Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Технологический институт-филиал ФГБОУ ВПО
«Ульяновская ГСХА им. П.А.Столыпина»

отделение среднего профессионального образования

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов

по дисциплине ЕН.01 «Математика»

Составитель: А.В. Чихранов, преподаватель отделения среднего профессионального образования Технологического института – филиала ФГБОУ ВПО «Ульяновская ГСХА им. П.А. Столыпина»

Димитровград 2014 г.

Содержание

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Оценка эффективности внеаудиторной работы студентов может быть определена исходя из следующих критериев:

- уровня освоения учебного материала;
- умения использовать полученные теоретические знания при выполнении практических математических задач;
- сформированности общих и профессиональных компетенций;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия и внеаудиторную самостоятельную работу студентов, может проходить в письменной форме.

Самостоятельная работа по изучению дисциплины «Математика» способствует формированию у студентов, следующих компетенций:

- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Владеть информационной культурой, анализировать и оценивать информацию с использованием информационно коммуникационных технологий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ПК 1.1. Обрабатывать первичные бухгалтерские документы.
- ПК 1.2. Разрабатывать и согласовывать с руководством организации рабочий план счетов бухгалтерского учета организации.
- ПК 1.3. Проводить учет денежных средств, оформлять денежные и кассовые документы.
- ПК 1.4. Формировать бухгалтерские проводки по учету имущества организации на основе рабочего плана счетов бухгалтерского учета.
- ПК 2.1. Формировать бухгалтерские проводки по учету источников имущества организации на основе рабочего плана счетов бухгалтерского учета.
- ПК 2.2. Выполнять поручения руководства в составе комиссии по инвентаризации имущества в местах его хранения.
- ПК 2.2. Проводить подготовку к инвентаризации и проверку действительного соответствия фактических данных инвентаризации данным учета.
- ПК 2.3. Отражать в бухгалтерских проводках зачет и списание недостачи ценностей (регулировать инвентаризационные разницы) по результатам инвентаризации.
- ПК 2.4. Проводить процедуры инвентаризации финансовых обязательств организации.
- ПК 3.1. Формировать бухгалтерские проводки по начислению и перечислению налогов и сборов в бюджеты различных уровней.
- ПК 3.2. Оформлять платежные документы для перечисления налогов и сборов в бюджет, контролировать их прохождение по расчетно-кассовым банковским операциям.
- ПК 3.3. Формировать бухгалтерские проводки по начислению и перечислению страховых взносов во внебюджетные фонды.
- ПК 3.4. Оформлять платежные документы на перечисление страховых взносов во внебюджетные фонды, контролировать их прохождение по расчетно-кассовым

банковским операциям.

- ПК 4.1. Отражать нарастающим итогом на счетах бухгалтерского учета имущественное и финансовое положение организации, определять результаты хозяйственной деятельности за отчетный период.
- ПК 4.2. Составлять формы бухгалтерской отчетности в установленные законодательством сроки.
- ПК 4.3. Составлять налоговые декларации по налогам и сборам в бюджет, налоговые декларации по Единому социальному налогу (ЕСН) и формы статистической отчетности в установленные законодательством сроки.
- ПК 4.4. Проводить контроль и анализ информации об имуществе и финансовом положении организации, ее платежеспособности и доходности.

Программа самостоятельной работы студентов (СРС) по учебной дисциплине ЕН.01.МАТЕМАТИКА

Наименование разделов и тем дисциплины/модуля	**Объем, часов**	**Коды формируемых компетенций**	**Виды СРС**	**Формы/методы контроля СРС**	**Сроки выполнения**
1	2	3	4	5	6
Раздел 1. Основные понятия и методы математического анализа	**5**				
Тема 1.1. Предел функции	3	ОК 2, ОК 5, ОК 4, ОК 8, ПК 1.1	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); – подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя, оформление практических работ; – знакомство с основными понятиями и методами математического анализа	проверка работ; зачет по разделу; тестирование	сентябрь

1	2	3	4	5	6
Тема 1.2. Непрерывность функции	2	ОК 2, ОК 5, ОК 4, ОК 8, ПК 1.1	- повторить понятия приращение аргумента и приращение функции; - изучить свойства непрерывных функций; – работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); – подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя; -подготовка к тестированию по данной теме		
Раздел 2. Дифференциальное исчисление	**9**				
Тема 2.1. Производная сложной функции и высших порядков.	4	ОК 2, ОК 4, ОК 8, ПК 1.2	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); – подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя, оформление практических работ; - подготовка к тестированию по данной теме, оформление тестов; -знакомство с основными понятиями и методами дифференциального исчисления.	проверка работ; зачет по разделу; тестирование	сентябрь
Тема 2.2. Исследование функции.	5	ОК 2, ОК 4, ОК 8, ПК 1.2	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций, преподавателя оформление практических работ		октябрь

1	2	3	4	5	6
Раздел 3. Интегральное исчисление	**4**				
Тема 3.1. Методы интегрирования	4	ОК 2, ОК 4, ОК 8, ПК 1.3	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); - подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя, оформление практических работ	проверка работ; зачет по разделу; тестирование	октябрь
Раздел 4. Линейная алгебра	**2**				
Тема 4.1. Системы линейных уравнений	2	ОК 2, ОК 4, ОК 8	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); - подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя, оформление практических работ	проверка работ; зачет по разделу; тестирование	октябрь
Раздел 5. Дискретная математика	**2**				
Тема 5.1. Элементы теории графов	2	ОК 2, ОК 4, ОК 8, ПК 4.1, ПК 4.2, ПК 4.3, ПК 4.4	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); - подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя, оформление практических работ	проверка работ; зачет по разделу; тестирование	ноябрь

1	2	3	4	5	6
Раздел 6. Комплексные числа	**2**				
Тема 6.1. Комплексные числа	2	ОК 2, ОК 4, ОК 8, ПК 1.4	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); - подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя, оформление практических работ	проверка работ; зачет по разделу; тестирование	ноябрь
Раздел 7. Теория вероятностей	**2**				
Тема 7.1. Случайные величины	2	ОК 2, ОК 4, ОК 8, ПК 2.1, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); - подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя, оформление практических работ	проверка работ; зачет по разделу; тестирование	декабрь
Раздел 8. Математическая статистика	**2**				
Тема 8.1. Статистическое оценивание	2	ОК 2, ОК 4, ОК 8, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3, ПК 3.4	– работа с источниками информации (конспектом занятий, учебной и специальной литературой, материалами на электронных носителях, ресурсами Интернет); - подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций преподавателя, оформление практических работ.	проверка работ; зачет по разделу; тестирование	декабрь
ИТОГО:	**28**				

Задания для самостоятельной работы студентов

Раздел 1. Основные понятия и методы математического анализа

Тема 1.1. Предел функции

Кол-во часов: 3 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков вычисления пределов и развитие умения вычисления пределов при помощи замечательных пределов.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ, тестирование

Виды заданий:

1. Вычислить простейший предел;
2. Вычислить предел, содержащий определенность вида $\frac{c}{0}$ или $\frac{c}{\infty}$;
3. Вычислить предел, раскрыв неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$;
4. Вычислить предел с помощью замечательных пределов.

Простейшие пределы.

Образец:

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 6x^2 + x - 5) = 5\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2 + 2 - 5 = 5\cdot 8 - 6\cdot 4 - 3 = 40 - 24 - 3 = 16 - 3 = 13$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+x}{3-x^2} = \left[\frac{1+(-1)}{3-(-1)^2} = \frac{1-1}{3-1} = \frac{0}{2}\right] = 0$

Определенности вида $\frac{c}{0}$ *и* $\frac{c}{\infty}$

Образец:

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{x^2+2x} = \left[\frac{4}{0^2+2\cdot 0} = \frac{4}{0}\right] = \infty$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4}{x^2+8x} = \left[\frac{4}{\infty}\right] = 0$

Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ *и* $\frac{\infty}{\infty}$

Образец:

Пример 1.

1 способ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^3-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+\frac{4}{x})}{x^3(1-\frac{2}{x^3})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{x(1-\frac{2}{x^3})} = \left[\frac{1+\frac{4}{\infty}}{\infty(1-\frac{2}{\infty^3})} = \frac{1+0}{\infty(1-0)} = \frac{1}{\infty} = 0\right] = 0$$

2 способ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^3-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x)'}{(x^3-2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{3x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+4)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{6x}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0$$

Пример 2.

1способ:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-4x+3}=\left[\frac{\sqrt{3+1}-2}{3^2-4\cdot3+3}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1})^2-2^2}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{x+1-4}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$\left[\frac{1}{(3-1)(\sqrt{3+1}+2)}=\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}$$

2 способ:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-4x+3}=\left[\frac{\sqrt{3+1}-2}{3^2-4\cdot3+3}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)'}{(x^2-4x+3)'}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x+1}}}{2x-4}=\lim_{x\to3}\frac{1}{2\sqrt{x+1}(2x-4)}=\left[\frac{1}{2\sqrt{3+1}(2\cdot3-4)}=\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}$$

Пример 3.

1 способ: (по Лопиталю)

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}=$$

$$\left[\frac{4^2-7\cdot4+12}{4^2-5\cdot4+4}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to4}\frac{(x^2-7x+12)'}{(x^2-5x+4)'}=\lim_{x\to4}\frac{2x-7}{2x-5}=\left[\frac{2\cdot4-7}{2\cdot4-5}=\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}$$

2 способ: (путем преобразований)

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}=\left[\frac{4^2-7\cdot4+12}{4^2-5\cdot4+4}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to4}\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{x-3}{x-1}=\frac{4-3}{4-1}=\frac{1}{3}$$

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ **и** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

Образец:

Пример 1.

1 способ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{3x}=\left[\frac{\sin 5\cdot0}{3\cdot0}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x\cdot5}{3x\cdot5}=\frac{5}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot1=\frac{5}{3}$$

2 способ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\left[\frac{\sin 5\cdot 0}{3\cdot 0}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\left[\frac{5\cos(5\cdot 0)}{3}=\frac{5\cdot 1}{3}=\frac{5}{3}\right]=\frac{5}{3}$$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ **и** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Образец:

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{3}})^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+(-4x))^{\frac{1}{-4x}}\right]^{-4}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$

Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224с.
2. Майоровская С. В., Поддубная О. Н., Станишевская Л. В.. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа,2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Задание 1.
Простейшие пределы.

Упражнения:

	А	Б	В
1	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}$	$\lim\limits_{x\to 1}$ [(7x+2)(4x+3)(5x+1)]	$\lim\limits_{x\to 2}(x-1)(x^2+3)(x+7)$
2	$\lim\limits_{x\to 1}$ (x^2 - 4x +5)	$\lim\limits_{x\to 2}$ (5x^3 - 6x^2 +x -5)	$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)(3x+2)(8x-4)$
3	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+1}{x+1}$	$\lim\limits_{x\to 4}(1-x+2x^2-3x^3)$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x+3}{2x-1}$
4	$\lim\limits_{x\to 2}(-5+x-6x^2+5x^3)$	$\lim\limits_{x\to 2}(x+1)(x^2+3x)(x-8)$	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{3x-9}{2x^2-x+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)(2x+4)(7x-3)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+7x-8}{x^3-1}$
6	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-4}{2x^2-2x+1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+1}{4x-3}$
7	$\lim\limits_{x\to -1}(3x-1)(x+4)(7x^2-3)$	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{-3}$
8	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+3}{2x-2}$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

Ответы:

	А	Б	В
1	-3	371	63
2	2	13	0
3	-9	-163	-1
4	13	-180	1/9
5	-9/11	48	8
6	2	5/13	-1
7	-48	1/3	-1
8	-1/4	-9/2	2/3

Задание 2.

Определенности вида $\frac{c}{0}$ и $\frac{c}{\infty}$

Упражнения:

	А	Б
1	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{3x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2+x}$
2	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$
3	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{80}{4x-8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+3x}$
4	$\lim\limits_{x\to 13}\frac{5}{\frac{8}{13}x-8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2+x^3}$
5	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{-75}{(x-2)(x+3)}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{78}{1-4x}$
6	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{5}{4x-20}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{x^2+x}$
7	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(8-x)}{4x-8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x^2+9x}$
8	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3}{3x^2-12}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{413}{x^5+7x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{4x^4-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2-x}$
10	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{5+x^3}{4x-8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{4x^2+x}$

Задание 3.

Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ *и* $\frac{\infty}{\infty}$

Упражнения:

	А	Б	С	Д
1	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$
2	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x-9}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4x^3-2x+8}{3x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^3-4}{x^2+5x^3}$
3	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x^2-4x+8}{x^3+2x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4x^3-2x+8}{3x^2+1}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^3-2x+6}{5x^3-4x+12}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+2x+1}$
5	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+3x}{7x^3+3x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2-1}{2x^3+x+4}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+x^2}{x^5+3x^4-2x^2}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-3x^2+8}{2x^4-6x-7}$
7	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x}{3-10x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x^5}{x^2+x^3}$
8	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x}{x^2-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{2x^2-4x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x^3-4x^2}{3x^4-2x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x}{1-3x^3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{7x+\sqrt[3]{x}}$
10	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{15x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2-1}$
11	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10}$	$\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x+x^3}{10x^3+x^2-80}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+11}{x^2-1+3x^3}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x^2+2x}{14x^2-3x}$	$\lim\limits_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+6}{-3x^3+x^2-26}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^4}{1-x^2-8x^4}$
13	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x^2}-4}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2-x-6}{3x-x^3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^2-5x+4}{20x-5}$
14	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^2+4x+3}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^4+5x^3-3}{5x^4-2x^3-4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^4+5x^5}{5x^4-2x^3-4x}$
15	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4+5x^3}{-2x^3-4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^4+5x^6-3}{5x^4-4x}$
16	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^4+3}{5x^4-2x^3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x^3-3}{2x^3-4x}$
17	$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3})$	$\lim\limits_{x\to 3/2}\frac{4x^2-9}{2x-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^4+5x+3}{5x^4-2x^3-4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^{10}+5x-3}{5x^9-2x^3-4x}$
18	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-3x^2+2x-2}{(x-1)^3}$	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4+5x^3-3}{5x^4-2x^3-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^4+5x^3-3}{5x^4-4x}$

Ответы задания №3:

	А	*Б*	*С*	*Д*
1	*0,4*	*-1/2*	∞	*2/5*
2	*1/3*	- —	∞	*3/5*
3	*5*	*4*	*0*	∞
4	∞	*6*	*2*	*1/2*
5	*-32*	*3*	*2/7*	*7/2*
6	*-0,5*	*1/84*	*2*	*2*
7	*-1/3*	*-4*	*-1/2*	∞
8	*6*	*1/4*	*3*	*3/2*
9	*2*	—	*-4/3*	*0*
10	*4/3*	*1/15*	*1*	*4*
11	*5/7*	*6*	*1/10*	*1/3*
12	*-2/3*	*108*	*-1/3*	*1/8*
13	*-4*	*1/8*	*0*	∞
14	*-1/5*	*3/4*	*4*	∞
15	*1*	*1/8*	∞	∞
16	*5*	*-2*	*4*	∞
17	∞	*6*	*4*	∞
18	∞	*-7/2*	*-1/5*	*4*

Задание 4.

Замечательные пределы.

Упражнения:

	А	**Б**	**В**	**С**
1	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{\frac{x}{2}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 5x}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x})^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^{x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg\,2x}{5x}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{7}{3x})^{\frac{6x}{7}}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{2}{3}x)^{\frac{3}{x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x}{2x+1})^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{\sin^2 5x}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{4}{3x})^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1-8x)^{\frac{3}{5x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-5}{3x})^{\frac{3x}{4}}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+7x)^{\frac{-4}{5x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 6x}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{7x})^{3x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{5x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{\sin 5x}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4}{3}x}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{3}{5x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{5x}$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{9x})^{7x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+8x)^{\frac{3}{6x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4x}{4x+6})^{3x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{5x}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{3x})^{\frac{1}{3}x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{2x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x}{2x-1})^{5x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 8x}{3x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{10x})^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}(1-\frac{3}{7}x)^{\frac{3}{5x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x-1})^{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x}{5x}$

Ответы задания 4:

	А	Б	В	С
1			$e^{1/2}$	1/5
2			1/e	2/5
3	e^{2}	e^{2}	$1/e^{1/2}$	2/25
4	$e^{-4/3}$	$e^{-24/5}$	$e^{-3/2}$	-1
5	$e^{-5/4}$	$e^{-28/5}$	e	1/6
6	$e^{6/7}$	$e^{4/5}$	e^{2}	4/5
7	$e^{3/4}$	$e^{3/5}$	e^{-2}	1/5
8	$e^{14/9}$	e^{4}	$e^{-9/2}$	2/5
9	$e^{1/9}$	e^{3}	$e^{5/2}$	8/3
10	$e^{-1/5}$	$e^{-9/35}$	e	9/5

Контрольный тест:
Среди перечисленных вариантов ответа выбрать значение предела

	Задание	Варианты ответа
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-6}{3x^2-6x-7}$	а) $-\infty$; б) ∞; в) $\frac{1}{3}$; г) 0.
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-6}{3x^2-6x-7}$	а) $-\infty$; б) ∞; в) $\frac{1}{3}$; г) 0.
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-6}{3x^3-6x-7}$	а) $-\infty$; б) ∞; в) $\frac{1}{3}$; г) 0.
4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x-6}{3x^2-6x-2}$	а) $-\infty$; б) ∞; в) 3; г) 0.
5	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}$	а) $\frac{3}{4}$; б) ∞; в) 3; г) 0.
6	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$	а) $-\infty$; б) 2; в) 3; г) 0.
7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2{,}5x}$	а) $-\infty$; б) 2; в) 3; г) 0.
8	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$	а) $-\infty$; б) 2; в) 3; г) 0.
9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tg\, x}$	а) $-\infty$; б) 2; в) 3; г) 0.
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^x$	а) $e^{-\frac{1}{4}}$; б) $e^{\frac{1}{4}}$; в) e^{-4}; г) e^{4}.
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x$	а) $e^{-\frac{1}{4}}$; б) $e^{\frac{1}{4}}$; в) e^{-4}; г) e^{4}.
12	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$	а) $e^{-\frac{1}{4}}$; б) $e^{\frac{1}{4}}$; в) e^{-4}; г) e^{4}.
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{2x}$	а) $e^{-\frac{1}{2}}$; б) $e^{\frac{1}{4}}$; в) e^{-4}; г) 0.
14	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$	а) 1; б) 0; в) $-\infty$; г) ∞.
15	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^x$	а) $e^{-\frac{1}{4}}$; б) $e^{\frac{1}{4}}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{4}$.

