

**Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации**

Технологический институт-филиал ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

С.Н. Петряков
О.М. Каняева
А.А. Хохлов
И.Р. Салахутдинов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

краткий курс лекций



Димитровград - 2023

УДК 629
ББК 39.3
П - 31

Петряков, С.Н. Теоретическая механика: краткий курс лекций / С.Н. Петряков, О.М. Каняева, А.А. Хохлов, И.Р. Салахутдинов,, - Димитровград: Технологический институт – филиал УлГАУ, 2023.- 229 с.

Рецензенты: Глущенко Андрей Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Эксплуатация мобильных машин и технологического оборудования» ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

Теоретическая механика: краткий курс лекций предназначен для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Утверждено
на заседании кафедры «Эксплуатация мобильных
машин и социально - гуманитарных дисциплин
Технологического института – филиала
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ,
протокол № 1 от 4 сентября 2023 г.

Рекомендовано
к изданию методическим советом Технологического
института – филиала
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ
Протокол № 1 от 5 сентября 2023 г.

© Петряков С.Н., Каняева О.М., Хохлов А.А., Салахутдинов И.Р., 2023
© Технологический институт – филиал ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ, 2023

СОДЕРЖАНИЕ СТАТИКА

Лекция 1. Введение. Основные понятия статики	4
Лекция 2. Равновесие системы сил. Пара сил	16
Лекция 3. Расчет ферм. Трение скольжения и качения	30
Лекция 4. Центр тяжести	55

КИНЕМАТИКА

Лекция 1. Кинематика точки и твердого тела	65
Лекция 2. Поступательное и вращательное движение твердого тела	76
Лекция 3. Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей и ускорений	90
Лекция 4. Сложное движение точки и тела	102

ДИНАМИКА

Лекция 1. Динамика точки	116
Лекция 2. Работа. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии точки	136
Лекция 3. Прямолинейные колебания точки	146
Лекция 4. Динамика системы и твердого тела	156
Лекция 5. Количество движения системы	173
Лекция 6. Кинетическая энергия системы	179
Лекция 7. Приложение общих теорем к динамике твердого тела	188
Лекция 8. Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики	207
Лекция 9 Явление удара	223

Лекция 1. Введение. Основные понятия статики.

Введение

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов, плотин и т. п.), с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин, механизмов, двигателей и, в частности, таких объектов, как автомобили, тепловозы, морские и речные суда, самолеты, ракеты, космические корабли и т. п. Несмотря на многообразие всех этих проблем, решения их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу. Объясняется это тем, что в названных задачах значительное место занимают вопросы, требующие изучения законов движения или равновесия тех или иных материальных тел.

Наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами называется теоретической механикой. Теоретическая механика представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин.

Механикой в широком смысле этого слова называется наука, посвященная решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами. Теоретическая механика представляет собою часть механики, в которой изучаются общие законы движения и взаимодействия материальных тел, т. е. те законы, которые, например, справедливы и для движения Земли вокруг Солнца и для полета ракеты или артиллерийского снаряда и т. п.

Под движением в механике мы понимаем механическое движение, т. е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Механическим взаимодействием между телами называется тот вид взаимодействия, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия тел, называется в механике силой.

Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В статике излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. Наконец, в динамике изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Термин «механика» впервые появляется в сочинениях одного из выдающихся философов древности Аристотеля (384—322 до н. э.) и происходит от греческого слова *μηχανή*, означающего по современным понятиям «сооружение», «машина», «изобретение»

В древние времена, когда запросы производства сводились главным образом к удовлетворению нужд строительной техники, начинает развиваться учение о так называемых простейших машинах (блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость) и общее учение о равновесии тел (статику). Обоснование начал статики содержится уже в сочинениях одного из великих ученых Архимеда (287 – 212 г. до н. э.).

В России на развитие первых исследований по механике большое влияние оказали труды гениального ученого и мыслителя М. В. Ломоносова (1711—1765). Из многочисленных отечественных ученых, внесших значительный вклад в развитие различных областей теоретической механики, прежде всего, должны быть названы: М. В. Остроградский (1801—1861), которому принадлежит ряд важных исследований по аналитическим методам решения задач механики; П. Л. Чебышев (1821—1894), создавший новое направление в исследовании движения механизмов; С. В. Ковалевская (1850—1891), решившая одну из труднейших задач динамики твердого тела; И. В. Мещерский (1859—1935), заложивший основы механики тел

переменной массы; К. Э. Циолковский (1857—1935), сделавший ряд фундаментальных открытий в теории реактивного движения; А. Н. Крылов (1863—1945), разработавший теорию корабля и много внесший в развитие теории гироскопических приборов.

Выдающееся значение для развития механики имели труды «отца русской авиации» Н. Е. Жуковского (1847—1921) и его ближайшего ученика С. А. Чаплыгина (1869—1942). Характерной чертой в творчестве Н. Е. Жуковского было приложение методов механики к решению актуальных технических задач. Большое влияние идеи Н. Е. Жуковского оказали и на преподавание теоретической механики в высших технических учебных заведениях нашей страны.

