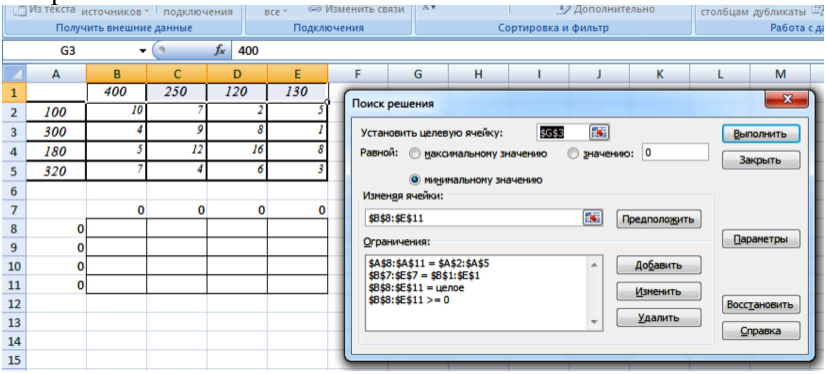
- целое число:



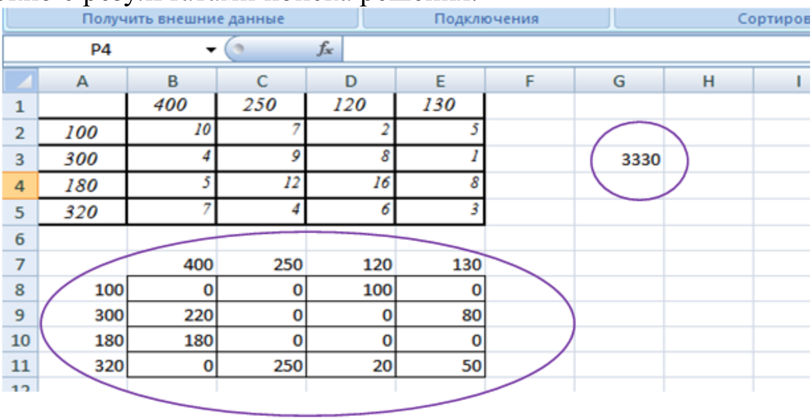
- больше или равно нулю:



В итоге получаем следующий список условий в поле «Ограничения».



В параметрах проверяем, чтобы обязательно была поставлена галочка напротив опции «неотрицательные значения», затем нажимаем «Выполнить», после чего отобразится окно с результатами поиска решения.



Получен опорный план и минимальная стоимость транспортного процесса (ячейка G3) 3330 тыс. руб.

Варианты заданий

Вариант 1

a_i \ b_j	60	40	40	30	10
60	5	2	0	7	3
40	6	1	4	2	8
70	7	4	3	6	1
30	3	5	6	4	2

Вариант 2

a_i \ b_j	120	180	140	160	100
200	3	2	1	1	2
400	2	1	3	2	3
100	3	3	2	1	1
100	4	3	2	1	5

Вариант 3

a_i \ b_j	60	60	140	140	80
200	5	4	3	4	5
140	3	2	1	3	2
60	2	3	2	3	1
100	4	5	2	3	4

Вариант 4

a_i \ b_j	100	100	200	100	60
200	3	2	1	1	2
100	2	1	3	2	3
200	3	3	2	1	1
100	4	3	2	1	5

Вариант 5

a_i \ b_j	100	120	180	60	40
200	3	1	2	3	4
200	1	4	3	1	2
50	2	5	1	2	4
100	1	3	6	3	1

Вариант 6

a_i \ b_j	100	120	160	200	200
80	3	2	1	2	3
400	1	3	1	1	1
100	4	2	3	3	1
80	2	1	4	1	5

Вариант 7

a_i \ b_j	50	40	10	15	25	30
70	1	3	1	5	7	4
50	8	4	8	4	3	6
20	3	5	5	6	2	4
30	5	1	6	3	6	2