Ответы контрольного теста:

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Буква ответа	*в*	*б*	*г*	*г*	*а*	*б*	*б*	*в*	*б*	*а*	*б*	*г*	*а*	*а*	*а*

Критерии оценивания

«Отлично» - правильно решены 13…15 заданий.

«Хорошо» - правильно решены 9…12 заданий.

«Удовлетворительно» - правильно решены 5…8 заданий.

Тема 1.2. Непрерывность функции

Кол-во часов: 2 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков исследования функций на непрерывность в точке и формирование умения исследовать функции на точки разрыва и их характер;

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ

Виды заданий:

1. Определить является ли данная функция непрерывной или разрывной;
2. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Выполнить чертеж.

Определение 1. Функция *f(x)* называется непрерывной в точке $x = a$, если предел функции при $x \to a$ равен значению функции при $x=a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение 2. Функция *f(x)* называется непрерывной в промежутке, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Свойства непрерывных функций.

1. Сумма конечного числа функций, непрерывных в точке *a,* есть функция, непрерывная в этой точке.
2. Произведение конечного числа функций, непрерывных в точке *a*, есть функция, непрерывная в этой точке.
3. Отношение двух функций, непрерывных в точке *a*, есть функция, непрерывная в этой точке, если значение функции, стоящей в знаменателе, отлично от нуля в точке *a*
4. Многочлен есть функция, непрерывная на всей числовой прямой.
5. Любая рациональная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Пример 1. $y = \dfrac{1}{(2-x)^2}$

Д (у): 2-x ≠0, x ≠2.

Ответ. Непрерывна всюду, кроме x = 2.

Если условие непрерывности функции в точке $x=a$ нарушено, то такую точку называют точкой разрыва функции. Если функция имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции слева и справа. В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

1) <u>разрыв 1 рода</u> – в этом случае существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$;

2) <u>разрыв 2 рода</u> – в этом случае хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$; не существует или бесконечен.

<u>Пример 2</u>. $y = \frac{1}{(2-x)^2}$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{(2-x)^2} = \infty; \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{(2-x)^2} = \infty$$

Ответ x =2 точка разрыва 2 рода.

<u>Исследование непрерывности функции в заданных точках “x_1” и “x_2”</u>

Функция $f(x)$ считается непрерывной в точке $x = x_0$, если пределы слева и справа существуют и равны значению $f(x_0)$.

<u>Пример 3.</u> Дана функция $f(x) = 16^{\frac{1}{4-x}}$, исследовать на непрерывность в точках $x_1 = 4; x_2 = 0$, сделать схематический чертеж.

Решение:

Находим левосторонние и правосторонние пределы при $x_1 = 4$:

$$\lim_{x \to 4-0} 16^{\frac{1}{4-x}} = \infty$$

(левосторонний предел при $x < 4$, т.е. знаменатель показателя степени $4 - x > 0$ и стремится к нулю, в этом случае)

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{1}{4-x} = \infty$$

, следовательно, и $\lim\limits_{x \to 4-0} 16^{\frac{1}{4-x}} = \infty$.

Правосторонний предел:

$$\lim_{x \to 4+0} 16^{\frac{1}{4-x}} = 0$$

(правосторонний предел при $x > 4$ и $x - 4 < 0$, т.е. показатель степени отрицательный, и выражение под знаком предела можно переписать в виде

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{1}{16^{\frac{1}{4-x}}}$$

, где знаменатель стремится к бесконечности). Таким образом, функция

$$\lim_{x \to 4+0} 16^{\frac{1}{4-x}} = 0$$

имеет разрыв в точке $x = 4$.

Рассмотрим эту функцию в окрестности $x_2 = 0$. В этом случае левосторонний и правосторонний пределы равны:

$$\lim_{x \to 0+0} 16^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{x \to 0-0} 16^{\frac{1}{4-x}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2,$$

следовательно, в точке $x_2 = 0$, функция непрерывна. Схематический чертеж (рисунок):

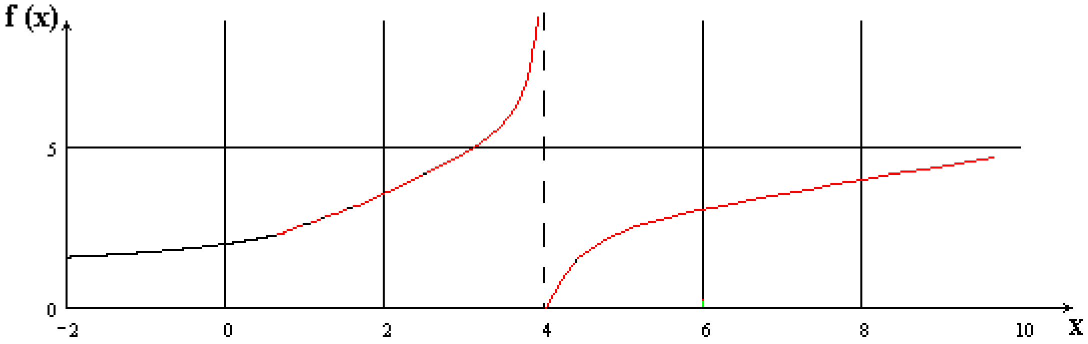


Рис. 1

Теоретические вопросы

1. Условия непрерывности функции в точке. Левосторонние и правосторонние пределы.
2. Классификация точек разрыва.

Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224 с.
2. Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Станишевская Л. В.. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа,2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Задание 1.

Задана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2.

Требуется установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента, и сделать схематический чертеж.

1	$f(x)=9^{1/(2-x)}$	$x_1 = 0$	$x_2 = 2$
2	$f(x)=4^{1/(3-x)}$	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$
3	$f(x)=12^{1/x}$	$x_1 = 0$	$x_2 = 2$
4	$f(x)=3^{1/(4-x)}$	$x_1 = 2$	$x_2 = 4$
5	$f(x)=8^{1/(5-x)}$	$x_1 = 3$	$x_2 = 5$
6	$f(x)=10^{1/(7-x)}$	$x_1 = 5$	$x_2 = 7$
7	$f(x)=14^{1/(6-x)}$	$x_1 = 4$	$x_2 = 6$
8	$f(x)=15^{1/(8-x)}$	$x_1 = 6$	$x_2 = 8$
9	$f(x)=11^{1/(4+x)}$	$x_1 = -4$	$x_2 = -2$
10	$f(x)=13^{1/(5+x)}$	$x_1 = -5$	$x_2 = -3$

Задание 2.

Задана функция $y = f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

1	$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$	6	$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \pi; \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$
2	$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x<1. \end{cases}$	7	$f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0; \\ x, & x>0. \end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$	8	$f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0; \\ tgx, & 0<x\le \pi/4; \\ 2, & x\ge \pi/4. \end{cases}$
4	$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$	9	$f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x\le 1; \\ 2, & x>1. \end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ x+1, & x+2. \end{cases}$	10	$f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ \sqrt{x}, & 0<x<4; \\ 1, & x\le 4. \end{cases}$

Раздел 2. Дифференциальное исчисление

Тема 2.1. Производная сложной функции и высших порядков

Кол-во часов: 4 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков вычисления производной сложной функции и высших порядков.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа.

Формы контроля: проверка работ, тестирование

Виды заданий:

1. Найти производную степени и корня;
2. Найти производную произведения;
3. Найти производную дроби;
4. Найти производную сложной функции;

5. Найти производную тригонометрической функции.

Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224с.
2. Майоровская С. В., Поддубная О. Н., Станишевская Л. В.. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа,2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Определение производной

Пусть функция y = f(x) определена в промежутке X. ***Производной функции*** y = f(x) в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Если этот предел ***конечный,*** то функция f(x) называется ***дифференцируемой*** в точке x_o; при этом она оказывается обязательно и непрерывной в этой точке.Если же рассматриваемый предел равен ∞ (или -∞), то при условии, что функция в точке x_o непрерывна, будем говорить, что функция f(x) имеет в точке x_o ***бесконечную производную***.Производная обозначается символами

y', $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Нахождениепроизводнойназывается ***дифференцированием*** функции. ***Геометрический смысл производной*** состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в данной точке x_o; ***физический смысл*** - в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении s = s(t) в момент t_0.

На практике с производной сложной функции приходится сталкиваться очень часто, я бы даже сказал, почти всегда, когда Вам даны задания на нахождение производных.

Правило дифференцирования сложной функции:

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись $u(v)$. Здесь у нас две функции – u и v, причем функция v, образно говоря, вложена в функцию u. Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию u назовем **внешней функцией**, а функцию v – **внутренней (или вложенной) функцией**.

__**Пример 1**__ Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x - 5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

$$\cancel{\sin(3x - 5) = \sin(3x) - \sin 5}$$

В данном примере уже из моих объяснений интуитивно понятно, что функция $y = \sin(3x - 5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x - 5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x - 5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде $\sin(3x-5)$ понятно, что под синус вложен многочлен $3x-5$. А как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике.

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x-5)$ при $x=1$ (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно будет выполнить следующее действие: $3\cdot 1-5=-2$, поэтому многочлен $3x-5$ и будет внутренней функцией v:

$$y=\sin(\underbrace{3x-5}_{v})$$

Во вторую очередь нужно будет найти $\sin(-2)$, поэтому синус – будет внешней функцией:

$$y=\underbrace{\boxed{\sin(\underbrace{3x-5}_{v})}}_{u(v)}$$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$.

Начинаем решать. С урока **Как найти производную?** мы помним, что оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем выражение в скобки и ставим справа вверху штрих:

$$y'=(\sin(3x-5))'$$

Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что $(\sin x)'=\cos x$. **Все табличные формулы применимы и в том, случае, если «икс» заменить сложным выражением**, в данном случае:

$$u'(v)=\cos(3x-5)$$

Обратите внимание, что внутренняя функция $v=3x-5$ <u>не изменилась, её мы не трогаем</u>.

Ну и совершенно очевидно, что $v'=(3x-5)'$

Результат применения формулы $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'=\cos(3x-5)\cdot(3-0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5)\cdot(3x-5)' = \cos(3x-5)\cdot(3-0) =$$
$$= 3\cos(3x-5)$$

Пример 2 Найти производную функции $y=(2x+1)^5$

Как всегда записываем: $y' = ((2x+1)^5)'$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x=1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2\cdot 1+1=3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y = (\underbrace{2x+1}_{v})^5$$

И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y = \underbrace{\boxed{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}}_{u(v)}$$

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Повторяем еще раз: **любая табличная формула справедлива не только для «икс», но и для сложного выражения**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ следующий:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)'$$

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас не меняется:

$$5\cdot(\underbrace{2x+1}_{\text{не меняется}})^4$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$
$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

Пример 3 а) Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}} \cdot (arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

Пример 4 Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}} \right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Пример 5 Найти производную функции $y = -\frac{1}{\cos x}$

Здесь можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, но гораздо выгоднее найти производную через правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x} \right)'$$

Подготавливаем функцию для дифференцирования – выносим минус за знак производной, а косинус поднимаем в числитель:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)'$$

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция. Используем наше правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)' =$$

$$= -(-1) \cdot cos^{-2}x \cdot (\cos x)'$$

Находим производную внутренней функции, косинус сбрасываем обратно вниз:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)' =$$

$$= -(-1) \cdot cos^{-2}x \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

В рассмотренном примере важно не запутаться в знаках. Кстати, попробуйте решить его с помощью правила $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, ответы должны совпасть.

Пример 6 Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ с помощью подопытного значения $x = 1$. Как бы мы считали на калькуляторе?

Сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:

$$7^{\boxed{\boxed{\arcsin^2 x}}}$$

И, наконец, семерку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:

$$7^{\boxed{\boxed{\arcsin^2 x}}}$$

То есть, в данном примере у нас три разные функции и два вложения, при этом, самой внутренней функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

Начинаем решать

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Смотрим в таблицу производных и находим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$ Единственное отличие – вместо «икс» у нас сложное выражение $\arcsin^2 x$, что не отменяет справедливость данной формулы. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Под штрихом у нас снова сложная функция! Но она уже проще. Легко убедиться, что внутренняя функция – арксинус, внешняя функция – степень. Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)'$$

Теперь все просто, находим по таблице производную арксинуса и немного «причесываем» выражение:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2\ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

!Обратите внимание на приоритет (порядок) применения правил: <u>правило дифференцирования сложной функции применяется в последнюю очередь</u>.

<u>Пример 7</u> Найти производную функции $y(x) = 3^{\cos x}$.

Решение.

Поскольку $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, то по правилу производной сложной функции получаем

$$y'(x) = \left(3^{\cos x}\right)' = 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot \left(\cos x\right)' = -3^{\cos x} \ln 3 \sin x.$$

<u>Пример 8</u> Найти производную функции $g(x) = \mathrm{tg}\sqrt{1-x}$.

Решение.

Здесь мы имеем дело с композицией трех функций. Производная тангенса равна $\left(\mathrm{tg}\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Тогда

$$g'(x) = \left(\mathrm{tg}\sqrt{1-x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x}} \cdot \left(\sqrt{1-x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}\cos^2\sqrt{1-x}}.$$

Пример 9 Определить производную функции

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Решение.

Применим формулы производной сложной функции и производной частного.

$$f'(x)=\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}.$$

Пример 10 Продифференцировать функцию

$$y(x)=x\sin\frac{1}{x}.$$

Решение.

Сначала найдем производную произведения:

$$y'(x)=\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'=(x)'\sin\frac{1}{x}+x\left(\sin\frac{1}{x}\right)'.$$

Далее, по формуле производной сложной функции:

$$y'(x)=1\cdot\sin\frac{1}{x}+x\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\sin\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2}\cos\frac{1}{x}=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Пример 11 Продифференцировать

$$y(x)=\sin\left[\sin(\sin x)\right].$$

Решение.