Стоящая в наши дни перед отечественной наукой и техникой задача непрерывного роста и внедрения в производство новой техники требует дальнейшего повышения качества подготовки инженерных кадров, расширения теоретической базы их знаний. Известную роль в решении этой задачи должно сыграть и изучение одной из научных основ современной техники – теоретической механики.

Элементы векторной алгебры

В теоретической механике рассматриваются такие векторные величины как сила, моменты силы относительно точки и оси, момент пары сил, скорость, ускорение и другие.

1. Понятие вектора.

Для определенности рассматриваем прямоугольную декартову систему координат.

Вектор - это направленный отрезок, который характеризуется длиной и направлением.

Операции над векторами. Вектора можно складывать и умножать на число.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ - сумма двух векторов есть вектор

$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b}$ - произведение вектора на действительное число есть вектор

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ - существует нулевой вектор

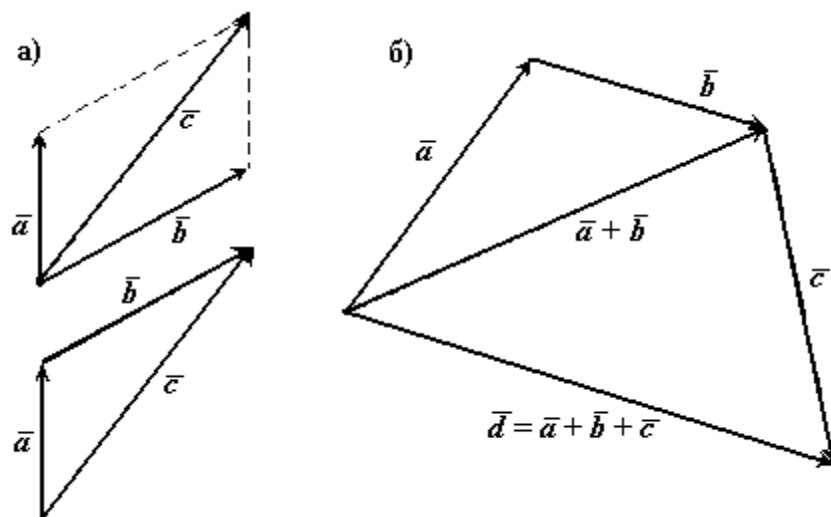


Рис.1

В математике все вектора являются свободными, их можно переносить параллельно самим себе.

В сумме двух векторов (рис.1,а) начало второго вектора можно поместить в конец первого вектора, тогда сумму двух векторов можно представить как вектор, имеющий начало в начале первого вектора, а конец в конце второго вектора. Применяя это правило для суммы нескольких векторов (рис.1,б) получаем, что суммой нескольких векторов является вектор замыкающий ломаную линию, состоящую из слагаемых векторов.

Операции над векторами подчиняются следующим законам (см. рис.2):

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= \bar{b} + \bar{a} & \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) &= (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \\ \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{a}) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{a} & (\alpha + \beta) \cdot \bar{a} &= \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{a} \\ \alpha \cdot (\bar{a} + \bar{b}) &= \alpha \cdot \bar{a} + \alpha \cdot \bar{b} & 0 \cdot \bar{a} &= \bar{0} \end{aligned}$$

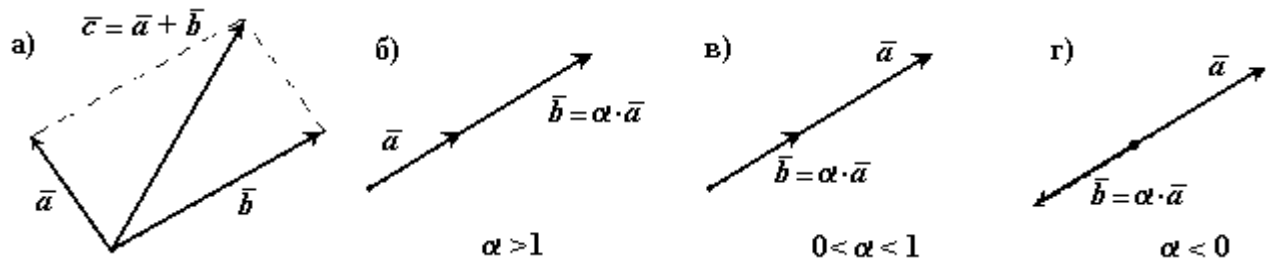


Рис.2

2. Правые и левые системы координат.

Декартовы системы координат делятся на два вида: правую и левую.

Рассмотрим декартовы системы координат на плоскости (см. рис. 3).

При повороте оси Ox правой системы координат на 90° против часовой стрелки она совпадает с осью Oy .

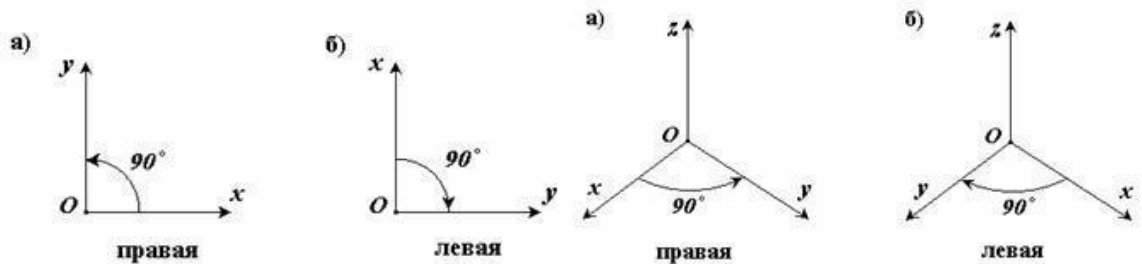


Рис.3

Рис.4

Рассмотрим декартовы системы координат в пространстве (см. рис.4).