Вариант 8

a_i \ b_j	80	60	120	140	80	20
100	4	3	5	1	4	3
200	1	4	5	2	3	1
100	2	1	3	3	1	3
50	5	4	2	2	4	2

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
Задача поиска кратчайшего пути

Пусть некоторая сеть задана в виде орграфа (рис. 1), т. е. каждой ориентированной дуге соответствует определенное расстояние. Необходимо найти кратчайший путь из i-го *узла сети* в ее заданный j-й узел. К этой задаче, известной в *исследовании операций* как ***задача выбора кратчайшего пути.***

Для сети, представленной на рис. 1, необходимо найти кратчайший путь от узла с номером 1 (источник) до узла с номером 8 (сток). Установим связь этой задачи с *классической транспортной задачей*.

Рассмотрим транспортную задачу с промежуточными пунктами, сеть которой представлена на рисунке 35.

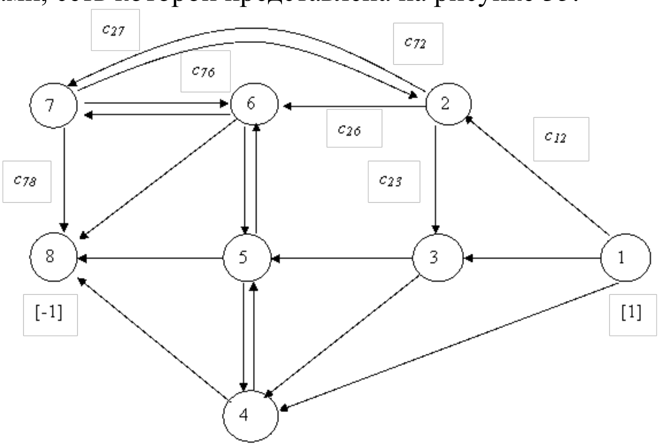


Рис. 35 – Транспортная задача

При этом предположим, что:

а) в узле с номером 1 имеется избыточная единица товара;

б) в узле с номером 8 имеется недостаток единицы товара;

в) узлы с номерами 2,...,7 являются промежуточными пунктами с нулевыми *чистыми запасами* (потребность в дополнительных поставках товара равна нулю).

Необходимо разработать план перевозок товара между узлами сети (складами), который при минимальных транспортных затратах позволит на каждом складе поддерживать нулевой чистый запас товара.

Считаем, что каждой ориентированной дуге сети соответствует переменное модели x_{ij}, представляющее собой количество товара, которое должно быть отправлено с i-го склада на j-й. Для каждого k-го промежуточного пункта вводим переменное x_{kk} с соответствующим ему коэффициентом $c_{kk} = 0$ в целевой функции, а величину чистого зал! обозначаем через T_k. Если множество пар индексов (i, j), соответствующих ориентированным дугам сети (рис. 35), обозначить через J, то рассматриваемую задачу можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in J} c_{\bar{i}} x_{\bar{j}} \to min; \\ \sum\limits_{(i,j)\in J} x_{\overline{ij}} - \sum\limits_{(i,j)\in J} x_{\overline{ak}} = T_k; \\ T_1 = 1, \quad T_m = -1, \quad T_k = 0, \quad k = 2,...,i; \\ x_{\overline{ij}} \geq 0, \quad (i,j) \in J. \end{cases}$$

Сформулированная выше задача о нахождении кратчайшего пути эквивалентна классической транспортной задаче.

Решение задачи о нахождении кратчайшего пути в Excel

Рассмотрим методику решения в Excel задачи о нахождении кратчайшего пути.

Задача. Задача выбора кратчайшего пути задана сетью, изображенной на рисунке 35. Найдите кратчайший путь от узла с номером 1 до узла с номеров 8, если c_{12}=1 км, c_{13}=4 км, c_{14}=6 км, c_{23}=3 км, c_{26}=5 км, c_{27}=1 км, c_{34}=3 км, c_{35}=5 км, c_{45}=1 км, c_{48}=4 км, c_{54}=1 км, c_{56}=1 км, c_{58}=2 км, c_{65}=1 км, c_{67}=3 км, c_{68}=4 км, c_{72}=1 км, c_{76}=3 км, c_{78}=7 км.