Здесь мы опять имеем дело с "трехслойной" функцией. Поэтому дважды применяем формулу производной сложной функции. Получаем

$$y'(x)=\left(\sin\left[\sin(\sin x)\right]\right)'=\cos\left[\sin(\sin x)\right]\cdot\left[\sin(\sin x)\right]'=$$

$$=\cos\left[\sin(\sin x)\right]\cdot\cos(\sin x)\cdot(\sin x)'=$$

$$=\cos\left[\sin(\sin x)\right]\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x.$$

Практический блок

1 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод	Задание 2. Найдите производные следующих функций.	Задание 3. Производная степени и корня.
$f(x)=x$ $f(x)=2x-1$ $f(x)=2x^2$ $f(x)=-3x^3+3$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$ $f(x)=2x^2-2x$	$y=1$ $y=x$ $y=2x$ $y=x^2$ $y=3x^3+3$ $y=4x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4$ $y=(2x^3-3)(3x^2-2)$ $y=\frac{5x^2}{(x+1)}$	$y=3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+2$ $y=7x^{\frac{6}{7}}+6x^{\frac{5}{6}}+5x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{2}{3}}+2x+5$ $y=x^2\sqrt[3]{x}$ $y=\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{6\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{4}$

Задание 4. Производная дроби.	Задание 5. Производная сложной функции.	Задание 6. Производные элементарных фуекций.	Задание 7. Производные тригонометрических функций.
$y=\frac{x+5}{x-1}$ $y=\frac{3x-7}{2x+9}$ $y=\frac{(x-3)^2}{2x+1}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-1}$ $y=\frac{3x^2-2x-4}{2x-1}$ $y=\frac{2x+1}{x(x+1)}$	$y=5(3x^2-5x+9)^{10}$ $y=2\sqrt{1+2x^3-x^5}$ $y=\sqrt{(2-x)(3-2x)}$ $y=\sqrt{x^3-1}$ $y=\sqrt{\frac{2}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^xe^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=7\cos x-5\sin x-9$ $y=5\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

2 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**
$f(x)=x$ $f(x)=3x-1$ $f(x)=3x^2$ $f(x)=-2x^3+3$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3$ $f(x)=3x^2-2x$	$y=2$ $y=x$ $y=3x$ $y=x^3$ $y=4x^4+4$ $y=\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+2x^2+2$ $y=(3x^3-2)(2x^2-3)$ $y=\frac{3x^2}{(x+2)}$	$y=3x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{2}}+5$ $y=7x^{\frac{5}{7}}+6x^{\frac{5}{6}}+5x^{\frac{3}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+x+8$ $y=x^2\sqrt{x}$ $y=\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}$ $y=\frac{12\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{8}$

Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных фуекций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+4}{x-2}$ $y=\frac{3x-6}{2x+8}$ $y=\frac{(x-2)^2}{2x+2}$ $y=\frac{x^3+2x^2}{4x-1}$ $y=\frac{2x^2-3x-4}{2x-3}$ $y=\frac{3x+1}{x(x+2)}$	$y=4(3x^2-5x+9)^9$ $y=3\sqrt[3]{1+2x^3-x^5}$ $y=\sqrt{(3-x)(2-x)}$ $y=\sqrt[3]{x^3-1}$ $y=\sqrt{\frac{3}{3x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=3\cos x-2\sin x-5$ $y=4\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

3 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**	
$f(x)=x$ $f(x)=2x-2$ $f(x)=3x^2$ $f(x)=-3x^3+2$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4$ $f(x)=2x^2-3x$	$y=3$ $y=x$ $y=4x$ $y=x^4$ $y=5x^5+5$ $y=2x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}$ $y=(4x^3-4)(4x^2-4)$ $y=\frac{3x^2}{(x+3)}$	$y=6x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+7$ $y=7x^{\frac{4}{7}}+6x^{\frac{1}{6}}+5x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{2}{3}}+3x+1$ $y=x^2\sqrt[3]{x^2}$ $y=\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{6\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}}{8}$	
Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных фуекций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+2}{x-1}$ $y=\frac{3x-8}{2x+9}$ $y=\frac{(x-2)^2}{2x+1}$ $y=\frac{x^3+2x^2}{3x-1}$ $y=\frac{5x^2-2x-4}{2x-1}$ $y=\frac{3x+1}{x(x+1)}$	$y=3(2x^2-5x+9)^8$ $y=2\sqrt[3]{1+4x^3-x^5}$ $y=\sqrt{(2-x)(3-2x)}$ $y=\sqrt{x^3-2}$ $y=\sqrt{\frac{4}{2x^2+3}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=7\cos x-5\sin x-9$ $y=5\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

4 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**	
$f(x)=x$ $f(x)=3x-2$ $f(x)=4x^2$ $f(x)=-2x^3+2$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$ $f(x)=3x^2-3x$	$y=4$ $y=x$ $y=5x$ $y=x^5$ $y=6x^3+6$ $y=\frac{3}{4}x^4+2x^3+\frac{1}{2}x^2+5$ $y=(7x-3)(7x^2-2)$ $y=\frac{6x^2}{(x+6)}$	$y=6x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{2}}+6$ $y=14x^{\frac{6}{7}}+6x^{\frac{5}{6}}+15x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{2}{3}}+4x+14$ $y=x\sqrt[3]{x}$ $y=\sqrt{x}\sqrt[5]{x}$ $y=\frac{18\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{4}$	
Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных фуекций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+5}{x-2}$ $y=\frac{3x-7}{2x+6}$ $y=\frac{(x-3)^2}{2x+3}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-2}$ $y=\frac{3x^2-2x-4}{2x-3}$ $y=\frac{2x+1}{x(x+2)}$	$y=5(2x^2-3x+4)^8$ $y=4\sqrt{1+3x^3-2x^5}$ $y=\sqrt[3]{(2-x)(5-2x)}$ $y=\sqrt[3]{x^3-2}$ $y=\sqrt{\frac{4}{2x^2+5}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=3\cos x-2\sin x-5$ $y=4\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

5 ВАРИАНТ

<table>
<tr><td>Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.</td><td>Задание 2. Найдите производные следующих функций.</td><td colspan="2">Задание 3. Производная степени и корня.</td></tr>
<tr><td>$f(x)=x$
$f(x)=3x-3$
$f(x)=4x^2$
$f(x)=-2x^3+4$
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$
$f(x)=4x^2-2x$</td><td>$y=8$
$y=x$
$y=8x$
$y=x^2$
$y=8x^3+8$
$y=5x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4$
$y=(2x^3-5)(3x^2-5)$
$y=\frac{8x^2}{(x+2)}$</td><td colspan="2">$y=6x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{2}}+2$
$y=7x^{\frac{1}{7}}+6x^{\frac{1}{6}}+5x^{\frac{1}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x+1$
$y=x^2\sqrt[5]{x^3}$
$y=6\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$
$y=\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{4}$</td></tr>
<tr><td>Задание 4. Производная дроби.</td><td>Задание 5. Производная сложной функции.</td><td>Задание 6. Производные элементарных фуекций.</td><td>Задание 7. Производные тригонометрических функций.</td></tr>
<tr><td>$y=\frac{x+1}{x-1}$
$y=\frac{3x-1}{2x+9}$
$y=\frac{(x-1)^2}{2x+1}$
$y=\frac{x^3+5x^2}{3x-1}$
$y=\frac{3x^2-2x-1}{2x-1}$
$y=\frac{2x+5}{x(x+1)}$</td><td>$y=5(7x^2-2x+9)^7$
$y=2\sqrt{1+2x^2-x^5}$
$y=\sqrt[3]{(2-x)(3-x)}$
$y=\sqrt[3]{x^3-3}$
$y=\sqrt{\frac{5}{3x^2+1}}$</td><td>$y=e^{-x}$
$y=\sqrt{e^x}$
$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$
$y=e^{(3x+5)^2}$
$y=a^{3x}$
$y=a^xe^x$

$y=\lg(2x)$
$y=\ln 3x$
$y=\log_3(4x-2)$
$y=\ln(x^3)$
$y=(\ln x)^3$</td><td>$y=7\cos x-5\sin x-9$
$y=5\cos 2x$
$y=\sin x\cos x$
$y=\frac{\sin x}{\cos x}$
$y=2tgx-ctgx$
$y=2x-\sin 3x$
$y=\sin x(1+\cos x)$
$y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$
$y=\frac{3-2tgx}{tgx}$</td></tr>
</table>

6 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**
$f(x)=x$ $f(x)=2x-4$ $f(x)=6x^2$ $f(x)=-5x^3+3$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$ $f(x)=5x^2-2x$	$y=9$ $y=x$ $y=7x$ $y=x^2$ $y=2x^3+3$ $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3$ $y=(3x^3-5)(2x^2-5)$ $y=\frac{9x^2}{(x+3)}$	$y=5x^{\frac{1}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+1$ $y=9x^{\frac{8}{9}}+7x^{\frac{6}{7}}+5x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{2}{3}}+2x+5$ $y=x^2\sqrt{x}$ $y=12\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{10\sqrt{x}\sqrt[5]{x^2}}{4}$

Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+2}{x-1}$ $y=\frac{3x-2}{2x+9}$ $y=\frac{(x-2)^2}{2x+1}$ $y=\frac{x^3+2x^2}{3x-1}$ $y=\frac{3x^2-2x-2}{2x-1}$ $y=\frac{2x+9}{x(x+1)}$	$y=5(3x^2-5x+9)^6$ $y=6\sqrt{1+2x^4-x^5}$ $y=\sqrt[4]{(2-x)(3-5x)}$ $y=\sqrt{x^3-3}$ $y=\sqrt[3]{\frac{2}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=3\cos x-2\sin x-5$ $y=4\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

7 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**
$f(x)=x$ $f(x)=2x-5$ $f(x)=5x^2$ $f(x)=-3x^3+5$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$ $f(x)=3x^2-4x$	$y=5$ $y=x$ $y=6x$ $y=x^2$ $y=7x^2+7$ $y=\frac{2}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+2x^2+4$ $y=(5x^3-5)(2x^2-5)$ $y=\frac{10x^2}{(x+3)}$	$y=5x^{\frac{2}{5}}+3x^{\frac{2}{3}}+2$ $y=9x^{\frac{7}{9}}+7x^{\frac{5}{7}}+5x^{\frac{3}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x+1$ $y=x^2\sqrt[4]{x}$ $y=3\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{15\sqrt[3]{x}\sqrt[5]{x^2}}{2}$

Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+5}{x-2}$ $y=\frac{3x-7}{2x+2}$ $y=\frac{(x-3)^2}{2x+2}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-2}$ $y=\frac{3x^2-2x-4}{2x-2}$ $y=\frac{2x+1}{x(x+2)}$	$y=7(4x^2-4x+4)^7$ $y=5\sqrt{1+2x^3-x^2}$ $y=\sqrt[3]{(2-x)(3-5x)}$ $y=\sqrt{x^3-6}$ $y=\sqrt[3]{\frac{7}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=7\cos x-5\sin x-9$ $y=5\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

8 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**
$f(x)=x$ $f(x)=2x-1$ $f(x)=2x^2$ $f(x)=-3x^3+3$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$ $f(x)=2x^2-2x$	$y=6$ $y=x$ $y=7x$ $y=x^2$ $y=8x^5+12$ $y=\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+3x^2+8$ $y=(2x^2-7)(3x^2-5)$ $y=\frac{7x^2}{(x+2)}$	$y=5x^{\frac{3}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+5$ $y=9x^{\frac{5}{9}}+7x^{\frac{4}{7}}+5x^{\frac{3}{5}}+3x^{\frac{2}{3}}+x+7$ $y=x^2\sqrt[5]{x}$ $y=6\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{10\sqrt{x}\sqrt[5]{x^3}}{3}$

Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+3}{x-1}$ $y=\frac{3x-3}{2x+9}$ $y=\frac{(x-3)^2}{2x+1}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-1}$ $y=\frac{3x^2-2x-3}{2x-1}$ $y=\frac{2x+3}{x(x+1)}$	$y=5(3x^3-5x+9)^6$ $y=2\sqrt{1+2x^2-x^5}$ $y=\sqrt[3]{(5-x)(3-2x)}$ $y=\sqrt{x^3-5}$ $y=\sqrt[3]{\frac{8}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=3\cos x-2\sin x-5$ $y=4\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

9 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**	
$f(x)=x$ $f(x)=3x-1$ $f(x)=3x^2$ $f(x)=-2x^3+3$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3$ $f(x)=3x^2-2x$	$y=7$ $y=x$ $y=12x$ $y=x^4$ $y=8x^5+11$ $y=\frac{4}{5}x^5+3x^4+5x^2+9$ $y=(4x^3-8)(3x-5)$ $y=\frac{8x^3}{(x+6)}$	$y=5x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+4$ $y=9x^{\frac{4}{9}}+7x^{\frac{3}{7}}+5x^{\frac{2}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+10x+5$ $y=x^4\sqrt{x}$ $y=18\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{10\sqrt{x}\sqrt[5]{x^4}}{4}$	
Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+5}{x-3}$ $y=\frac{3x-7}{2x+3}$ $y=\frac{(x-3)^2}{2x+3}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-3}$ $y=\frac{3x^2-2x-4}{2x-3}$ $y=\frac{2x+1}{x(x+3)}$	$y=6(x^3-5x^2+9)^{10}$ $y=2\sqrt{1+2x^4-x^5}$ $y=\sqrt[4]{(2-x)(3-4x)}$ $y=\sqrt{x^3-1}$ $y=\sqrt[3]{\frac{3}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^xe^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=7\cos x-5\sin x-9$ $y=5\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

10 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**	
$f(x)=x$ $f(x)=3x-2$ $f(x)=4x^2$ $f(x)=-2x^3+2$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$ $f(x)=3x^2-3x$	$y=33$ $y=x$ $y=32x$ $y=x^5$ $y=3x^5+2$ $y=\frac{1}{7}x^7+\frac{4}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+7$ $y=(5x^2-1)(2x^2-1)$ $y=\frac{3x}{(x^2+2)}$	$y=7x^{\frac{5}{7}}+9x^{\frac{1}{3}}+5$ $y=18x^{\frac{7}{9}}+7x^{\frac{1}{7}}+10x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+4x+2$ $y=x^5\sqrt[5]{x^4}$ $y=24\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{18\sqrt{x}\sqrt[9]{x^5}}{5}$	
Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+4}{x-3}$ $y=\frac{3x-4}{2x+3}$ $y=\frac{(x-3)^2}{3x+4}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{4x-3}$ $y=\frac{3x^2-2x-4}{4x-5}$ $y=\frac{3x+1}{x(x+4)}$	$y=3(2x^2-5x+9)^8$ $y=2\sqrt[3]{1+4x^3-x^5}$ $y=\sqrt{(2-x)(3-2x)}$ $y=\sqrt{x^3-2}$ $y=\sqrt{\frac{4}{2x^2+3}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=3\cos x-2\sin x-5$ $y=4\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

11 ВАРИАНТ

<table>
<tr><td>Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.</td><td>Задание 2. Найдите производные следующих функций.</td><td colspan="2">Задание 3. Производная степени и корня.</td></tr>
<tr><td>$f(x)=x$
$f(x)=3x-3$
$f(x)=4x^2$
$f(x)=-2x^3+4$
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$
$f(x)=4x^2-2x$</td><td>$y=41$
$y=x$
$y=15x$
$y=x^9$
$y=2x^5+9$
$y=\frac{5}{7}x^7+\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+5$
$y=(7x^2-1)(2x^2-3)$
$y=\frac{7x}{(x^2+2)}$</td><td colspan="2">$y=7x^{\frac{6}{7}}+3x^{\frac{2}{3}}+6$
$y=9x^{\frac{2}{9}}+14x^{\frac{2}{7}}+5x^{\frac{2}{5}}+6x^{\frac{1}{3}}+4x+2$
$y=2x^5\sqrt[5]{x^3}$
$y=\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$
$y=\frac{18\sqrt{x}\sqrt[9]{x^7}}{7}$</td></tr>
<tr><td>Задание 4. Производная дроби.</td><td>Задание 5. Производная сложной функции.</td><td>Задание 6. Производные элементарных функций.</td><td>Задание 7. Производные тригонометрических функций.</td></tr>
<tr><td>$y=\frac{x+1}{x-2}$
$y=\frac{5x-7}{2x+9}$
$y=\frac{(x-1)^2}{2x+3}$
$y=\frac{x^3+5x^2}{3x-1}$
$y=\frac{3x^2-3x-4}{2x-1}$
$y=\frac{9x+5}{x(x+1)}$</td><td>$y=5(2x^2-3x+4)^8$
$y=4\sqrt{1+3x^3-2x^5}$
$y=\sqrt[3]{(2-x)(5-2x)}$
$y=\sqrt[3]{x^3-2}$
$y=\sqrt{\frac{4}{2x^2+5}}$</td><td>$y=e^{-x}$
$y=\sqrt{e^x}$
$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$
$y=e^{(3x+5)^2}$
$y=a^{3x}$
$y=a^xe^x$

$y=\lg(2x)$
$y=\ln 3x$
$y=\log_3(4x-2)$
$y=\ln(x^3)$
$y=(\ln x)^3$</td><td>$y=7\cos x-5\sin x-9$
$y=5\cos 2x$
$y=\sin x\cos x$
$y=\frac{\sin x}{\cos x}$
$y=2tgx-ctgx$
$y=2x-\sin 3x$
$y=\sin x(1+\cos x)$
$y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$
$y=\frac{3-2tgx}{tgx}$</td></tr>
</table>