При повороте оси Ox правой системы координат вокруг оси Oz на 90° против часовой стрелки она совпадает с осью Oy .

3. Длина, проекции и направляющие косинусы вектора.

В дальнейшем будем рассматривать правую декартову систему координат. Единичные вектора вдоль осей Ox , Oy и Oz образуют систему единичных (или базисных) векторов. Любой вектор, имеющий начало в точке O , можно представить как сумму $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$, числа (a_x, a_y, a_z) - это проекции вектора \bar{a} на оси координат (см. рис.5).

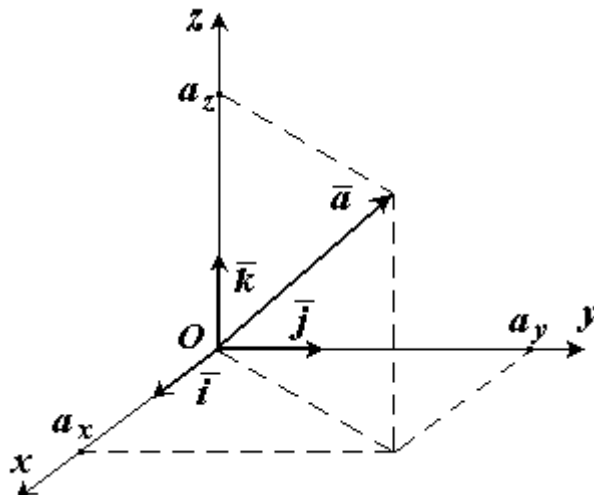


Рис.5

Длина (или модуль) вектора \vec{a} определяется формулой $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и обозначается a или $|\vec{a}|$.

Проекцией вектора на ось называется скалярная величина, которая определяется отрезком, отсекаемым перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора на эту ось. Проекция вектора считается положительной (+), если направление ее совпадает с положительным направлением оси, и отрицательной (-), если проекция направлена в противоположную сторону (см. рис.6).

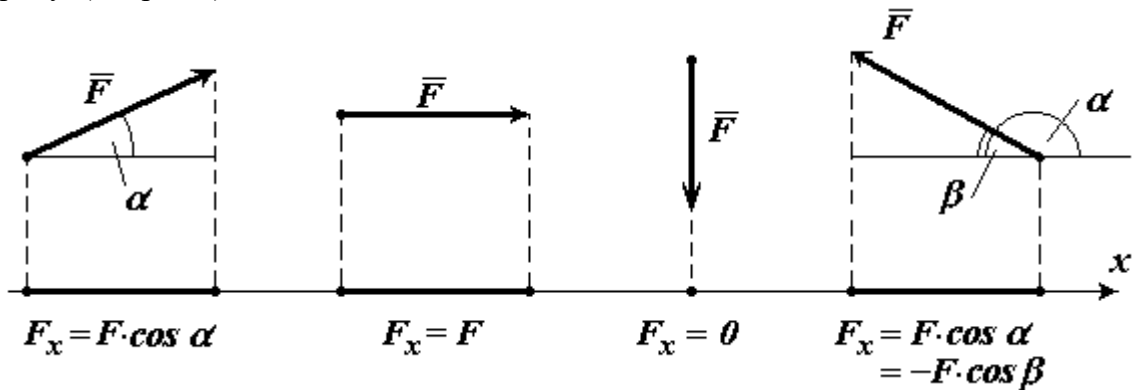


Рис.6

Направляющими косинусами $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ вектора называются косинусы углов между вектором и положительными направлениями осей Ox , Oy и Oz соответственно.

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a} \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a} \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}$$

Любая точка пространства с координатами (x, y, z) может быть задана своим радиус-вектором

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Координаты (x, y, z) это проекции вектора \vec{r} на оси координат.

4. Скалярное произведение двух векторов

Имеется два вектора \vec{a} и \vec{b} .

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

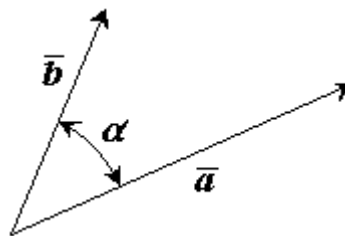


Рис.7

Результатом скалярного произведения двух векторов \vec{a} и \vec{b} является скалярная величина (число).

Записывается как $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или (\vec{a}, \vec{b}) . Скалярное произведение двух векторов равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

Свойства скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2 \geq 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \end{aligned}$$

5. Векторное произведение двух векторов

Имеется два вектора \vec{a} и \vec{b} .