На рисунках 36 и 37 представлены таблица кратчайших расстояний и план перевозок товара по кратчайшему пути, сформированные на рабочем листе Excel. В таблице кратчайших расстояний видно, что если между отдельными складами отсутствует возможность перевозки товара, тогда в соответствующие ячейки таблицы (выделенные темным фоном) заносится любое большое число (в данном случае 100).

Не сложно заметить, что данная задача решается аналогично решению транспортной задачи с промежуточными пунктами. В целевую ячейку, в данном случае C24, необходимо занести формулу: =СУММПРОИЗВ (C4:I10;C16:I22).

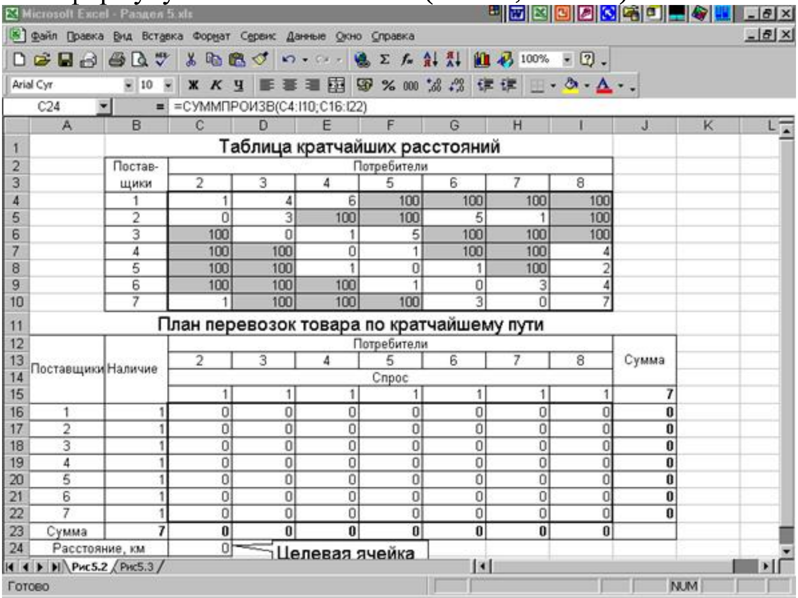


Таблица кратчайших расстояний

Постав-щики	Потребители 2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	6	100	100	100	100
2	0	3	100	100	5	1	100
3	100	0	1	5	100	100	100
4	100	100	0	1	100	100	4
5	100	100	1	0	1	100	2
6	100	100	100	1	0	3	4
7	1	100	100	100	3	0	7

План перевозок товара по кратчайшему пути

Поставщики	Наличие	Потребители 2	3	4	5	6	7	8	Сумма
	Спрос	1	1	1	1	1	1	1	7
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Сумма	7	0	0	0	0	0	0	0	
Расстояние, км		0							