12 ВАРИАНТ

<table>
<tr><td>Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.</td><td>Задание 2. Найдите производные следующих функций.</td><td colspan="2">Задание 3. Производная степени и корня.</td></tr>
<tr><td>$f(x)=x$
$f(x)=2x-4$
$f(x)=6x^2$
$f(x)=-5x^3+3$
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$
$f(x)=5x^2-2x$</td><td>$y=42$
$y=x$
$y=5x$
$y=x^2$
$y=10x^5+17$
$y=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+4$
$y=(2x^3-1)(4x^3-1)$
$y=\frac{2x}{(x^3+5)}$</td><td colspan="2">$y=7x^{\frac{1}{7}}+3x^{\frac{2}{3}}+5$
$y=18x^{\frac{1}{9}}+14x^{\frac{2}{7}}+10x^{\frac{3}{5}}+6x^{\frac{1}{3}}+4x+2$
$y=\frac{1}{2}x^5\sqrt[5]{x^2}$
$y=\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$
$y=\frac{18\sqrt{x}\sqrt[9]{x^7}}{14}$</td></tr>
<tr><td>Задание 4. Производная дроби.</td><td>Задание 5. Производная сложной функции.</td><td>Задание 6. Производные элементарных функций.</td><td>Задание 7. Производные тригонометрических функций.</td></tr>
<tr><td>$y=\frac{x+2}{x-2}$
$y=\frac{3x-2}{2x+9}$
$y=\frac{(x-2)^2}{2x+1}$
$y=\frac{x^3+3x^2}{2x-1}$
$y=\frac{3x^2-2x-4}{2x-8}$
$y=\frac{2x+1}{x(x+5)}$</td><td>$y=5(7x^2-2x+9)^7$
$y=2\sqrt{1+2x^2-x^5}$
$y=\sqrt[3]{(2-x)(3-x)}$
$y=\sqrt[3]{x^3-3}$
$y=\sqrt{\frac{5}{3x^2+1}}$</td><td>$y=e^{-x}$
$y=\sqrt{e^x}$
$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$
$y=e^{(3x+5)^2}$
$y=a^{3x}$
$y=a^xe^x$

$y=\lg(2x)$
$y=\ln 3x$
$y=\log_3(4x-2)$
$y=\ln(x^3)$
$y=(\ln x)^3$</td><td>$y=3\cos x-2\sin x-5$
$y=4\cos 2x$
$y=\sin x\cos x$
$y=\frac{\sin x}{\cos x}$
$y=2tgx-ctgx$
$y=2x-\sin 3x$
$y=\sin x(1+\cos x)$
$y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$
$y=\frac{3-2tgx}{tgx}$</td></tr>
</table>

13 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**	
$f(x)=x$ $f(x)=2x-5$ $f(x)=5x^2$ $f(x)=-3x^3+5$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$ $f(x)=3x^2-4x$	$y=43$ $y=x$ $y=51x$ $y=x^2$ $y=11x^5+11$ $y=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^4+3$ $y=(2x^5-1)(4x^2-1)$ $y=\frac{2x^4}{(x^2+5)}$	$y=7x^{\frac{2}{7}}+9x^{\frac{1}{3}}+12$ $y=27x^{\frac{8}{9}}+14x^{\frac{2}{7}}+10x^{\frac{4}{5}}+6x^{\frac{2}{3}}+4x+2$ $y=x^5\sqrt[5]{x^3}$ $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}$ $y=\frac{18\sqrt{x}\sqrt[9]{x^8}}{8}$	
Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+3}{x-3}$ $y=\frac{3x-3}{2x+9}$ $y=\frac{(x-3)^2}{2x+3}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-7}$ $y=\frac{3x^2-3x-4}{2x-3}$ $y=\frac{2x+3}{x(x+3)}$	$y=5(3x^2-5x+9)^6$ $y=6\sqrt{1+2x^4-x^5}$ $y=\sqrt[4]{(2-x)(3-5x)}$ $y=\sqrt{x^3-3}$ $y=\sqrt[3]{\frac{2}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^xe^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=7\cos x-5\sin x-9$ $y=5\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

14 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**	
$f(x)=x$ $f(x)=3x-1$ $f(x)=3x^2$ $f(x)=-2x^3+3$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3$ $f(x)=3x^2-2x$	$y=7$ $y=x$ $y=12x$ $y=x^4$ $y=8x^5+11$ $y=\frac{4}{5}x^5+3x^4+5x^2+9$ $y=(4x^3-8)(3x-5)$ $y=\frac{8x^3}{(x+6)}$	$y=5x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+4$ $y=9x^{\frac{4}{9}}+7x^{\frac{3}{7}}+5x^{\frac{2}{5}}+3x^{\frac{1}{3}}+10x+5$ $y=x^4\sqrt{x}$ $y=18\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{10\sqrt{x}\sqrt[5]{x^4}}{4}$	
Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+5}{x-3}$ $y=\frac{3x-7}{2x+3}$ $y=\frac{(x-3)^2}{2x+3}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-3}$ $y=\frac{3x^2-2x-4}{2x-3}$ $y=\frac{2x+1}{x(x+3)}$	$y=6(x^3-5x^2+9)^{10}$ $y=2\sqrt{1+2x^4-x^5}$ $y=\sqrt[4]{(2-x)(3-4x)}$ $y=\sqrt{x^3-1}$ $y=\sqrt[3]{\frac{3}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^xe^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=7\cos x-5\sin x-9$ $y=5\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

15 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**	
$f(x)=x$ $f(x)=2x-2$ $f(x)=3x^2$ $f(x)=-3x^3+2$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4$ $f(x)=2x^2-3x$	$y=11$ $y=x$ $y=12x$ $y=x^2$ $y=2x^4+8$ $y=5x^6+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+7$ $y=(2x^4-8)(2x-5)$ $y=\frac{3x^2}{(x+7)}$	$y=10x^{\frac{1}{5}}+6x^{\frac{1}{3}}+4$ $y=18x^{\frac{8}{9}}+14x^{\frac{6}{7}}+10x^{\frac{4}{5}}+6x^{\frac{2}{3}}+4x+5$ $y=x^3\sqrt[3]{x}$ $y=4\sqrt{x}\sqrt[4]{x}$ $y=\frac{14\sqrt{x}\sqrt[7]{x^2}}{6}$	
Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+3}{x-2}$ $y=\frac{3x-2}{2x+3}$ $y=\frac{(x-2)^2}{2x+3}$ $y=\frac{x^3+2x^2}{3x-3}$ $y=\frac{3x^2-2x-2}{2x-3}$ $y=\frac{2x+3}{x(x+2)}$	$y=2(7x^2-5x+9)^6$ $y=2\sqrt[4]{1+2x^3-x^5}$ $y=\sqrt[3]{(2-x)(3-2x)}$ $y=\sqrt[4]{x^3-1}$ $y=\sqrt{\frac{11}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=3\cos x-2\sin x-5$ $y=4\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

16 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**
$f(x)=x$ $f(x)=3x-2$ $f(x)=4x^2$ $f(x)=-2x^3+2$ $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+5$ $f(x)=3x^2-3x$	$y=12$ $y=x$ $y=13x$ $y=x^6$ $y=4x^2+6$ $y=\dfrac{1}{6}x^6+\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^4+4$ $y=(2x^4-1)(3x^2-1)$ $y=\dfrac{2x^3}{(x+5)}$	$y=10x^{\frac{2}{5}}+6x^{\frac{2}{3}}+2$ $y=18x^{\frac{7}{9}}+14x^{\frac{5}{7}}+10x^{\frac{3}{5}}+6x^{\frac{2}{3}}+20x+22$ $y=3x^3\sqrt[3]{x}$ $y=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^3}$ $y=\dfrac{14\sqrt{x}\sqrt[7]{x^3}}{6}$

Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\dfrac{x+5}{x-1}$ $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ $y=\dfrac{(x-5)^2}{2x+1}$ $y=\dfrac{x^3+5x^2}{3x-1}$ $y=\dfrac{3x^2-2x-5}{2x-1}$ $y=\dfrac{2x+5}{x(x+1)}$	$y=5(3x^3-5x+9)^5$ $y=5\sqrt{1+2x^3-x^4}$ $y=\sqrt{(2-x)(2-3x)}$ $y=\sqrt{x^3-4}$ $y=\sqrt[3]{\dfrac{7}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=7\cos x-5\sin x-9$ $y=5\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\dfrac{3-\cos x}{3+\cos x}$ $y=\dfrac{3-2tgx}{tgx}$

17 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**	
$f(x)=x$ $f(x)=3x-3$ $f(x)=4x^2$ $f(x)=-2x^3+4$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$ $f(x)=4x^2-2x$	$y=21$ $y=x$ $y=22x$ $y=x^6$ $y=2x^2+3$ $y=\frac{2}{6}x^6+\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+7$ $y=(3x^4-2)(x^2-1)$ $y=\frac{3x^3}{(x+3)}$	$y=10x^{\frac{3}{5}}+6x^{\frac{1}{3}}+3$ $y=18x^{\frac{5}{9}}+14x^{\frac{4}{7}}+10x^{\frac{3}{5}}+6x^{\frac{2}{3}}+4x+10$ $y=5x^3\sqrt[5]{x^2}$ $y=4\sqrt{x}\sqrt[4]{x^3}$ $y=\frac{14\sqrt{x}\sqrt[7]{x^4}}{6}$	
Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+1}{x-5}$ $y=\frac{3x-1}{2x+5}$ $y=\frac{(x-1)^2}{2x+5}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-5}$ $y=\frac{3x^2-2x-1}{2x-5}$ $y=\frac{2x+1}{x(x+5)}$	$y=2(3x^4-5x^3+9)^{10}$ $y=5\sqrt{1+2x^2-x^3}$ $y=\sqrt[3]{(6-x)(5-2x)}$ $y=\sqrt[3]{x^3-4}$ $y=\sqrt{\frac{7}{2x^2+1}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^xe^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=3\cos x-2\sin x-5$ $y=4\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

18 ВАРИАНТ

<table>
<tr><td>Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.</td><td>Задание 2. Найдите производные следующих функций.</td><td colspan="2">Задание 3. Производная степени и корня.</td></tr>
<tr><td>$f(x)=x$
$f(x)=2x-4$
$f(x)=6x^2$
$f(x)=-5x^3+3$
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$
$f(x)=5x^2-2x$</td><td>$y=13$
$y=x$
$y=14x$
$y=x^7$
$y=5x^2+6$
$y=\frac{3}{6}x^6+\frac{3}{5}x^5+3x^4+2$
$y=(2x^4-2)(3x^2-3)$
$y=\frac{4x^3}{(x+4)}$</td><td colspan="2">$y=15x^{\frac{4}{5}}+6x^{\frac{1}{3}}+8$
$y=18x^{\frac{4}{9}}+14x^{\frac{3}{7}}+10x^{\frac{4}{5}}+6x^{\frac{2}{3}}+10x+18$
$y=2x^3\sqrt[3]{x}^2$
$y=6\sqrt{x}\sqrt[4]{x^3}$
$y=\frac{14\sqrt{x}\sqrt[7]{x^5}}{5}$</td></tr>
<tr><td>Задание 4. Производная дроби.</td><td>Задание 5. Производная сложной функции.</td><td>Задание 6. Производные элементарных функций.</td><td>Задание 7. Производные тригонометрических функций.</td></tr>
<tr><td>$y=\frac{x+7}{x-1}$
$y=\frac{2x-7}{3x+9}$
$y=\frac{(x-3)^2}{3x+1}$
$y=\frac{x^3+3x^2}{2x-1}$
$y=\frac{2x^2-2x-4}{3x-1}$
$y=\frac{3x+1}{x(x+1)}$</td><td>$y=3(x^2-5x+9)^5$
$y=2\sqrt[3]{7+2x^3-x^5}$
$y=\sqrt{(6-x)(5-2x)}$
$y=\sqrt{x^3-8}$
$y=\sqrt[4]{\frac{2}{2x^2+1}}$</td><td>$y=e^{-x}$
$y=\sqrt{e^x}$
$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$
$y=e^{(3x+5)^2}$
$y=a^{3x}$
$y=a^xe^x$

$y=\lg(2x)$
$y=\ln 3x$
$y=\log_3(4x-2)$
$y=\ln(x^3)$
$y=(\ln x)^3$</td><td>$y=7\cos x-5\sin x-9$
$y=5\cos 2x$
$y=\sin x\cos x$
$y=\frac{\sin x}{\cos x}$
$y=2tgx-ctgx$
$y=2x-\sin 3x$
$y=\sin x(1+\cos x)$
$y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$
$y=\frac{3-2tgx}{tgx}$</td></tr>
</table>

19 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**
$f(x)=x$ $f(x)=2x-5$ $f(x)=5x^2$ $f(x)=-3x^3+5$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$ $f(x)=3x^2-4x$	$y=24$ $y=x$ $y=25x$ $y=x^3$ $y=7x^2+6$ $y=\frac{4}{6}x^6+\frac{4}{5}x^5+4x^4+4$ $y=(2x^4-3)(3x^2-4)$ $y=\frac{5x^3}{(x+3)}$	$y=7x^{\frac{1}{7}}+5x^{\frac{1}{5}}+3$ $y=18x^{\frac{1}{9}}+14x^{\frac{1}{7}}+10x^{\frac{1}{5}}+6x^{\frac{1}{3}}+x+1$ $y=x^5\sqrt[5]{x}$ $y=3\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{14\sqrt{x}\sqrt[7]{x^6}}{6}$

Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y=\frac{x+9}{x-1}$ $y=\frac{4x-7}{2x+9}$ $y=\frac{(x-3)^2}{4x+1}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{4x-1}$ $y=\frac{3x^2-2x-4}{4x-1}$ $y=\frac{4x+1}{x(x+1)}$	$y=2(3x^2-5x+9)^5$ $y=\sqrt[3]{1+2x^3-x^5}$ $y=\sqrt{(2-x)(3-2x)}$ $y=\sqrt{x^3-9}$ $y=\sqrt[3]{\frac{7}{2x^2+3}}$	$y=e^{-x}$ $y=\sqrt{e^x}$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$ $y=e^{(3x+5)^2}$ $y=a^{3x}$ $y=a^x e^x$ $y=\lg(2x)$ $y=\ln 3x$ $y=\log_3(4x-2)$ $y=\ln(x^3)$ $y=(\ln x)^3$	$y=3\cos x-2\sin x-5$ $y=4\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{5-\cos x}{5+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$

20 ВАРИАНТ

Задание 1. Найдите производную, используя общий метод.	**Задание 2. Найдите производные следующих функций.**	**Задание 3. Производная степени и корня.**
$f(x) = x$ $f(x) = 2x - 1$ $f(x) = 2x^2$ $f(x) = -3x^3 + 3$ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ $f(x) = 2x^2 - 2x$	$y = 25$ $y = x$ $y = 26x$ $y = x^8$ $y = 4x^5 + 6$ $y = \frac{2}{7}x^7 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 4$ $y = (2x^2 - 1)(4x^2 - 1)$ $y = \frac{2x}{(x^2 + 5)}$	$y = 7x^{\frac{2}{7}} + 6x^{\frac{1}{3}} + 5$ $y = 18x^{\frac{8}{9}} + 14x^{\frac{1}{7}} + 10x^{\frac{4}{5}} + 6x^{\frac{1}{3}} + 4x + 3$ $y = 12x^3\sqrt[3]{x}$ $y = 8\sqrt{x}\sqrt[4]{x}$ $y = \frac{28\sqrt{x}\sqrt[7]{x^3}}{3}$

Задание 4. Производная дроби.	**Задание 5. Производная сложной функции.**	**Задание 6. Производные элементарных функций.**	**Задание 7. Производные тригонометрических функций.**
$y = \frac{x+5}{x-7}$ $y = \frac{3x-7}{5x+9}$ $y = \frac{(x-3)^2}{5x+1}$ $y = \frac{x^3 + 3x^2}{5x-1}$ $y = \frac{3x^2 - 2x - 4}{5x-1}$ $y = \frac{5x+1}{x(x+1)}$	$y = 3(8x^4 - 4x + 9)^8$ $y = 4\sqrt{1 + 3x^3 - 7x^7}$ $y = \sqrt[4]{(2-x)(4-3x)}$ $y = \sqrt{x^3 - 12}$ $y = \sqrt[3]{\frac{4}{2x^2 + 3}}$	$y = e^{-x}$ $y = \sqrt{e^x}$ $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $y = 16^{\sqrt{x^3 + 6x + 14}}$ $y = e^{(3x+5)^2}$ $y = a^{3x}$ $y = a^x e^x$ $y = \lg(2x)$ $y = \ln 3x$ $y = \log_3(4x - 2)$ $y = \ln(x^3)$ $y = (\ln x)^3$	$y = 7\cos x - 5\sin x - 9$ $y = 5\cos 2x$ $y = \sin x \cos x$ $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ $y = 2tgx - ctgx$ $y = 2x - \sin 3x$ $y = \sin x(1 + \cos x)$ $y = \frac{3 - \cos x}{3 + \cos x}$ $y = \frac{3 - 2tgx}{tgx}$

Тема 2.2. Исследование функции

Кол-во часов: 5 часов

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление схемы исследования функций и формирование умения применять понятие производной к исследованию функций и построению графиков

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ

Виды заданий:

1. Исследовать на экстремум функцию;
2. Исследовать функцию с помощью производной и построить и построить график функции.

Необходимое условие экстремума в точке $x = x_0$:

$y'(x_0) = 0$, или $y'(x_0)$, – не существует.

При этом если $y'(x_0 - 0) > 0$; $y'(x_0 + 0) < 0$ – в точке x_0 функция имеет максимум;

Если $y'(x_0 - 0) < 0$; $y'(x_0 + 0) > 0$ – минимум.

Если производная свой знак не меняет, то экстремума нет, точка x_0 – называется критической или стационарной.

Пример 1. Исследовать на экстремум:

$y = x^2 + 2x; \quad y' = 2x + 2; \quad y' = 0; \quad 2x + 2 = 0; \quad x_0 = -1$ – критическая точка.