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

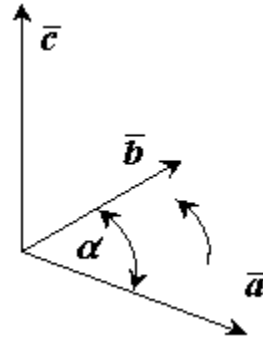


Рис.8

Результатом векторного произведения двух векторов \vec{a} и \vec{b} является вектор \vec{c} . Записывается как $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторное произведение двух векторов это вектор \vec{c} , перпендикулярный к обоим этим векторам, и направленный так, чтобы с его конца поворот вектора \vec{a} к вектору \vec{b} был виден против часовой стрелки.

$$\text{Длина (или модуль) векторного произведения равна } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha).$$

Свойства векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Векторное произведение двух векторов вычисляется через их проекции следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} \\ c_x &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \\ c_y &= (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \\ c_z &= (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \end{aligned}$$

Основные понятия статики

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Твердое тело. В статике и вообще в теоретической механике все тела считаются абсолютно твердыми. То есть предполагается, что эти тела не деформируются, не изменяют свою форму и объем, какое бы действие на них не было оказано.

Исследованием движения нетвердых тел – упругих, пластичных, жидких, газообразных, занимаются другие науки (сопротивление материалов, теория упругости, гидродинамика и т.д.).

Под равновесием будем понимать состояния покоя тела по отношению к другим материальным телам.

Основные понятия:

1. Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике силой.

Сила является величиной векторной.

Ее действие на тело определяется: 1) численной величиной или модулем силы, 2) направлением силы, 3) точкой приложения силы (рис.9).

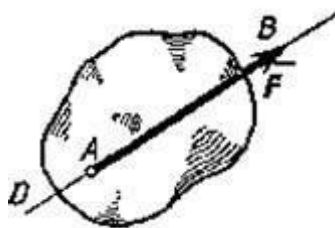


Рис.9

Прямая DE , вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.

В тексте вектор силы обозначается латинскими буквами \vec{F} , \vec{R} , \vec{P} и др., с черточками над ними. Если черточки нет, значит у силы известна только ее численная величина - модуль.

Предполагается, что действие силы на тело не изменится, если ее перенести по линии действия в любую точку тела (конечно – твердого тела). Поэтому вектор силы называют *скользящим вектором*. Если силу перенести в точку, не расположенную на этой линии, действие ее на тело будет совсем другим.

2. Совокупность сил, действующих на какое-нибудь твердое тело, будем называть *системой сил*.

3. Тело, не скрепленное с другими телами, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным*.

4. Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными*.

5. Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю*.

6. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил. Таким образом, равнодействующая - это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело.

7. Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей силой*.

8. Силы, действующие на твердое тело, можно разделить на *внешние* и *внутренние*. Внешними называются силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел. Внутренними называются силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.

9. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется сосредоточенной. Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются распределенными.

Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как практически приложить силу к телу в одной точке нельзя. Силы, которые мы в механике рассматриваем как сосредоточенные, представляют собою по существу равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

В частности, обычно рассматриваемая в механике сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собою равнодействующую сил тяжести его частиц. Линия действия этой равнодействующей проходит через точку, называемую центром тяжести тела.

Аксиомы статики.

Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений, принимаемых без математических доказательств и называемых аксиомами или принципами статики. Аксиомы статики представляют собою результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтвержденных практикой. Часть из этих аксиом является следствиями основных законов механики, с которыми мы познакомимся в динамике.

Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 10).

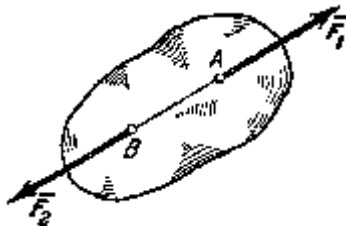


Рис.10

Аксиома 1 определяет простейшую уравновешенную систему сил, так как опыт показывает, что свободное тело, на которое действует только одна сила, находиться в равновесии не может.

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Эта аксиома устанавливает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

Следствие из 1-й и 2-й аксиом. Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

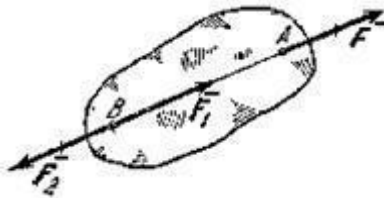


Рис.11

В самом деле, пусть на твердое тело действует приложенная в точке A сила \vec{F} (рис.11). Возьмем на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим к ней две уравновешенные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , такие, что $\vec{F}_1 = \vec{F}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}$. От этого действие силы \vec{F} на тело не изменится. Но силы \vec{F} и \vec{F}_2 согласно аксиоме 1 также образуют

уравновешенную систему, которая может быть отброшена. В результате на тело. Будет действовать только одна сила \vec{F}_1 , равная \vec{F} , но приложенная в точке B .

Таким образом, вектор, изображающий силу \vec{F} , можно считать приложенным в любой точке на линии действия силы (такой вектор называется скользящим).