Рис.36 – Таблица кратчайших расстояний

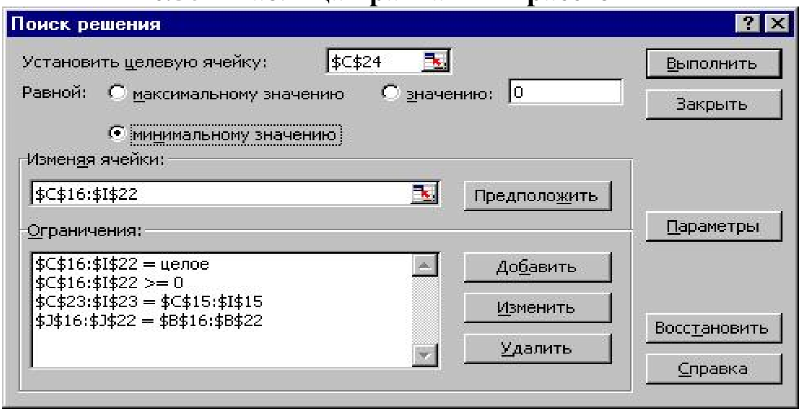


Рис. 37 - План перевозок товара по кратчайшему пути

Используя меню «Сервис. Поиск решения» открываем диалоговое окно «Поиск решения» (см. рис. 37), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек и ограничения и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке «Выполнить».

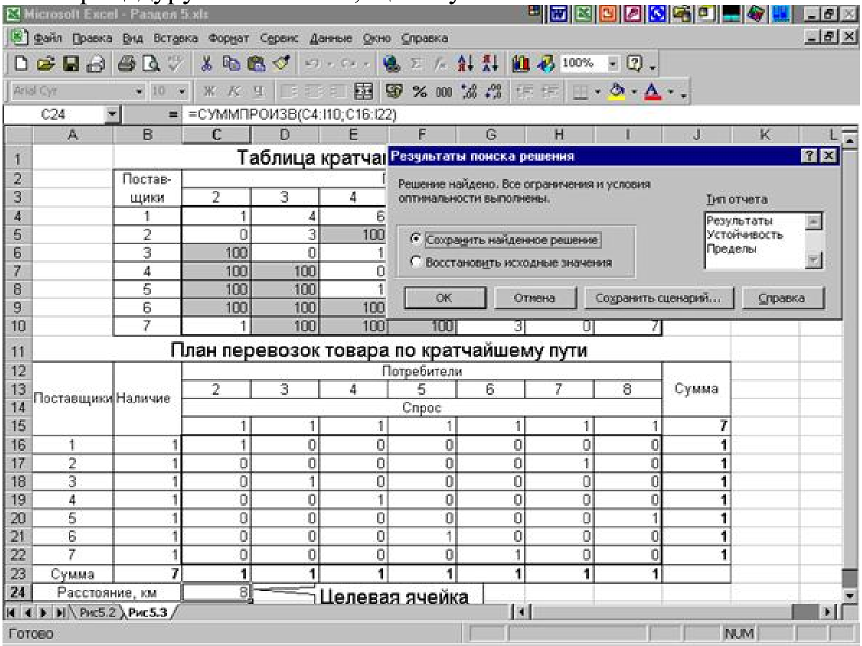
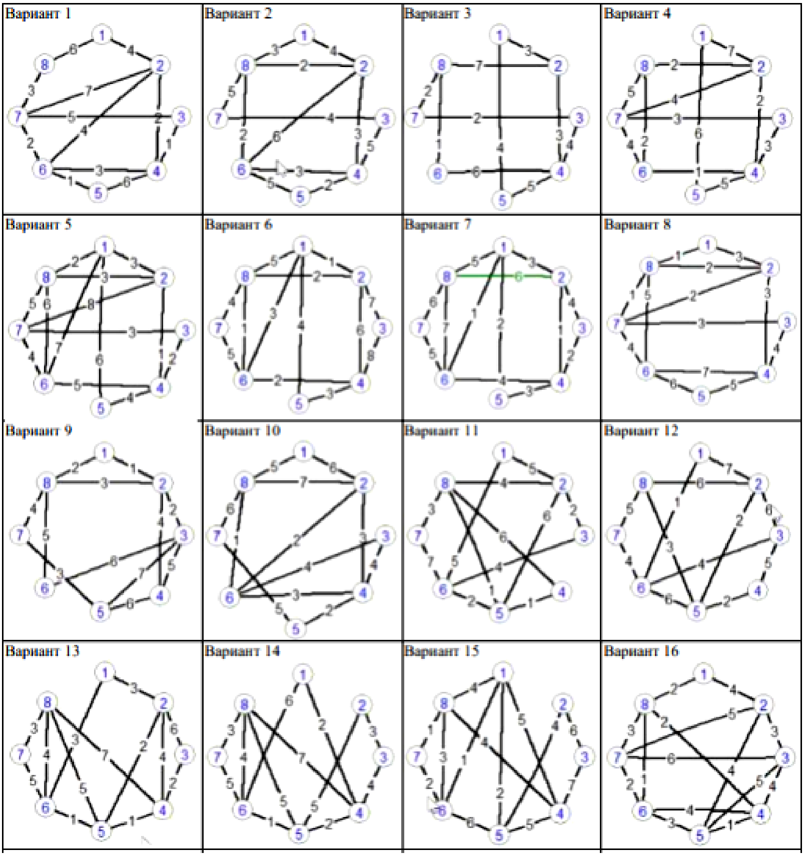