Находим знак производной слева и справа от точки $x_0 = -1$.

$$y'(-2) = 2(-2) + 2 = -2 < 0; \; y'(0) = 2 > 0. \text{ т.е. } y(-1) - min.$$

Пример 2. Исследовать на экстремум:

$y = \sqrt[3]{x^2}; \quad y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ – не существует в точке $x = 0$.

Находим знак производной в окрестности критической точки:

$$y'(-1) = \frac{-2}{3} < 0; \quad y'(1) = \frac{2}{3} > 0, \text{ т.е. } y(0) - min.$$

Пример 3. Исследовать на экстремум:

$y = xe^{-x}; y' = (x)'e^{-x} + (e^{-x})'x = e^{-x}(1 - x);$

$y' = 0; \quad e^{x}(x - 1) = 0;$

$x = 1$ – критическая точка.

Находим знаки производной в окрестности критической точки $x = 1$:

$$y'(0) = -1 < 0; \quad y'(2) = 3e^{-2} > 0 \text{ т.е. } y(1) - min.$$

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на интервале

$$y = -4x^3 + 6x^2 + 1 \qquad [-0.5;\ 2.6]$$

Решение

1. Находим первую производную заданной функции $y' = -12x^2 + 12x$

2. Определяем критические точки первого рода: $-30x^2 + 30x = 0$, откуда: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

3. Подвергаем эти точки дополнительному исследованию в табличной форме (таблица 1), учитывая, что заданная функция определена на участке $[-0.5;\ 2.6]$ числовой оси:

Таблица 1

x	-0.5	$(-0.5;\ 0)$	0	(0;1)	1	(1;2.0)	2.6
Знак $f'(x)$		-	**0**	+	**0**	-	
Величина $f(x)$	3	убывает	1	возрастает	3	убывает	-28,744
Экстремум			min		max		

Итак,

$\max\limits_{[-0.5;2.6]} f(-0.5) = f(1) = 3$ $\min\limits_{[-0.5;2.6]} f(2.6) = -28{,}744$.

В данном случае глобальный минимум не совпадает с локальным экстремумом.

Задача нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке решается в такой последовательности:

- находятся критические точки функции и отбираются те, которые попали в заданный интервал;
- находится значение функций в этих точках и на границе интервала.

Из полученных значений выбираются наибольшие и наименьшие значения.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y(x)$ на интервале $[1:4]$: $y(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Решение:

- находим критические точки:

$$y' = 3x^2 - 6x = 0,$$
$$x(x-2) = 0,$$
$$x_1 = 0; x_2 = 2;$$

в интервал [1;4] попадает только x_2.

- Находим значение функции в точке $x_2 = 2$

и на границах интервала:

$y(2) = -3$; $y(1) = -1$; $y(4) = 17$,

т.е. наибольшее значение функции $y(4) = 17$, наименьшее – $y(2) = -3$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$ на отрезке $[0;3]$.

Решение:

Найдём область определения функции: $D(f) = R$. Далее, продифференцируем функцию:

$$y' = (\frac{1}{3}x^3 - 4x + 5)' = x^2 - 4.$$

Найдём критические точки: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Одна из них, $x = 2$, принадлежит рассматриваемому промежутку. Определим значение функции в границах отрезка и в этой точке:

$y(0) = 5;\ y(2) = -\dfrac{1}{3};\ y(3) = 2$. Таким образом, $\min\limits_{[0;3]} y = -\dfrac{1}{3}; \max\limits_{[0;3]} y = 5$

Общая схема исследования функции.

1. ***Найти область определения функции Д(х).***
2. ***Найти точки пересечения графика функции с осями координат Ох и Оу.***
3. ***Исследовать функцию на периодичность.***
4. ***Исследовать функцию на четность и нечетность.***
5. ***Исследовать функцию на наличие асимптот.***
6. ***Исследовать функцию на возрастание и убывание.***
7. ***Исследовать функцию на экстремум.***
8. ***Исследовать функцию на выпуклость и точки перегиба***

<u>Пример 1.</u> Исследовать функцию и построить ее график: $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Решение.

Функция определена и непрерывна в интервале (0;+∞). В граничной точке $x = 0$ области определения функция имеет бесконечный разрыв, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

Так как в точке $x = 0$ функция имеет бесконечный разрыв, то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой. Найдем уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$ (если она существует).

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x^2} = 0;$$

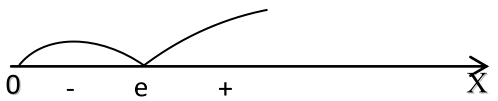
$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(При нахождении пределов воспользовались правилом Лопиталя).

Итак, $k = b = 0$ и уравнение асимптоты $y = 0$. Таким образом, график имеет в качестве асимптот оси координат.

Найдем производную функции и критические точки:

$y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Стационарная критическая точка: $x = e$. Исследуем знак производной на интервалах(0;e) и (e;∞).



Составим таблицу:

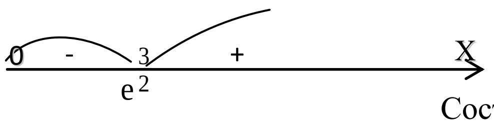
x	(0;e)	e	(e;+∞)
y\`	+	0	-
y	возрастает	max	убывает

Экстремум функции: $y_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$.

Найдем вторую производную и значения x, при которых график может иметь точку перегиба:

$$y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}, \quad y'' = 0 \text{ при } x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Определим знак второй производной в интервалах $(0; e^{\frac{3}{2}})$ и $(e^{\frac{3}{2}}; +\infty)$:

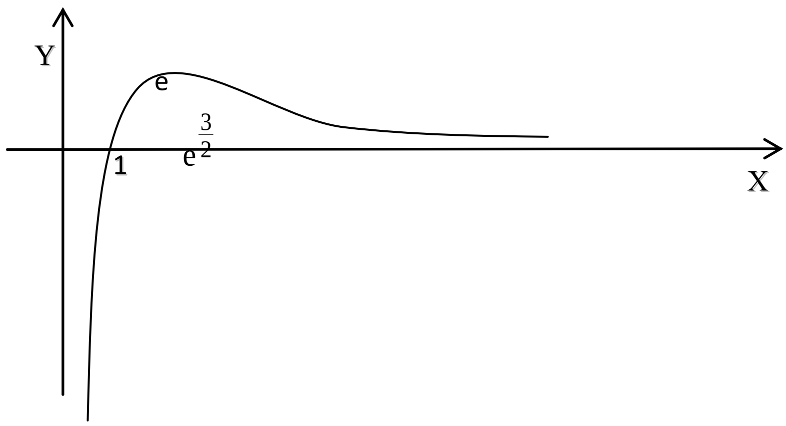


Составим таблицу:

x	$(0; e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}48$	$(e^{\frac{3}{2}}; \infty)$
y``	-	0	+
график	выпуклый	точка перегиба	вогнутый

$y(e^{\frac{3}{2}}) = 3/(2e^{\frac{3}{2}}) \approx 0{,}33$

График пересекает ось абсцисс в точке (1;0). Точек пересечения с осью ординат нет. Строим эскиз графика функции:



<u>Пример 2.</u> Исследовать функцию и построить ее график. $y = \frac{x}{1 - x^2}$

Решение:

1. Функция не определена при x=1и x=-1. Область ее определения состоит из трех интервалов (-∞;-1), (-1;1), (1;+∞), а график из трех ветвей.
2. Если x=0, тоy=0. График пересекает ось Oy в точке O (0;0); если y=0, то x=0. График пересекает ось Ox в точке O(0;0).
3. Функция знакоположительна (y>0) в интервалах (-∞;-1) и (0;1); знакоотрицательна — в (-1;0) и (1;+∞).
4. Функция $y = \frac{x}{1 - x^2}$ является нечетной, т. к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1 - (-x)^2} = -\frac{x}{1 - x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при x≥0.

5. Прямые x=1 и x=-1 являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

(k=0 при x→+∞ и при x→-∞),

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1-x^2} - 0x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение y = 0. Прямая y = 0 является асимптотой и при x → +∞, и при x → -∞.

6. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

то y'>0 в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

7. Исследуем функцию на экстремум. Так как

$$y' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

то критическими точками являются точки x1 = 1 и x2 = -1 (y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

8. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y'':

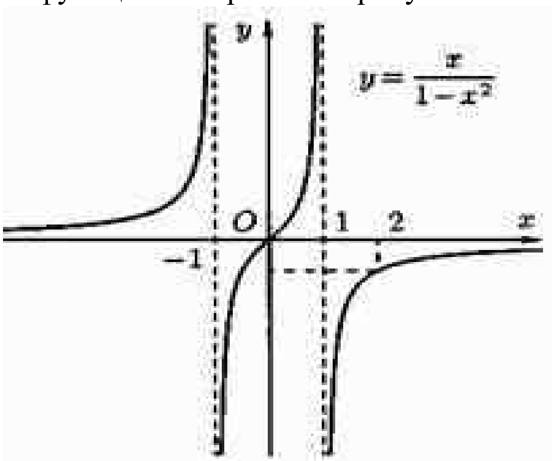
$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(1-x^2)^2 - (x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках x1=0, x2=-1, x3=1. На рисунке представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции.

Точка O (0,0) — точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах (-1;0) и (1;∞); выпуклый вниз на интервалах (-∞;-1) и (0;1).

График функции изображен на рисунке.



Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224 с.

2. Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Станишевская Л. В.. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа, 2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Задание 1.

Исследовать на экстремум функцию:

1. а) $y = x\ln x$ б) $y = x^2(x-6)$
2. а) $y = x^2e^x$ б) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$
3. а) $y = (x^2 - x)e^x$ б) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$
4. а) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ б) $y = 3 - 2x^2 - x^4$
5. а) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$ б) $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$
6. а) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ б) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$
7. а) $y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ б) $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$
8. а) $y = \dfrac{x^2+2x}{e^x}$ б) $y = \sin x + \cos x$
9. а) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ б) $y = 3x + \mathrm{tg}\,x$
10. а) $y = \sqrt{x}e^x$ б) $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$

Задание 2.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции f(x) на отрезке [a;b]:

1. $f(x) = x^3-12x+7$; [0; 3].	6. $f(x) = x^4+4x$; [-2; 2].
2. $f(x) = x^5-(5/3)x^3+2$; [0; 2].	7. $f(x) = (\ \bar{}\ /2)x-\sin x$; [0; π/2].
3. $f(x) = (\ \bar{}\ /2)x+\cos x$; [0; π/2].	8. $f(x) = 81x-x^4$; [-1; 4].
4. $f(x) = 3x^4-16x^3+2$; [-3; 1].	9. $f(x) = 3-2x^2$; [-1; 3].
5. $f(x) = x^3-3x+1$; [1/2; 2].	10. $f(x) = x-\sin x$; [-π;π].

Задание 3.

Исследовать функцию с помощью производной и построить её график

$f(x) = 1 - 3^{x+1}$	$f(x)=x^3 + 3x^2 - 9x + 4$	$f(x) = x^4 - 2x^5 + 5$	$f(x) = 4x^4 - 2x + 1$
$f(x) = e^x + 1$	$f(x) = 1 - 3^{x+1}$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$	$f(x) = x^5 -5x$
$f(x) = x^{-2} - 2x$	$f(x) = 4x^3 + 6x^2$	$f(x) = 4x^4 - 2x + 1$	$y = x^2 - x$
$y = \ln x - x$	$y = 2 + 5x^3 - 3x^5$	$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$	$f(x) = x + e^{-x}$
$f(x) = 0.1x^5 - -x^3 + 2x$	$f(x) = x - \overline{=}$	$y = x + \sqrt{3-x}$	$f(x) = \sqrt{x^3} + 1$
$f(x) = \overline{\qquad}$	$f(x) = -x^3 + 4$	$f(x) = -x^3(x + 4)$	$f(x) = -$

Раздел 3. Интегральное исчисление
Тема 3.1. Методы интегрирования

Кол-во часов: 4 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков вычислений неопределенного и определенного интегралов методом непосредственного интегрирования, методом замены переменной и формирование умения применять таблицу интегралов.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ, тестирование

Виды заданий:

1. Найти неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования;
2. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной.
3. Найти определенный интеграл методом непосредственного интегрирования;
4. Найти определенный интеграл методом замены переменной.

Определение 1. Функция **F(x)** называется ***первообразной*** для функции **f(x)**, если производная от функции **F(x)** равна **f(x)** [**F ′(x)** = **f(x)**] или дифференциал ее равен **f(x)dx** [**dF(x) =f(x)dx**].
Отыскание первообразной функции по заданной ее производной **f(x)** или по дифференциалу **f(x)dx** есть действие обратное дифференцированию – ***интегрирование***.

Определение 2. Совокупность функций **F(x) +C**, первообразных для функции **f(x)** или для дифференциала **f(x)dx,** называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ если } d\,[F(x) + C] = f(x)dx,$$

где **f(x)-** подынтегральная функция;
f(x)dx – подынтегральное выражение;
C – произвольная постоянная неопределенного интеграла.

Определение 3. Приращение F(b)- F(a)первообразных функций при изменении аргумента x от x=a до x=b называется определенным интегралом и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\mathrm{I}_a^b = F(b) - F(a)$$
,

где a- нижний предел определенного интеграла
b- верхний предел.

Свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольным постоянным: $\int dF(x) = F(x) + C$.
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:
$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$
3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:
$$\int[f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$$
4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx$.

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx = x + C$	
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (n ≠ -1)	
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	3 а). $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
	3 б). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	4 а). $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx}}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	5 а). $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$
6. $\int cos x dx = \sin x + C$	6 а). $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	7 а). $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	8 а). $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} tgkx + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	9 а). $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} ctgkx + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	10 а). $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
	10 б). $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b}{a} x + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	11 а). $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
	11 б). $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} arctg \frac{b}{a} x + C$

<u>Пример 1.</u> Интегрирование, которое можно провести с помощью табличных интегралов (после преобразования подынтегральной функции, если это необходимо), будем называть непосредственным интегрированием.

1. $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$ (по 2)

2. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} dx = \int (1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \int dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + C$ (по 1 и 2)

3. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$ (по 6 а))

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - 2^2 x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + C$ (по 10 б))

5. $\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \frac{dx}{x^2 - 2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$ (по 3 а))

6. $\int_2^4 \frac{dx}{x} = \ln x|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{1}{2}$

<u>Пример 2.</u> Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки).

1. $\int \sin^5 x \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$

Пусть t = sinx.
Тогда dt = cosxdx.

2. $\int \frac{dx}{(4x+1)^4} = \int \frac{dt\ \ /4}{t^4} = \frac{1}{4}\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{-1}{12t^3} + C = -\frac{1}{12(4x+1)^3} + C$

Пусть t = 4x+1.
Тогда dt =4dx
dx = dt/4

3. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

Пусть t = lnx.

Тогда dt = $\frac{1}{x}$ dx

4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sqrt{3\sin x + 1}\cos x dx = \int_1^4 9\sqrt{t}\frac{dt}{3} = 3\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}|_1^4 = 2\sqrt[2]{t^3}|_1^4 = 2(2^3 - 1) = 14$$

Пусть $3\sin x + 1 = t$.

Тогда $3\cos x dx = dt$,

$\cos x dx = \frac{dt}{3}$

$t_в = 3\sin\frac{\pi}{2} + 1 = 3\cdot 1 + 1 = 4$

$t_н = 3\sin 0 + 1 = 3\cdot 0 + 1 = 1$.

Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224 с.
2. Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Станишевская Л. В.. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа,2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Задание 1.