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Вектор \vec{R} , равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (рис.12), называется геометрической суммой векторов \vec{F}_1 и \vec{F}_2 : $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

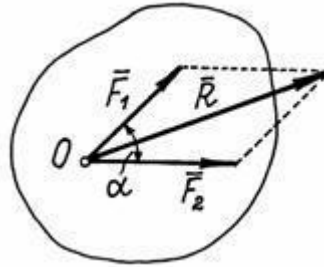


Рис.12

Величина равнодействующей

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Конечно, $R \neq F_1 + F_2$. Такое равенство будет соблюдаться только при условии, что эти силы направлены по одной прямой в одну сторону. Если же векторы сил окажутся перпендикулярными, то $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

Следовательно, аксиому 3 можно еще формулировать так: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.

Аксиома 4. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Закон о равенстве действия и противодействия является одним из основных законов механики. Из него следует, что если тело A действует на тело B с силой \vec{F} , то одновременно тело B действует на тело A с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но противоположную сторону силой $\vec{F}' = -\vec{F}$ (рис. 13). Однако силы \vec{F} и \vec{F}' не образуют уравновешенной системы сил, так как они приложены к разным телам.

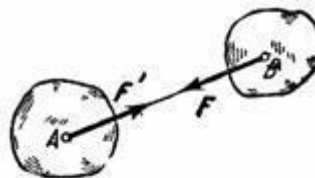


Рис.13

Аксиома 5 (принцип отвердевания). Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

Высказанное в этой аксиоме утверждение очевидно. Например, ясно, что равновесие цепи не нарушится, если ее звенья считать сваренными друг с другом и т. д.

Связи и их реакции.

По определению, тело, которое не скреплено с другими телами и может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется *свободным* (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещения которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется *несвободным*. Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, будем называть связью.

Например, тело лежащее на столе – несвободное тело. Связью его является плоскость стола, которая препятствует перемещению тела вниз.

Очень важен так называемый *принцип освобождаемости*, которым будем пользоваться в дальнейшем. Записывается он так.

Любое несвободное тело можно сделать свободным, если связи убрать, а действие их на тело заменить силами, такими, чтобы тело оставалось в равновесии.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто реакцией связи.

Так у тела, лежащего на столе, связь – стол. Тело несвободное. Сделаем его свободным – стол уберем, а чтобы тело осталось в равновесии, заменим стол силой, направленной вверх и равной, конечно, весу тела.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Когда связь одновременно препятствует перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции связи также наперед неизвестно и должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи.

Рассмотрим, как направлены реакции некоторых основных видов связей.

1. Гладкая плоскость (поверхность) или опора. Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно в первом приближении пренебречь. Такая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис.14,*а*). Поэтому реакция N гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 14,*б*), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

Если поверхности не гладкие, надо добавить еще одну силу – силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, которая направлена перпендикулярно нормальной реакции \vec{N} в сторону, противоположную возможному скольжению тела.

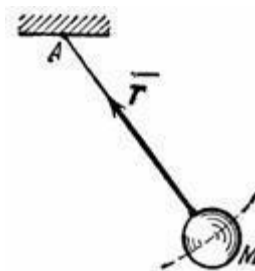
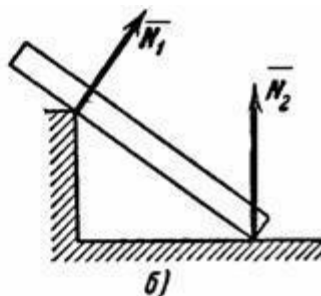
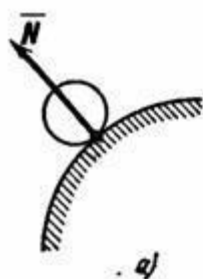


Рис.14

Рис.15

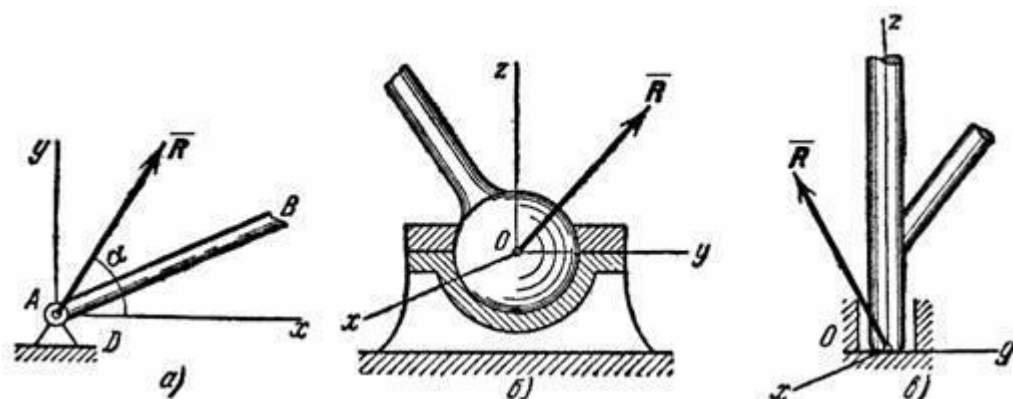


Рис.16

2. Нить. Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис.15), не дает телу M удаляться от точки подвеса нити по направлению AM . Поэтому реакция T натянутой нити направлена вдоль нити *от тела* к точке ее подвеса. Если даже заранее можно догадаться, что реакция направлена к телу, все равно ее надо направить от тела. Таково правило. Оно избавляет от лишних и ненужных предположений и, как убедимся далее, помогает установить сжат стержень или растянут.