Рис. 38 - Результат решения данной задачи

Как видно, что кратчайший путь перевозки товара следующий: 1-2-7-6-5-8. Расстояние перевозки при этом составит 8 км.

Аналогично данную задачу можно решить и на максимум, т. е. найти самый длинный путь доставки товара.

Варианты заданий для расчета кратчайших расстояний


Вариант 1
Вариант 2
Вариант 3
Вариант 4
Вариант 5
Вариант 6
Вариант 7
Вариант 8
Вариант 9
Вариант 10
Вариант 11
Вариант 12
Вариант 13
Вариант 14
Вариант 15
Вариант 16

V ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА КУРСА

1. Характеристики и модели элементов и систем. Основные модели.
2. Общие понятия моделирования
3. Физическое моделирование
4. Линейная модель транспортного процесса
5. Особенности транспортной системы
6. Исследование структуры транспортных процессов, как основа для моделирования
7. Имитационное моделирование транспортных процессов

VI ПРИМЕРНЫЕ ТЕСТЫ ПО КУРСУ

1. Своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект – это:

1) аналог;
+2) модель;
3) объект-заместитель;
4) абстракция;

2. Наличие некоторых данных об объекте-оригинале необходимо на этапе:

+1) построения модели;
2) изучения модели;
3) переноса знаний с модели на объект-оригинал;
4) проверки и применения знаний;

3. При моделировании использование знаний для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им происходит на этапе:

1) построения модели;
2) изучения модели;
3) переноса знаний с модели на объект-оригинал;
+4) проверки и применения знаний;

4. При моделировании знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, ошибки в построении модели исправляются, а построенная исходная модель постепенно совершенствуется за счет:

+1) повторения цикла моделирования;

2) построения новой теории объекта;

3) использования специфических форм абстракций, аналогий, гипотез;

4) переноса знаний с модели на объект-оригинал;

5. Динамические модели выделяют в отдельный класс по следующему признаку:

1) по уровню моделируемого объекта в хозяйственной иерархии;

2) по характеру;

3) по предназначению (цели создания и применения) модели;

+4) по временному признаку;

5) по форме отображения причинно-следственных связей;

6) по способу отражения действительности.

6. При решении задачи целочисленного программирования по приведенному фрагменту симплекс-таблицы определите, для какой переменной необходимо составить дополнительное ограничение

1) X1	3) X5
+2) X2	4) X3

7. Какой из перечисленных методов применяется при решении задачи целочисленного программирования:

1) метод Эрроу-Гурвица;

2) метод искусственного базиса;

+3) метод Гомори;

4) метод минимальной стоимости

8. Процесс моделирования включает следующие элементы:

+1) субъект (исследователь), объект исследования, модель;

2) познающий субъект и познаваемый объект;

3) гипотеза, знания, модель;

4) объект-оригинал, система знаний об объекте-оригинале, субъект;

9. Если результат связан с признаками сходства оригинала и модели, то это дает основания при моделировании проводить этап:

1) построения модели;

2) изучения модели;

+3) переноса знаний с модели на объект-оригинал;

4) проверки и применения знаний;

10. Процесс моделирования является:

1) двухэтапным циклом;

2) трехэтапным циклом;

+3) четырехэтапным циклом;

4) нецикличным процессом;

11. Нормативные модели выделяют в отдельный класс по следующему признаку:

1) по уровню моделируемого объекта в хозяйственной иерархии;

2) по характеру;

+3) по предназначению (цели создания и применения) модели;

4) по временному признаку;

5) по форме отображения причинно-следственных связей;

6) по способу отражения действительности;

12. Какой вид оптимизационной задачи определяет приведенная математическая модель?