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования

1. $\int\left(6x^2 - 4x + 1 - \frac{3}{x}\right)dx$	1. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$ 2. $\int x^{11}dx$	1. $\int\left(x^7 + \sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$

2.	$\int\left(2x^3-\frac{1}{2\sqrt{3x}}\right)dx$	3.	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$	2.	$\int\left(\frac{x}{5}+\frac{4}{1+x^2}-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$
3.	$\int\left(\frac{7}{1+x^2}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+e^x\right)dx$	4.	$\int\sqrt[5]{x^4}dx$	3.	$\int\left(\frac{4}{x}+x^5-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$
4.	$\int(2^x-4^x)dx$	5.	$\int\frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+5}}$	4.	$\int\left(x^5+\sqrt[3]{x}-\frac{5}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$
5.	$\int\left(3^x-\frac{2}{1+x^2}\right)dx$	6.	$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$	5.	$\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}-\frac{8}{\cos^2 x}\right)dx$
6.	$\int(2e^x+x)dx$	7.	$\int(a+3bx)^4dx$	6.	$\int(2\cos x-5x^4)dx$
7.	$\int(5x^2-3x)dx$	8.	$\int\frac{4}{5\sqrt{1-x^2}}dx$	7.	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$
8.	$\int(x^3-\sqrt[3]{x^2}+e^x)dx$	9.	$\int(2a+3bx)^2dx$	8.	$\int(1-2x+3x^2)dx$
9.	$\int\left(\frac{2a}{\sin^2 x}-\frac{3b}{\cos^2 x}\right)dx$	10.	$\int\frac{dx}{(x-4)^3}$	9.	$\int\left(\frac{4}{\sin^2 x}-\sin x+\frac{4}{1+x^2}\right)dx$
10.	$\int\left(\frac{3a}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2b}{1+x^2}\right)dx$	11.	$\int(a+b)\sqrt{x}dx$	10.	$\int\left(\cos\frac{x}{3}-\sin 3x\right)dx$
11.	$\int(x^3-\sqrt[3]{x^2}+e^{3x})dx$	12.	$\int\frac{dx}{3x+1}$	11.	$\int 2^{-x}dx$
12.	$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 3x\right)dx$	13.	$\int\frac{5dx}{\cos^2 x}$	12.	$\int 2^x dx$
13.	$\int\left(\frac{4}{1+x^2}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$	14.	$\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x}dx$	13.	$\int\sin(2x-4)dx$
14.	$\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$	15.	$\int\frac{2+x}{\sqrt{x}}dx$	14.	$\int 3\sin x dx$
15.	$\int\left(2x^3+3\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x^3}}+\sqrt{2}\right.$	16.	$\int\frac{5-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$	15.	$\int\cos x dx$
16.	$\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$	17.	$\int\frac{x\sqrt{x}-x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}dx$	16.	$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
17.	$\int\left(5-\frac{3}{\cos^2 x}+2x^3\right)dx$	18.	$\int\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}}dx$	17.	$\int\left(e^x+5^x-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$
18.	$\int(7^x-3e^x)dx$	19.	$\int\frac{4b}{\sqrt{1-x^2}}dx$	18.	$\int\frac{dx}{x^2+6x+9}$
19.	$\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+e\right)dx$	20.	$\int\frac{dx}{1+2x}$	19.	$\int\frac{5dx}{1+3x^2}$
20.	$\int\left(3\cos x-\frac{x}{5}-\frac{5}{x}\right)dx$			20.	$\int\left(e^{3x}+x^2-\frac{2}{x}\right)dx$

Задание 2.
Найти неопределенные интегралы методом подстановки

1. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$	1. $\int \frac{x+0{,}5}{\sqrt{x^2+x+7}}dx$	1. $\int (x^2+1)e^{x^3+3x+2}dx$
2. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$	2. $\int e^{x^2+2x-1}\left(x^2+\frac{2}{3}\right)dx$	2. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$
3. $\int \frac{xdx}{x^2-1}$	3. $\int e^{1+\sin x}\cos x dx$	3. $\int \frac{4x^2dx}{1+x^3}$
4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+4}}$	4. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2-1}}$	4. $\int \frac{5x^3dx}{14x^4+5}$
5. $\int \frac{xdx}{2^{x^2}}$	5. $\int \frac{\ln xdx}{x}$	5. $\int e^{x^2+3x+1}(2x+3)dx$
6. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$	6. $\int \frac{\cos xdx}{\sin x}$	6. $\int \frac{x^2dx}{2x^3+1}$
7. $\int \frac{6^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	7. $\int \frac{xdx}{9+4x^2}$	7. $\int 3^{x^3}x^2dx$
8. $\int \frac{xdx}{3x^2+1}$	8. $\int \frac{6\sin xdx}{\cos^4 x}$	8. $\int \frac{3\cos 5xdx}{7\sin 5x+16}$
9. $\int e^{-(2x+3)}xdx$	9. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$	9. $\int e^{\sin x}\cos xdx$
10. $\int \frac{x^2}{4-2x^3}dx$	10. $\int \frac{6x^2dx}{4x^3+5}$	10. $\int (x^2-3)^3xdx$
11. $\int e^{-\mathrm{tg}\,x}\frac{dx}{\cos^2 x}$	11. $\int \frac{xdx}{1+4x^2}$	11. $\int x^2\sqrt{1+2x^3}\,dx$
12. $\int x^2 3x^3dx$	12. $\int \frac{2x^3dx}{2x^4+5}$	12. $\int e^{\cos x}\sin xdx$
13. $\int (tg\,2x+ctg\,2x)dx$	13. $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}dx$	13. $\int \frac{3\sin xdx}{5\cos x-6}$

Задание 3.
Найти определенные интегралы

1 ВАРИАНТ	2 ВАРИАНТ	3 ВАРИАНТ
1. $\int_1^2 \frac{2\chi^2+1}{\chi^2}d\chi$;	1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin\chi d\chi}{3-\cos\chi}$;	1. $\int_0^3 e^{3x}d\chi$;
2. $\int_0^3 (1-2\chi+3\chi^2)d\chi$;	2 . $\int_{-4}^0 \sqrt{2\chi+9d\chi}$;	2. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{5dx}{\cos^2 2x}$;
3. $\int_0^1 \frac{d\chi}{1+\chi^2}$;	3. $\int_0^{-\frac{1}{2}} e^{-2x}d\chi$;	3. $\int_{-1}^1 (x^3+3^x)dx$;
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3\chi d\chi$;	4. $\int_0^3 (1-2\chi+3\chi^2)d\chi$;	4. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{5dx}{\cos^2 2x}$;
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 4\chi d\chi$.	5. $\int_0^{\pi} \sin\chi\cos^2\chi d\chi$	5. $\int_0^1 3x^5dx$.

4 ВАРИАНТ	5 ВАРИАНТ	6 ВАРИАНТ
1. $\int_4^5 \frac{3dx}{2\sqrt{x}}$; 2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\varphi\right)d\varphi$; 3. $\int_1^2 4x^3dx$; 4. $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; 5. $\int_{-a}^{a} x^3dx$.	1. $\int_2^3 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; 2. $\int_0^2 3x^4dx$; 3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+2x}}$; 4. $\int_3^6 \frac{3dx}{5x}$; 5. $\int_0^1 (1-3u^2)du$.	1. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$; 2. $\int_{-2}^3 x^2dx$; 3. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 4. $\int_e^{\pi} (\sin x-e^x)dx$; 5. $\int_0^1 2\sqrt[5]{t^3}dt$.

7 ВАРИАНТ	8 ВАРИАНТ	9 ВАРИАНТ
1. $\int_0^1 (4x^3-2x-1)dx$; 2. $\int_2^3 4^x dx$; 3. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{7dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 4. $\int_1^2 (2x+x^{-2})dx$; 5. $\int_{-4}^{0} \sqrt{2x+9}dx$.	1. $\int_1^3 \frac{4dx}{x}$; 2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx$; 3. $\int_0^3 (1-2x+3x^2)dx$; 4. $\int_0^{-\frac{1}{2}} e^{-2x}dx$; 5 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin xdx$.	1. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{7dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2. $\int_4^5 (4-x)^3dx$; 3. $\int_1^2 (2x+3)dx$; 4. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{2+2x^2}$; 5. $\int_1^4 5\sqrt{x^3}dx$.

10 ВАРИАНТ	11 ВАРИАНТ	12 ВАРИАНТ
1. $\int_1^8 \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}dx$; 2. $\int_1^3 e^{2x}dx$; 3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$; 4. $\int_8^{27} \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}}$; 5. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.	1. $\int_1^5 \frac{dx}{x}$; 2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4dx}{\sin^2 x}$; 3. $\int_1^2 (x^2-3x)dx$; 4. $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}dx$; 5. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.	1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos xdx$; 2. $\int_1^2 (x^3+2x)dx$; 3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$; 4. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 3(x^2+1)dx$; 5. $\int_0^3 (1-2x+3x^2)dx$.

13 ВАРИАНТ	14 ВАРИАНТ	15 ВАРИАНТ
1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\cos t dt$; 2. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$; 4. $\int\limits_{1}^{2} (2x+3)dx$; 5. $\int\limits_{8}^{27} \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}}$.	1. $\int\limits_{\frac{\pi}{0}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; 2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{2x^3+1}{x^2}dx$; 3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$; 4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 5. $\int\limits_{1}^{2} (2x+3x^2)dx$.	1. $\int\limits_{1}^{2} e^{3x}dx$; 2. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$; 4. $\int\limits_{1}^{4} 5\sqrt{x^3}dx$; 5. $\int\limits_{0}^{1} (3x^2-4x+1)dx$.
16 ВАРИАНТ	**17 ВАРИАНТ**	**18 ВАРИАНТ**
1. $\int\limits_{1}^{2} \frac{2x^3+1}{x^2}dx$; 2. $\int\limits_{1}^{2} e^{5x}dx$; 3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 5\cos x dx$; 4. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{5dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 5. $\int\limits_{0}^{1} (6x^2-3x)dx$.	1. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4dx}{\sin^2 x}$; 2. $\int\limits_{0}^{1} 3^x dx$; 3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$; 4. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 5. $\int\limits_{0}^{1} (3x^2-4x+1)dx$.	1. $\int\limits_{1}^{4} e^{3x}dx$; 2. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{7dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\int\limits_{1}^{3} \frac{5dx}{x}$; 4. $\int\limits_{0}^{1} (4x^3-2x-1)dx$; 5. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx$

Раздел 4. Линейная алгебра

Тема 4.1. Системы линейных уравнений

Кол-во часов: 2 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков вычисления определителей второго, третьего и высших порядков и решения систем линейных уравнений методами Крамера и Гаусса.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ

Виды заданий:

1. Решить систему методом Гаусса

Матрица – это прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк и **n** столбцов:

,

где – **элемент матрицы** (i – номер строки (i = 1,2,3,…,m); j – номер столбца (j = 1,2,3,…,n)).

Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют **главную диагональ**. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего правого угла, образуют **побочную диагональ**.

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

,

где – коэффициенты системы, – свободные члены.

Систему линейных алгебраических уравнений можно представить в матричной форме:

,

где – матрица системы, – вектор-столбец свободных членов, – вектор-столбец неизвестных:

, , .

Расширенной матрицей системы называется матрица, составленная из коэффициентов системы и свободных членов:

.

Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений

В отличие от рассмотренных выше методов решения систем линейных алгебраических уравнений, метод Гаусса является наиболее универсальным. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений:

.

Все решение системы линейных алгебраических уравнений разбивается на два этапа (хода). На первом этапе (прямой ход) с помощью элементарных преобразований строк система приводится к ступенчатому (в частности, к треугольному) виду. Для этого последовательно, начиная со второго уравнения системы, сначала исключают переменную . Далее, начиная с третьего уравнения системы, из них исключают переменную . Процесс производят до того момента, когда система примет следующий вид:

.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы. Определение неизвестных начинается с последнего уравнения системы. Сначала определяют значение неизвестной . Далее из предпоследнего уравнения находят значение неизвестной и т.д. Последним определяется значение неизвестной .

Пример:

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к треугольному виду (прямой ход):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & -5 & 1 \\ 4 & 9 & -5 & 7 \end{array}\right) \boxed{-2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 4 & 9 & -5 & 7 \end{array}\right) \boxed{-4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -11 & 7 & -1 \end{array}\right) \boxed{-\frac{11}{3}} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{10}{3}} & \mathbf{\frac{30}{3}} \end{array}\right)$$

Таким образом, получаем ступенчатую систему уравнений:

Определяем неизвестные:

- из третьего уравнения системы:

$\rightarrow$

- из второго уравнения системы:

$\rightarrow$

- из первого уравнения системы:

$\rightarrow$

Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224 с.
2. Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Станишевская Л. В.. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа,2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Задание 1.

Решить системы линейных уравнений Методом Гаусса

Вариант	Задание
1	а) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y-3z=-10 \\ x+3y-3z=13 \\ x+y-z=7 \end{cases}$
2	а) $\begin{cases} -x+3y+2z=4 \\ 2x-y+3z=6 \\ -2x+2y-z=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-4 \\ x+2y-3z=9 \\ 2x-2y+2z=7 \end{cases}$
3	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=-5 \\ 2x+2y-3z=1 \\ x-2y+z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+z=-4 \\ x+2y-z=11 \\ 2x-3y+2z=-2 \end{cases}$
4	а) $\begin{cases} x-3y+z=-7 \\ 2x+y-2z=4 \\ -2x+2y-3z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x-2y+2z=-4 \\ 2x+y-2z=-1 \end{cases}$
5	а) $\begin{cases} x+3y-z=8 \\ 2x-y+4z=-1 \\ -2x+2y+z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x+4y-z=5 \\ 2x-2y+3z=-3 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$
6	а) $\begin{cases} 2x-2y+3z=4 \\ -x+2y+z=-6 \\ 3x+y-2z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-3 \\ x+2y-4z=7 \\ 2x+y+2z=-1 \end{cases}$
7	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ x-2y+z=-3 \\ x+3y-z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x-2y+z=8 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases}$
8	а) $\begin{cases} 4x-y+z=6 \\ x+2y-2z=-3 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+3z=4 \\ -2x+2y-z=-7 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$
9	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-1 \\ 3x+y-2z=7 \\ -x+2y+z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=9 \\ -2x-3y+z=-5 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$
10	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-6 \\ x+2y-z=8 \\ 3x-2y+2z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 3x-y+2z=7 \\ -x+3y-2z=5 \end{cases}$

Раздел 5. Дискретная математика

Тема 5.1. Элементы теории графов

Кол-во часов: 2 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков по выполнению действий над графами

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ

Виды заданий:

1. Найти объединение графов;
2. Найти матрицу инциденции, матрицу смежности.

Определение. ***Обыкновенным графом*** называется пара $G=(V,E)$, где V - конечное множество, E - множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы множества V называются ***вершинами*** графа, элементы множества E - его ***ребрами.***
Слегка модифицируя это определение, можно получить определения других типов графов без кратных ребер: если заменить слово «неупорядоченных» словом «упорядоченных», получится определение ориентированного графа без петель, если убрать слово «различных», получится определение графа с петлями. Ориентированный граф часто называют ***орграфом.***

Смежность, инцидентность, степени

Если в графе имеется ребро $e=(a,b)$, то говорят, что вершины a и b ***смежны*** в этом графе, ребро e ***инцидентно*** каждой из вершин a, b, а каждая из них ***инцидентна*** этому ребру.

Множество всех вершин графа, смежных с данной вершиной a, называется ***окрестностью*** этой вершины и обозначается через $V(a)$.

На практике удобным и эффективным при решении многих задач способом задания графа являются так называемые ***списки смежности***. Эти списки могут быть реализованы различными способами в виде конкретных структур данных, но в любом случае речь идет о том, что для каждой вершины a перечисляются все смежные с ней вершины, т.е. элементы множества $V(a)$. Такой способ задания дает возможность быстрого просмотра окрестности вершины.

Число вершин, смежных с вершиной a, называется ***степенью*** вершины a и обозначается через $\deg(a)$.

Вершину степени 0 называют ***изолированной.***

Граф называют ***регулярным*** степени d, если степень каждой его вершины равна d.

Набор степеней графа - это последовательность степеней его вершин, выписанных в неубывающем порядке.

Графы и матрицы

Пусть G - граф с n вершинами, причем $VG=\{1,2\ldots n\}$. Построим квадратную матрицу A порядка n, в которой элемент A_{ij}, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, определяется следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,j) \in EG, \\ 0, \text{ если } (i,j) \notin EG. \end{cases}$$

Она называется ***матрицей смежности*** графа. Матрицу смежности можно построить и для ориентированного графа, и для неориентированного, и для графа с петлями. Для ***обыкновенного графа*** она обладает двумя особенностями: из-за отсутствия петель на главной диагонали стоят нули, а так как граф неориентированный, то матрица симметрична относительно главной диагонали. Обратно, каждой квадратной матрице порядка n, составленной из нулей и единиц и обладающей двумя указанными свойствами, соответствует ***обыкновенный граф*** с множеством вершин $\{1, 2 \ldots n\}$.

Другая матрица, ассоциированная с графом - это ***матрица инцидентности*.** Для ее построения занумеруем вершины графа числами от 1 до n, а ребра - числами от 1 до m. Матрица инцидентности I имеет n строк и m столбцов, а ее элемент I_{ij} равен 1, если вершина с номером i инцидентна ребру с номером j, в противном случае он равен нулю.