3. Цилиндрический шарнир (подшипник). Если два тела соединены болтом, проходящим через отверстия в этих телах, то такое соединение называется шарнирным или просто шарниром; осевая линия болта называется осью шарнира. Тело AB , прикрепленное шарниром к опоре D (рис.16,*a*), может поворачиваться как угодно вокруг оси шарнира (в плоскости чертежа); при этом конец A тела не может переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному к оси шарнира. Поэтому реакция R цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира, т.е. в плоскости A_{xy} . Для силы R в этом случае наперед не известны ни ее модуль R , ни направление (угол α).

4. Шаровой шарнир и подпятник. Этот вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать никаких перемещений в пространстве. Примерами таких связей служат шаровая пята, с помощью которой прикрепляется фотоаппарат к штативу (рис.16,*б*) и подшипник с упором (подпятник) (рис. 16,*в*). Реакция R шарового шарнира или подпятника может иметь любое направление в пространстве. Для нее наперед неизвестны ни модуль реакции R , ни углы, образуемые ею с осями x , y , z .

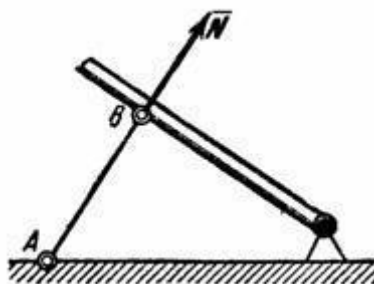


Рис.17

5. Стержень. Пусть в какой-нибудь конструкции связью является стержень AB , закрепленный на концах шарнирами (рис.17). Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы приложенные в шарнирах A и B . Но если стержень AB находится в равновесии, то по аксиоме 1 приложенные в точках A и B силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль оси стержня. Следовательно, нагруженный на концах стержень, весом которого по сравнению с этими нагрузками можно пренебречь, работает только на растяжение

или на сжатие. Если такой стержень является связью, то реакция \vec{N} стержня будет направлена вдоль оси стержня.

6. Подвижная шарнирная опора (рис.18, опора A) препятствует движению тела только в направлении перпендикулярном плоскости скольжения опоры. Реакция \vec{N}_A такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры.

7. Неподвижная шарнирная опора (рис.18, опора B). Реакция \vec{R}_B такой опоры проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа. При решении задач будем реакцию \vec{R}_B изображать ее составляющими \vec{X}_B и \vec{Y}_B по направлениям осей координат. Если мы, решив задачу, найдем \vec{X}_B и \vec{Y}_B , то тем самым будет определена и реакция \vec{R}_B ; по модулю $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$

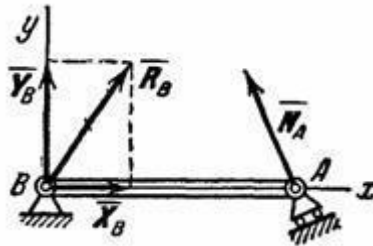


Рис.18

Способ закрепления, показанный на рис.18, употребляется для того, чтобы в балке AB не возникало дополнительных напряжений при изменении ее длины от изменения температуры или от изгиба.

Заметим, что если опору A балки (рис.18) сделать тоже неподвижной, то балка при действии на нее любой плоской системы сил будет статически неопределимой, так как тогда в три уравнения равновесия войдут четыре неизвестные реакции \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B .

8. Неподвижная защемляющая опора или жесткая заделка (рис.19). В этом случае на заделанный конец балки со стороны опорных плоскостей действует система распределенных сил реакций. Считая эти силы приведенными к центру A , мы можем их заменить одной наперед неизвестной силой \vec{R}_A , приложенной в этом центре, и парой с наперед неизвестным моментом \vec{M}_A . Силу \vec{R}_A можно в свою очередь изобразить ее составляющими \vec{X}_A и \vec{Y}_A . Таким образом, для нахождения реакции неподвижной защемляющей опоры надо определить три неизвестных величины \vec{X}_A , \vec{Y}_A и \vec{M}_A . Если под такую балку где-нибудь в точке B подвести еще одну опору, то балка станет статически неопределимой.

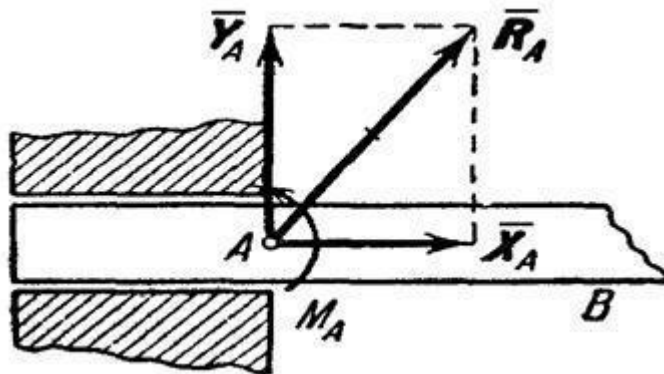


Рис.19

При определении реакций связи других конструкций надо установить, разрешает ли она двигаться вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и вращаться вокруг этих осей. Если препятствует какому-либо движению – показать соответствующую силу, если препятствует вращению – пару с соответствующим моментом.