1) задача определения оптимального плана производства;

2) задача составления смеси;

3) транспортная задача;

+4) задача о назначениях

13. Может ли транспортная задача иметь несколько оптимальных решений, обеспечивающих одинаковую суммарную стоимость перевозок:

1) да;

2) нет;

+3) при определенных условиях;

14. Если в транспортной задаче (ТЗ) суммарная мощность поставщиков превосходит суммарную потребность потребителей, то такая ТЗ называется:

+1) открытой;

2) закрытой;

3) смешанной.

15. Сколько положительных перевозок должен содержать невырожденный опорный план транспортной задачи (n – количество поставщиков, m – количество потребителей)):

1) m+n+1;

2) m – n;

+3) m+n–1.

16. В задачах линейного программирования линейными должны быть:

1) целевая функция;

2) ограничения задачи;

+3) целевая функция и ограничения задачи.

17. Замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным или другим объектом (моделью) это:

1) моделирование;

2) имитирование;

3) деформирование.

18. Транспортная продукция – это:

+1) перемещение вещественного продукта других отраслей;

2) производство вещественного продукта;

3) коммерческие перевозки;

4) перевозка грузов за свой счет.

19. Автомобильные перевозки – это:
1) перемещение грузов;
2) перемещение пассажиров;
+3) перемещение грузов и пассажиров;
4) обслуживание предприятий.

20. Процесс выполнения автомобильных перевозок состоит из:
1) планирование и организации перевозок;
2) контроля и оперативного управления;
3) учёта и анализа результатов работы;
+4) всего вышеперечисленного.

21. Какого маршрута перевозки не существует:
1) маятниковый;
2) кольцевой;
3) сборочно–развозной;
+4) параллельный.

22. Эпюра грузовых перевозок, это:
+1) графическое изображение маршрута перевозки и количества перевезённого груза;
2) трёхмерное изображение динамики процесса перевозки;
3) графическое изображение маршрута перевозки;
4) трёхмерное изображение маршрута грузовых перевозок.

23. Разработка и внедрение транспортно-технологических схем позволяет:
1) упростить оперативное планирование и диспетчерское руководство;
2) обеспечить поточность выполнения технологических операций;
3) организовать согласованное выполнение операций сотрудниками различных организаций;
+4) применить все выше перечисленное.

VII ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

а) основная литература

1. Болотникова, О.В. Линейное программирование: транспортные и сетевые модели. Учебн. Пособие/О.В. Болотникова, Д.В. Тарасов, Р.В. тарасов. – Пенза: ПГУ, 2016. – 88 с.

2. Войтенков, С.С. Совершенствование оперативного планирования перевозок грузов помашинными отправками в городах: монография / С.С. Войтенков, Е.Е. Витвицкий. – Омск: СибАДИ, 2013. – 174 с.

3. Геронимус, Б.Л. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте / Б.Л. Геронимус, Л.В. Царфин. – М.: Транспорт, 1988. – 192 с.

4. Горев, А.Э. Грузовые автомобильные перевозки: учеб. пособие для вузов по специальности и направлению «Орг. перевозок и упр. на транспорте» / А.Э. Горев. – 5-е изд., испр. – М.: Академия, 2008. – 287 с.

5. Житков, В.А. Методы оперативного планирования грузовых автомобильных перевозок / В.А. Житков, К.В. Ким. – М.: Транспорт, 1982. – 184 с.