<u>Пример.</u> Найдем матрицу смежности для графа, изображенного на рис.1

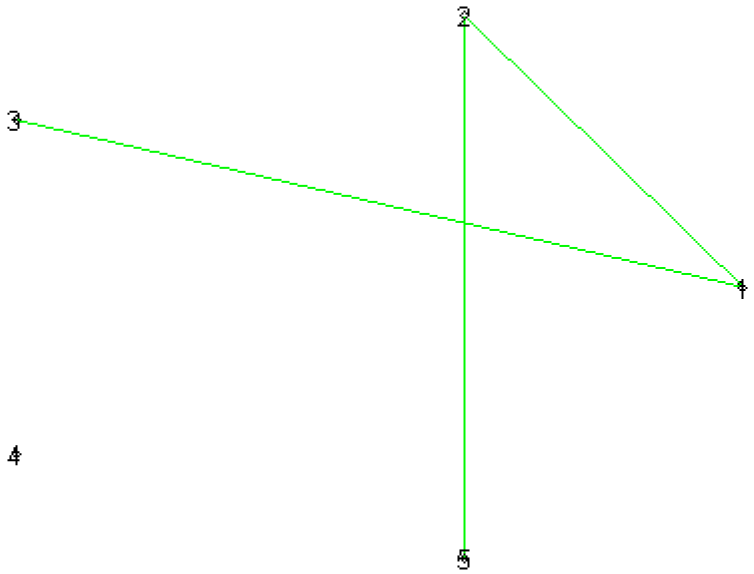


Рис.1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

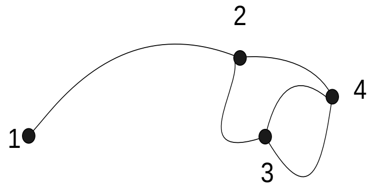
Рекомендуемая литература:

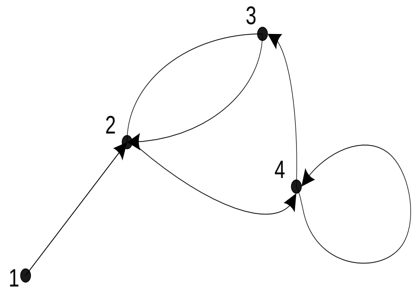
1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224 с.
2. Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Станишевская Л.В. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа,2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Задание 1.

Построить матрицу смежности и инцидентности для графов:





Задание 2.

Нарисовать орграф по заданной матрице смежности:

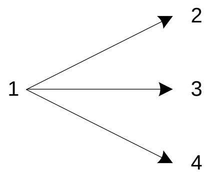
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3.

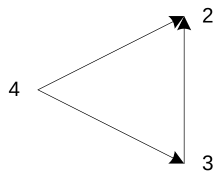
Построить матрицы смежности и инцидентности графа G: $G_1 \cup G_2 \cup G_3$

Вариант1.

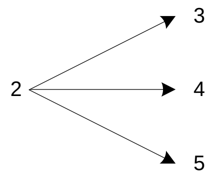
G_1



G_2

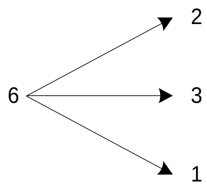


G_3

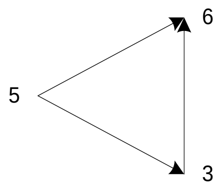


Вариант 2.

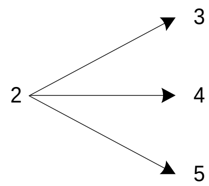
G_1



G_2

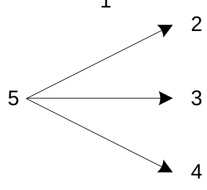


G_3

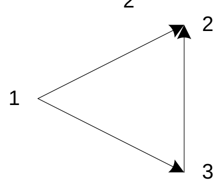


Вариант 3.

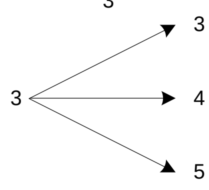
G_1



G_2



G_3



Раздел 6. Комплексные числа

Тема 1.1.Комплексные числа

Кол-во часов: 2 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков работы с комплексными числами и обобщение знаний по теме

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ, тестирование

Виды заданий:

1. Выполнить действия с комплексными числами (сложение, вычитание, умножение и деление)
2. Вычислить модуль комплексного числа
3. Найти корни уравнения

1. ***Комплексными числами*** называют выражения вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, i – некоторый символ такой, что $i^2=-1$. Число a называется ***действительной частью*** комплексного числа, число b – его ***мнимой частью***, число i – ***мнимой единицей.*** Название «комплексные» происходит от слова «составные», т. е. обозначение дано по виду выражения $a+bi$.

2. ***Корень уравнения*** $x^2+1=0$ на множестве комплексных чисел - комплексное число i такое, что $i^2=-1$.

Если $D=b^2-4ac<0$, то $\sqrt{D}=\sqrt{b^2-4ac}=i\sqrt{|b^2-4ac|}$.

Корни квадратного уравнения, если дискриминант $D<0$ вычисляются по формуле:

$$z_{1,2}=\frac{-b}{2a}\pm i\sqrt{|b^2-4ac|}.$$

Корни квадратного уравнения с комплексным неизвестным $z^2=a$, где $a<0$,

$z_{1,2}=\pm i\sqrt{a}$.

Если $a<0$, то $\sqrt{a}=i\sqrt{|a|}$

3. ***Модулем комплексного числа*** $z=a+bi$ называется число $\sqrt{a^2+b^2}$. Оно обозначается |z|, т. е. $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

4. Число, ***противоположное*** числу $z=a+bi$ есть $-z=-(a+bi)=-a-bi$.

5. ***Сопряженным*** с числом $z=a+bi$ называется комплексное число $a-bi$, которое обозначается $\bar{z}$.

Действия над комплексными числами

- ***Суммой*** двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)i$, т. е. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
- ***Произведением*** двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(ac-bd)+(ad+bc)i$, т. е. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

- ***Частным*** комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число, которое вычисляется по формуле $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\times\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

Чтобы найти частное $\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}$ надо числитель и знаменатель этой дроби умножить на число, сопряженное со знаменателем.

Тригонометрическая форма комплексного числа

$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{a^2+b^2}$, т. е.

$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где φ — аргумент комплексного числа.

Произведение комплексных чисел в тригонометрической форме равно

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

.При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

№ 1 Решите уравнение

1) $(-1+2i)+z=5-\frac{1}{2}i$.

Решение:

$(-1+2i)+z=5-\frac{1}{2}i$,

$z=5-\frac{1}{2}i-(-1+2i)$,

$z=5-\frac{1}{2}i+1-2i$,

$z=6-2\frac{1}{2}i$.

Ответ: $6-2\frac{1}{2}i$.

2) $(\sqrt{2}+i)-z=4+\sqrt{2}i$.

Решение:

$(\sqrt{2}+i)-(4+\sqrt{2}i)=z$,

$\sqrt{2}+i-4-\sqrt{2}i=z$,

$(\sqrt{2}-4)+(1-\sqrt{2})i=z$.

Ответ: $(\sqrt{2}-4)+(1-\sqrt{2})i$.

№ 2 Найдите частное двух комплексных чисел

1) $\frac{1+2i}{3-2i}$.

Решение:

$$\frac{1+2i}{3-2i}=\frac{(1+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{3+2i+6i+4i^2}{9-4i^2}=\frac{3+8i-4}{9+4}=\frac{-1+8i}{13}=-\frac{1}{13}+\frac{8}{13}i$$

Ответ: $-\frac{1}{13}+\frac{8}{13}i$.

2) $\frac{-7+2i}{5-4i}$.

Решение:

[illegible]

Ответ: $\frac{43}{41}\frac{18}{41}i$.

№ 3 Вычислите

1) $\frac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$.

Решение:

[illegible]

[illegible]

Ответ: $\frac{4}{5}+\frac{22}{5}i$.

2) $\frac{3-4i}{(1+i)(2-i)}$.

Решение:

$$\frac{3-4i}{(1+i)(2-i)}=\frac{3-4i}{(2-i^2)+(-1i+2i)}=\frac{3-4i}{3+i}=\frac{3-4i}{3+i}=\frac{(3-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{9-3i-12i+4i^2}{9+1}=\frac{9-15i-4}{10}=$$

$$=\frac{5-15i}{10}=\frac{1-3i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

Ответ: $-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$.

№ 4 Вычислите

1) $(3+2i)^2$.

Решение:

[illegible].

Ответ: $5+12i$.

2) $(2-3i)^2$.

Решение:

[illegible].

Ответ: $-5-12i$.

3) $(2-i)^3$.

Решение:

[illegible].

Ответ: $2-11i$.

4) $(3+4i)^3$.

Решение:

[illegible].

Ответ: $-9+44i$.

№ 5 Вычислите

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

Решение:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=\frac{(1-i)^3}{(1+i)^3}=\frac{1-3i+3i^2-i^3}{1+3i+3i^2+i^3}=\frac{1-3i-3+i}{1+3i-3-i}=\frac{-2-2i}{-2+2i}=\frac{(-2-2i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}=$$

$$=\frac{(-2-2i)^2}{4+4}=\frac{4+8i+4i^2}{8}=\frac{4+8i-4}{8}=\frac{8i}{8}=i$$

Ответ: i.

№ 6 Вычислите

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4.$$

Решение:

[illegible]

Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224с.
2. Майоровская С. В., Поддубная О. Н., Станишевская Л. В.. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа,2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Вариант 1	Ответы	Вариант 2	Ответы
1. Определить действительную и мнимую части комплексного числа			
а) $6+5i$ б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$	а) д. ч.: 6, м. ч.: 5 б) д. ч.: $\sqrt{2}$, м. ч.: $\sqrt{3}$	а) $-\frac{1}{3}+\sqrt{2}i$ б) $2-4i$	а) д. ч.: $-\frac{1}{3}$, м. ч.: $\sqrt{2}$ б) д. ч.: 2, м. ч.: 4
2. Найти сумму комплексных чисел			
а) $(2+4i)+(1+3i)$ б) $(1-3i)+(2-5i)$	а) $3+7i$ б) $3-8i$	а) $(-3+\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)$ б) $(4+2i)+(5-i)$	а) $-1+0i$ б) $9+i$
3. Найти произведение комплексных чисел			
а) $(2+3i)(1+2i)$ б) $(-3-2i)(5-i)$	а) $-4+7i$ б) $-17-7i$	а) $(5-4i)(2-5i)$ б) $(-2+3i)(6+2i)$	а) $-10-33i$ б) $-18+14i$
4. Определить комплексное число, противоположное данному числу			
а) $5+3i$ б) $8-4i$	а) $-5-3i$ б) $-8+4i$	а) $-2+3i$ б) $4-i$	а) $2-3i$ б) $-4+i$
5. Назовите комплексное число, сопряженное с данным числом			
а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}i$ б) $-5+2i$	а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i$ б) $-5-2i$	а) $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}i$ б) $-3+7i$	а) $\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i$ б) $-3-7i$

6. Найдите модуль комплексного числа			
а) $5i$ б) $6+5i$ в) $3-i$	а) $\sqrt{25}=5$ б) $\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$ в) $\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$	а) $-2i$ б) $7-2i$ в) $4+i$	а) $\sqrt{4}=2$ б) $\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$ в) $\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$
7. Найдите разность комплексных чисел			
а) $(1+3i)-(-3+i)$ б) $(4+3i)-(4-3i)$	а) $4+2i$ б) $6i$	а) $(4+i)-(-5+i)$ б) $(7+2i)-(3-4i)$	а) $9+0i$ б) $4+6i$
8. Назовите корни квадратного уравнения			
а) $z^2=-9$ б) $z^2+0{,}04=0$	а) $z=\pm 3i$ б) $z=\pm 0{,}2i$	а) $z^2=-\sqrt{2}$ б) $16z^2=-49$	а) $z=\pm\sqrt[4]{2}i$ б) $z=\pm\frac{7}{4}i$
9. Укажите, какие из данных комплексных чисел равны			
$\frac{4}{6}+\sqrt{4}i$, $\frac{2}{3}+2i$, $\frac{1}{3}+i$	$\frac{4}{6}+\sqrt{4}i=\frac{2}{3}+2i$, т. к. $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}-4i$, $\sqrt[3]{27}-\sqrt{16}i$, $\sqrt{3}-2i$	$\sqrt{9}-4i=\sqrt[3]{27}-\sqrt{16}i$, т. к. $\sqrt{9}=\sqrt[3]{27}=3$, $4=\sqrt{16}$

Раздел 7. Теория вероятностей

Тема 7.1. Случайные величины

Кол-во часов: 2 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков вычисления числовых характеристик случайных величин

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ.

Пример обработки случайных величин

Задача 1

Исходные данные: студенты некоторой группы, состоящей из 30 человек сдали экзамен по курсу «Информатика». Полученные студентами оценки образуют следующий ряд чисел:

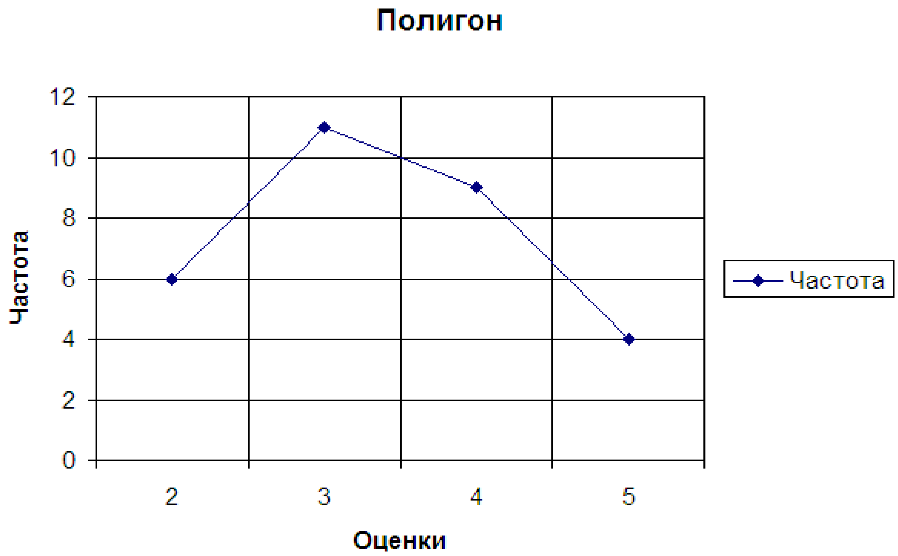
4	4	3	3	2	5	2	3	3	4
3	4	4	2	5	2	3	3	4	4
3	3	4	4	2	5	5	2	3	3

Решение:

I. Составим вариационный ряд

x	m_x	w_x	$m_x^{нак}$	$w_x^{нак}$
2	6	0,2	6	0,2
3	11	0,37	17	0,57
4	9	0,3	26	0,87
5	4	0,13	30	1
Итого:	30	1	—	—

II. Графическое представление статистических сведений.



III. Числовые характеристики выборки.

1. Среднее арифметическое

$$x_{ср} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 4}{30} = 3{,}36 \approx 3$$

2. Среднее геометрическое

$$x_{геом} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[30]{2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^9 \cdot 5^4} = 3{,}23 \approx 3$$

3. Мода $Mo = 3$

4. Медиана

222222333333333 | 333444444444445555

$$Me = \frac{3+3}{2} = 3$$

5. Выборочная дисперсия

$$S_в^2 = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{ср})^2 = \frac{6 \cdot (2-3)^2 + 11 \cdot (3-3)^2 + 9 \times (4-3)^2 + 4 \cdot (5-3)^2}{30} \approx 1{,}03$$

6. Выборочное стандартное отклонение

$$S_в = \sqrt{S_в^2} = \sqrt{1{,}03} \approx 1{,}017$$

7. Коэффициент вариации

$$v = \frac{S_в}{x_{ср}} = \frac{1{,}017}{3} \approx 0{,}34$$

8. Ассиметрия

$$As=\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{cp}\right)^3=\frac{6\cdot(2-3)^3+11\cdot(3-3)^3+9\times(4-3)^3+4\cdot(5-3)^3}{30}\approx 1{,}17$$

9. Коэффициент ассиметрии

$$\gamma_{As}=\frac{As}{S_в^3}=\frac{1{,}17}{1{,}017^3}=1{,}11$$

10. Эксцесс

$$Эх=\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{cp}\right)^4=\frac{6\cdot(2-3)^4+11\cdot(3-3)^4+9\times(4-3)^4+4\cdot(5-3)^4}{30}\approx 2{,}63$$

11. Коэффициент эксцесса

$$Эх=\frac{Эх}{S_в^4}-3=\frac{2{,}63}{1{,}017^4}-3\approx -0{,}53$$

Задача 2

Исходные данные: студенты некоторой группы написали выпускную контрольную работу. Группа состоит из 30 человек. Набранные студентами баллы образуют следующий ряд чисел

18	10	17	13	15	15	14	17	20	19
15	15	14	13	16	16	12	11	13	14
19	20	15	16	15	16	14	16	13	12

Решение

I. Так как признак принимает много различных значений, то для него построим интервальный вариационный ряд. Для этого сначала зададим величину интервала *h*. Воспользуемся формулой Стэрджера

$$h=\frac{R_B}{1+3{,}3221\cdot\lg(n)}=\frac{20-10}{1+3{,}3221\cdot\lg(30)}\approx 1{,}69\approx 2$$

Составим шкалу интервалов. При этом за верхнюю границу первого интервала примем величину, определяемую по формуле:

$$a_1=x_{\min}+h=10+2=12$$

Верхние границы последующих интервалов определим по следующей рекуррентной формуле:

$$a_j=a_{j-1}+h$$, тогда

$$a_2=a_1+h=12+2=14$$

$$a_3=a_2+h=14+2=16$$

$$a_4=a_3+h=16+2=18$$

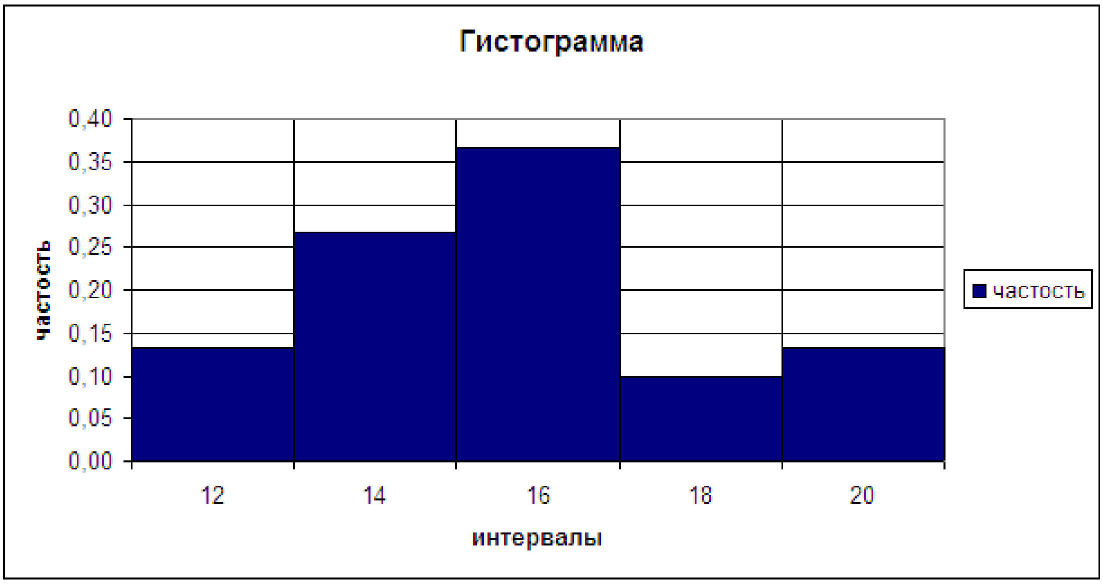
$$a_5=a_4+h=18+2=20$$

Построение шкалы интервалов заканчиваем, так как верхняя граница очередного интервала стала больше или равна максимальному значению выборки $x_{\max}=20$.