Иногда приходится исследовать равновесие нетвердых тел. При этом будем пользоваться предположением, что если это нетвердое тело находится в равновесии под действием сил, то его можно рассматривать как твердое тело, используя все правила и методы статики.

Пример 1. На невесомую трехшарнирную арку действует горизонтальная сила \vec{F} (рис.20). Определить линию действия реакции \vec{R}_A (реакции связи в точке A).

Решение: Рассмотрим правую часть арки отдельно. В точках B и C приложим силы реакции связей \vec{R}_B и \vec{R}_C . Тело под действием двух сил находится в равновесии. Согласно аксиоме о равновесии двух сил, силы \vec{R}_B и \vec{R}_C равны по величине и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны. Таким образом, направление силы \vec{R}_C нам известно (вдоль линии BC).

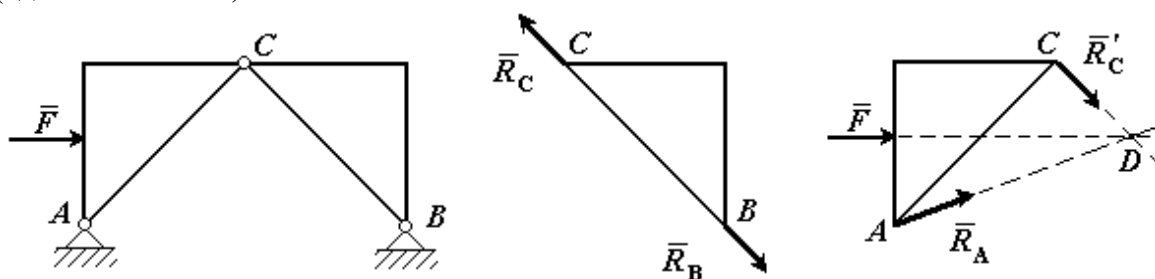


Рис.20

Рассмотрим левую часть арки отдельно. В точках A и C приложим силы реакции связей \vec{R}_B и \vec{R}'_C . Сила $\vec{R}'_C = -\vec{R}_C$, действие равно противодействию. На тело действуют три силы, направления двух сил (\vec{F} и \vec{R}'_C) известно. Согласно теореме о трех силах линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Следовательно, сила \vec{R}_A направлена вдоль линии AD .

Пример 2. Однородный стержень закреплен шарнирно в точке A и опирается на гладкий цилиндр. Определить линию действия реакции \vec{R}_A (реакции связи в точке A).

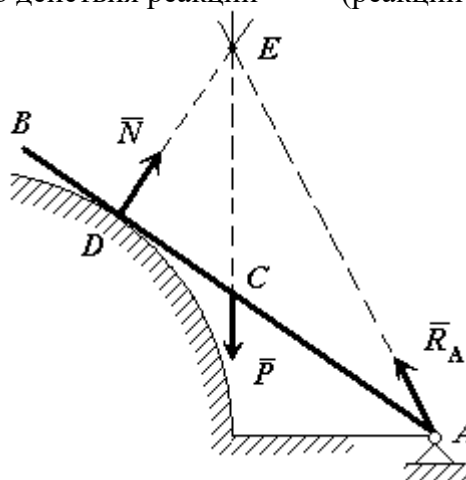


Рис.21

Решение: Так как стержень однородный, то равнодействующая сил тяжести (си-

ла \vec{P}), действующих на стержень, приложена в его геометрическом центре (точка C). Так как стержень опирается на гладкую поверхность, то реакция связи (сила \vec{N}) в точке касания (точка D) направлена по нормали к этой поверхности. На тело действуют три силы, направления двух сил (\vec{N} и \vec{P}) известно. Согласно теореме о трех силах линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Следовательно, сила \vec{R}_A направлена вдоль линии AE .

Лекция 2. Равновесие системы сил. Пара сил.

Проекция силы на ось и на плоскость.

Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

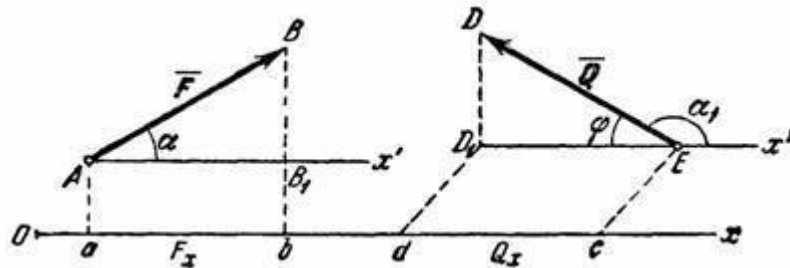


Рис. 12

Обозначать проекцию силы \vec{F} на ось Ox будем символом F_x . Тогда для сил, изображенных на рис. 12, получим:

$$F_x = AB_1 = ab, \quad Q_x = -ED_1 = -ed.$$

Но из чертежа видно, что $AB_1 = F \cos \alpha$, $ED_1 = Q \cos \beta = -Q \cos \alpha_1$.