6. Кожин, А.П. Математические методы в планировании и управлении грузовыми автомобильными перевозками: учеб. пособие для вузов / А.П. Кожин, В.Н. Мезенцев. – М.: Транспорт, 1994. – 304 с. 98

7. Кущенко, С. В. Повышение эффективности организации движения на основе моделирования транспортных потоков: Дис. канд. техн. наук. Юго-Зап. гос. университет, Курск, 2012.

8. Просов, С.Н. Модель кольцевой маршрутизации перевозок грузов помашинными отправками: лабораторный практикум и методические указания для практических занятий по курсу «Моделирование транспортных процессов» / С.Н. Просов. – М.: МАДИ, 2016. – 48 с.

9. Салахутдинов И.Р. Организация автомобильных перевозок и безопасность движения / И.Р. Салахутдинов, А.А. Глущенко, В.А. Китаев. – Ульяновск, 2022.

б) *Дополнительная литература:*

1. Копыл, В.И. Логистика управления запасами с помощью Excel / В.И. Копыл. – Минск: Харвест, 2007. – 64 с.

2. Крайзмер, Л.П. Кибернетика: учеб. пособие для вузов /Л.П. Крайзмер. – М.: Экономика, 1977. – 279 с.

3. Кузнецов, Ю.Н. Математическое программирование: учеб. пособие для вузов / Л.П. Крайзмер, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М.: Высшая школа, 1976. – 352 с.

4. Миргородский, М.А. Выбор подвижного состава при перевозке грузов мелкими отправками в городах: монография / М.А. Миргородский, Е.Е. Витвицкий, Н.Д. Афанасьев. – Омск: Изд-во «Полиграфический центр КАН», 2012. – 142 с.

5. Модели и методы теории логистики: учеб. пособие для вузов / под ред. проф. В.С. Лукинского. – СПб.: Изд-во Питер, 2003. – 176 с.

6. Мороз, Д.Г. Декомпозиционная модель маршрутизации перевозок грузов мелкими партиями с учетом мест хранения подвижного состава / Д.Г. Мороз, С.Н. Просов // Автотранспортное предприятие. 2014. – №5. – С. 47–49.

7. Мороз, Д.Г. Методические рекомендации по планированию перевозок мелкопартионных грузов с множеством конечных пунктов маршрутной сети / Д.Г. Мороз, С.Н. Просов // Автоматизация и управление в технических системах (АУТС). – 2014. – №1.2(9). – С. 103–110.

8. Проектирование автотранспортных систем доставки грузов /В.И. Николин, С.М. Мочалин, Е.Е. Витвицкий, И.В. Николин; под общ. ред. проф. В.И. Николина. – Омск: СибАДИ, 2001. – 184 с.

9. Просветов, Г.И. Математические методы в логистике: учебно-методическое пособие / Г.И. Просветов. – М.: Изд-во РДЛ, 2006. – 272 с.

10. Просов, С.Н. Модель кольцевой маршрутизации перевозок грузов помашинными отправками: лабораторный практикум по курсу «Моделирование транспортных систем» / С.Н. Просов. – М.: МАДИ, 2004. – 40 с.

11. Савин, В.И. Перевозки грузов автомобильным транспортом: справочное пособие / В.И. Савин, Д.Л. Щур. – 3-е изд., перераб. и доп.– М.: Изд-во Дело и сервис, 2007. – 544 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Салахутдинов Ильмас Рифкатович
Глущенко Андрей Анатольевич

Моделирование транспортных процессов
Учебное пособие для студентов, обучающихся по специальности «Наземные транспортно-технологические средства» и направлению подготовки «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» - Ульяновск: УлГАУ, 2023. - 104 с.

Подписано в печать
Формат 60х90/16 Бумага офсетная №1
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 6,5
Тираж Заказ

16+

Адрес издателя: 432017, г. Ульяновск,
бульвар Новый Венец, 1