Далее строим интервальный вариационный ряд:

a_j	m_h	ω_h	$m_h^{нак}$	$\omega_h^{нак}$
12	4	0,13	4	0,13
14	8	0,27	12	0,4
16	11	0,37	23	0,77
18	3	0,1	26	0,87
20	4	0,13	30	1
Итого:	30	1	--	--

II. Графическое отображение интервального вариационного ряда



III. Числовые характеристики выборки

Для определения числовых характеристик выборки составим вспомогательную таблицу

№ п/п	x_i	$(x_i - x_{cp})$	$(x_i - x_{cp})^2$	$(x_i - x_{cp})^3$	$(x_i - x_{cp})^4$
1	10	-5	25	-125	625
2	11	-4	16	-64	256
3	12	-3	9	-27	81
4	12	-3	9	-27	81
5	13	-2	4	-8	16
6	13	-2	4	-8	16
7	13	-2	4	-8	16
8	13	-2	4	-8	16
9	14	-1	1	-1	1
10	14	-1	1	-1	1
11	14	-1	1	-1	1
12	14	-1	1	-1	1
13	15	0	0	0	0

14	15	0	0	0	0
15	15	0	0	0	0
16	15	0	0	0	0
17	15	0	0	0	0
18	15	0	0	0	0
19	16	1	1	1	1
20	16	1	1	1	1
21	16	1	1	1	1
22	16	1	1	1	1
23	16	1	1	1	1
24	17	2	4	8	16
25	17	2	4	8	16
26	18	3	9	27	81
27	19	4	16	64	256
28	19	4	16	64	256
29	20	5	25	125	625
30	20	5	25	125	625
Сумма:	**453**	—	**183**	**147**	**2991**

1. Среднее арифметическое $$x_{ср} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{453}{30} = 15{,}1 \approx 15$$

2. Среднее геометрическое

$$x_{геом} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[30]{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 20 \cdot 20} = 14{,}9 \approx 15$$

3. Мода $$Mo = 14 + 2 \cdot \frac{11-8}{2 \cdot 11 - 8 - 3} \approx 15$$

4. Медиана

10 11 12 12 13 13 13 13 14 14 14 14 15 15 **15** |**15** 15 15 16 16 16 16 16 17 17 18 19 19 20 20

$$Me = \frac{15+15}{2} = 15$$

5. Выборочная дисперсия

$$S_в^2 = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{ср}\right)^2 = \frac{183}{30} \approx 6{,}1$$

6. Выборочное стандартное отклонение

$$S_в = \sqrt{S_в^2} = \sqrt{6{,}1} \approx 2{,}5$$

7. Коэффициент вариации

$$v = \frac{S_в}{x_{ср}} = \frac{2{,}5}{15} \approx 0{,}17$$

8. Ассиметрия

$$As = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{ср}\right)^3 = \frac{147}{30} \approx 4{,}9$$

9. Коэффициент ассиметрии

$$\gamma_{As} = \frac{As}{S_в^3} = \frac{4{,}9}{2{,}5^3} = 0{,}325$$

10. Эксцесс

$$As = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{cp}\right)^3 = \frac{2991}{30} \approx 99{,}7$$

11. Коэффициент эксцесса

$$Эх = \frac{Эх}{S_в^4} - 3 = \frac{99{,}7}{2{,}5^4} - 3 \approx -0{,}32$$

Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224 с.
2. Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Станишевская Л.В. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа, 2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Задание 1.

Обработка случайных чисел

Используя генератор случайных чисел (http://service-online.su/text/generator_sluchajnyh_chisel/), сгенерировать 20 случайных чисел в диапазоне от 1 до 10. Полученные данные представить в виде таблицы, полигона и кумулятивной кривой. Определить для них числовые характеристики выборки: среднее арифметическое и среднее геометрическое, моду, медиану, выборочную дисперсию, выборочное стандартное отклонение, коэффициент вариации, ассиметрию, коэффициент ассиметрии, эксцесс, и коэффициент эксцесса.

Раздел 8. Математическая статистика

Тема 8.1. Статистическое оценивание

Кол-во часов: 2 часа

Теоретический блок

Целями работы являются закрепление навыков по вычислению математического ожидания, математической дисперсии, коэффициента вариации, асимметрии, выборочного отклонения

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Формы контроля: проверка работ, тестирование

Оценка полученных статистических данных возможна по многим критериям. Ниже приведены основные задачи, позволяющие провести такое статистическое оценивание.

Задача 1

Условие: цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение.

Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину *X*, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

где $(b-a)$ — длина интервала, в котором заключены возможные значения *X*; вне этого интервала $f(x) = 0$ В данной задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения *X*, равна 0,1, поэтому

$$f(x) = \frac{1}{0{,}1} = 10$$

Ошибка отсчета превысит 0,02 если она будет заключена в интервале (0,02; 0,08). Тогда

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow p(0{,}02 < X < 0{,}08) = \int_{0{,}02}^{0{,}08} 10dx = 0{,}6$$

Ответ: *p* = 0,6

Задача 2

Исходные данные: математическое ожидание и стандартное отклонение нормально распределенного признака *X* соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение.

Воспользуемся формулой

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Подставив $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$, $\sigma = 2$ получим

$$p(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

По таблице находим: $\Phi(2) = 0{,}4772$, $\Phi(1) = 0{,}3413$. Искомая вероятность $p(12 < X < 14) = 0{,}1359$

Задача 3

Исходные данные: непрерывный признак *X* распределен по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0{,}13; 0{,}7)$.

Решение.

Используем формулу

$$p(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Учитывая, что, по условию, $a = 0{,}13$; $b = 0{,}7$; $\lambda = 3$, получим

$$p(0{,}13 < X < 0{,}7) = e^{-3\times 0{,}13} - e^{-3\times 0{,}7} = 0{,}555$$

Задача 4

Исходные данные: найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}95$ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное стандартное отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $x_{cp} = 14$, объем выборки $n = 25$.

Решение.

Требуется найти доверительный интервал

$$x_{cp} - t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < x_{cp} + t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Все величины, кроме t, известны. Найдем t из соотношения

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$$

По таблице находим $t = 1,96$.

Подставив $t = 1,96$, $x_{ср} = 14$, $\sigma = 5$, $n = 25$, окончательно получим доверительный интервал

$$14 - 1,96 \times \frac{5}{\sqrt{25}} < a < 14 + 1,96 \times \frac{5}{\sqrt{25}} \Rightarrow 12,04 < a < 15,96$$

Задача 4

Исходные данные: используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,01$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами $n_i^{'}$, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности *X*:

n_i	8	16	40	72	36	18	10
$n_i^{'}$	6	18	36	76	39	18	7

Решение.

Найдем наблюдаемое значение критерия Пирсона:

$$X^2_{набл} = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)}{n_i^{'}}$$

Для этого составим расчетную таблицу

i	n_i	$n_i^{'}$	$n_i - n_i^{'}$	$\left(n_i - n_i^{'}\right)^2$	$\frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}}$
1	8	6	2	4	0,667
2	16	18	-2	4	0,222
3	40	36	4	16	0,444
4	72	76	-4	16	0,211
5	36	39	-3	9	0,231
6	18	18	0	0	0
7	10	7	3	9	1,286
$\sum$	200				$X^2_{набл} = 3,061$

По таблице критических точек распределения X^2, по уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ находим критическую точку $X^2_{кр}(0,01;4) = 13,3$. Так как $X^2_{набл} < X^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами незначимо (случайно).

Рекомендуемая литература:

1. Шипова Л.И., Шипов А.Е. Математика: учебное пособие для СПО. – Волгоград: Издательский дом «Ин-Фолио», 2012. – 224с.
2. Майоровская С. В., Поддубная О. Н., Станишевская Л. В.. Элементы высшей математики: пособие [Электронный ресурс] / Минск: Вышэйшая школа,2010. – 352 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235718

Практический блок

Контрольный вопросы
Вариант 1

1. Поставьте в соответствие каждое из следующих измерений к одному из видов шкал:

а) числа, кодирующие темпераменты	1) шкала наименований
б) академический ранг (ассистент, доцент, профессор)	2) шкала порядка
в) метрическая система расстояний	3) интервальная шкала
г) телефонные номера	4) шкала отношений

2. Перечислите меры среднего (центральной тенденции) и способы их вычисления
3. Перечислите меры разброса (изменчивости) и способы их вычисления
4. Какой из показателей наиболее чувствителен к наличию крайних значений:
1) мода, 2) медиана, 3) среднее арифметическое.
5. Большее стандартное отклонение показателей в одной совокупности в отличие от другой свидетельствует о:
1) связи значений,
2) меньшем разбросе значений,
3) большем разбросе значений.
- Перечислите типы выборок и укажите их отличия.
- Перечислите критерии качества оценки.
- Если для любого фиксированного числа наблюдений выполняется равенство:
M($\hat{\Theta}_n$)=θ , где $\hat{\Theta}_n$-оценка генеральной характеристики θ , то оценка $\hat{\Theta}_n$ называется:
1) несмещенной, 2) эффективной, 3) состоятельной.
6. Какая выборка называется репрезентативной?
7. Оценка тем точнее,
1) чем больше разность $\hat{\Theta}_n - \theta$
2) чем меньше разность $\hat{\Theta}_n - \theta$
3) чем выразительнее $\hat{\Theta}_n - \theta$.
8. Какое из утверждений верное (где t-нормированное отклонение – «коэффициент доверия», зависящий от вероятности, с которой гарантируется предельная ошибка выборки).
1) Предельную ошибку выборки можно подсчитать по формуле: = tm_x,
2) Чем меньше t, тем больше вероятность, с которой гарантируется предельная ошибка выборки.
3) Чем больше t, тем больше вероятность, с которой гарантируется предельная ошибка выборки.
9. Какие параметры должны быть известны, чтобы определить необходимую численность выборки?
10. Распределение проверяется на близость к нормальному, потому что:
1) может быть аномальным,
2) при большом объеме выборки,
3) т.к. большинство статистических формул применимо только к распределениям близким к нормальным.
11. Чем отличаются параметрические методы от непараметрических?

Вариант 2

1. Какие параметры должны быть известны, чтобы определить необходимую численность выборки?
2. Распределение проверяется на близость к нормальному, потому что:
1) может быть аномальным,
2) при большом объеме выборки,
3) т.к. большинство статистических формул применимо только к распределениям близким к нормальным.
3. Поставьте в соответствие каждое из следующих измерений к одному из видов шкал:

а) числа, кодирующие темпераменты	1) шкала наименований
б) академический ранг (ассистент, доцент, профессор)	2) шкала порядка
в) метрическая система расстояний	3) интервальная шкала
г) телефонные номера	4) шкала отношений

а) - ,б) - , в) - , г) -.
4. Перечислите меры среднего (центральной тенденции) и способы их вычисления.
5. Перечислите меры разброса (изменчивости) и способы их вычисления.
6. Какой из показателей наиболее чувствителен к наличию крайних значений:
1)мода,
2)медиана,
3) среднее арифметическое.
7. Большее стандартное отклонение показателей в одной совокупности в отличие от другой свидетельствует о:
1) связи значений,
2) меньшем разбросе значений,
3) большем разбросе значений.
8. Перечислите типы выборок и укажите их отличия.
9. Перечислите критерии качества оценки.
10. Если для любого фиксированного числа наблюдений выполняется равенство: M($\hat{\Theta}_n$)=θ, где $\hat{\Theta}_n$-оценка генеральной характеристики θ, то оценка $\hat{\Theta}_n$ называется
1)несмещенной,
2) эффективной,
3) состоятельной.
11. Какая выборка называется репрезентативной?
12. Оценка тем точнее,
1)чем больше разность $\hat{\Theta}_n - \theta$
2) чем меньше разность $\hat{\Theta}_n - \theta$
3) чем выразительнее $\hat{\Theta}_n - \theta$.
13. Какое из утверждений верное (где t-нормированное отклонение, «коэффициент доверия», зависящий от вероятности, с которой гарантируется предельная ошибка выборки).
1) Предельную ошибку выборки можно подсчитать по формуле:$=tm_x$,
2) Чем меньше t, тем больше вероятность, с которой гарантируется предельная ошибка выборки.
3) Чем больше t, тем больше вероятность, с которой гарантируется предельная ошибка выборки.

,

Вариант 3

1. Если для любого фиксированного числа наблюдений выполняется равенство: M($\hat{\Theta}_n$)=θ, где $\hat{\Theta}_n$-оценка генеральной характеристики θ, то оценка $\hat{\Theta}_n$ называется
1)несмещенной, 2) эффективной 3) состоятельной.
2. Какая выборка называеся репрезентативной?
3. Оценка тем точнее,
1)чем больше разность $\hat{\Theta}_n$- θ
2) чем меньше разность $\hat{\Theta}_n$- θ
3) чем выразительнее $\hat{\Theta}_n$- θ.
4. Какое из утверждений верное (где t-нормированное отклонение, «коэффициент доверия», зависящий от вероятности, с которой гарантируется предельная ошибка выборки).
1) Предельную ошибку выборки можно подсчитать по формуле: = tm_x,
2) Чем меньше t, тем больше вероятность, с которой гарантируется предельная ошибка выборки.
3) Чем больше t, тем больше вероятность, с которой гарантируется предельная ошибка выборки.
5. Какие параметры должны быть известны, чтобы определить необходимую численность выборки?
6. Распределение проверяется на близость к нормальному, потому что:
1) может быть аномальным,
2) при большом объеме выборки,
3) т.к. большинство статистических формул применимо только к распределениям близким к нормальным.
7. Чем отличаются параметрические методы от непараметрических?
1) Порядковую (ранговую) корреляцию применяют при небольшом объеме выборки и возможности ранжирования, а линейный коэффициент корреляции - для распределений, подчиняющихся нормальному закону.
12. Поставьте в соответствие каждое из следующих измерений к одному из видов шкал:

а) числа, кодирующие темпераменты	1) шкала наименований
б) академический ранг (ассистент, доцент, профессор)	2) шкала порядка
в) метрическая система расстояний	3) интервальная шкала
г) телефонные номера	4) шкала отношений

а) - , б)- , в) - , г) -.
13. Перечислите меры среднего (центральной тенденции) и способы их вычисления.
14. Перечислите меры разброса (изменчивости) и способы их вычисления.
15. Какой из показателей наиболее чувствителен к наличию крайних значений:
1)мода,
2)медиана,
3) среднее арифметическое.
16. Большее стандартное отклонение показателей в одной совокупности в отличие от другой свидетельствует о:
1)связи значений,
2) меньшем разбросе значений,
3) большем разбросе значений.
17. Перечислите типы выборок и укажите их отличия.
18. Перечислите критерии качества оценки.