Следовательно,

$$F_x = F \cos \alpha, \quad Q_x = -Q \cos \varphi = Q \cos \alpha_1,$$

т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси - острый, и отрицательной, если этот угол - тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

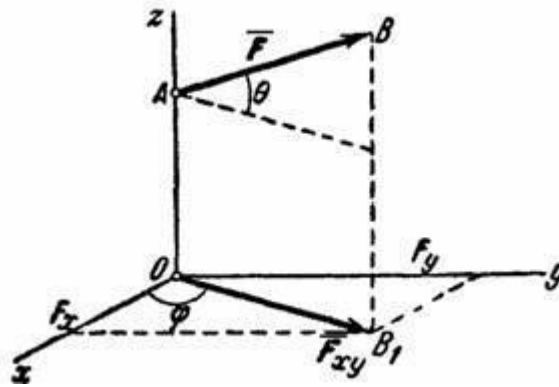


Рис.13

Проекцией силы \vec{F} на плоскость Oxy называется вектор $F_{xy} = OB_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы \vec{F} на эту плоскость (рис. 13). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости Oxy . По модулю $F_{xy} = F \cos \theta$, где θ — угол между направлением силы \vec{F} и ее проекции F_{xy} .

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.

Например, в случае, изображенном на рис. 13, найдем таким способом, что

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi,$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \sin \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi$$

Геометрический способ сложения сил.

Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей, для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.

Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения

этим способом суммы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 14, а), откладываем от произвольной точки O (рис. 14, б) вектор Oa , изображающий в выбранном масштабе силу F_1 , от точки a откладываем вектор ab , изображающий силу F_2 , от точки b откладываем вектор bc , изображающий силу F_3 и т. д.; от конца n предпоследнего вектора откладываем вектор tn , изображающий силу F_n . Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\vec{On} = \vec{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad \text{или} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k.$$

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление \vec{R} не зависят. Легко видеть, что сделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

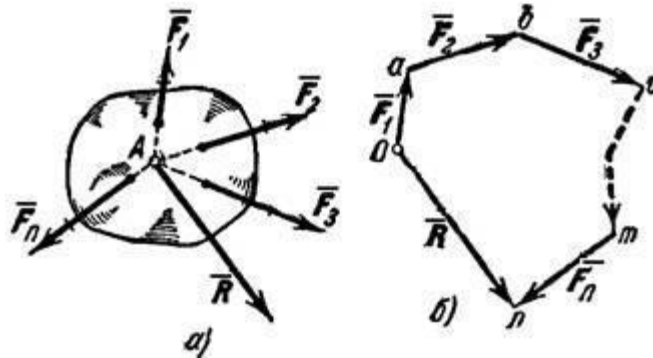


Рис.14

Фигура, построенная на рис. 14,б, называется силовым (в общем случае векторным) многоугольником. Таким образом, геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правило силового многоугольника). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора \vec{R} - в сторону противоположную.

Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил. *Сходящимися* называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке (см. рис. 14, а).

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 14, а в точке А).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Следовательно, если силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ сходятся в точке А (рис. 14, а), то сила, равная главному вектору \vec{R} , найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке А, будет равнодействующей этой системы сил.

Равновесие системы сходящихся сил.

Из законов механики следует, что твердое тело, на которое действуют взаимно уравновешенные внешние силы, может не только находиться в покое, но и совершать движение, которое мы назовем движением «по инерции». Таким движением будет, например, поступательное равномерное и прямолинейное движение тела.

Отсюда получаем два важных вывода: 1) Условиям равновесия статики удовлетворяют силы, действующие как на покоящееся тело, так и на тело, движущееся «по инерции». 2) Уравновешенность сил, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым, но не достаточным условием равновесия (покоя) самого тела; в покое тело будет при этом находиться лишь в том случае, если оно было в покое и до момента приложения к нему уравновешенных сил.

Для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

1. Геометрическое условие равновесия. Так как равнодействующая \vec{R} сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного из этих сил, то \vec{R} может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой, т. е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, для равновесия системы, сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.

2. Аналитические условия равновесия. Аналитически равнодействующая системы сходящихся сил определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то R обратится в нуль только тогда, когда одновременно $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$, т. е. когда действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0.$$

Равенства выражают условия равновесия в аналитической форме: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0,$$

Равенства выражают также необходимые условия (или уравнения) равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием сходящихся сил.

Пример 1. На рис.15 показаны три силы. Проекция сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 на оси x , y , z очевидны:

$$X_1 = -F_1; \quad Y_1 = 0; \quad Z_1 = 0; \quad X_2 = F_2 \sin \alpha; \quad Y_2 = 0; \quad Z_2 = -F_2 \cos \alpha.$$

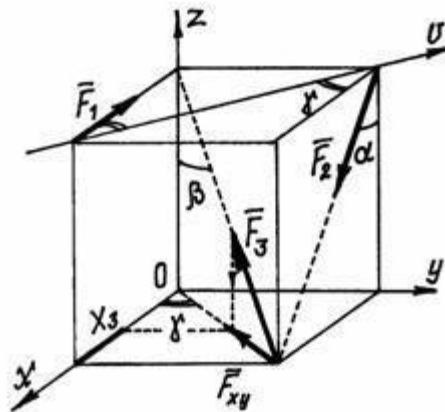


Рис.15

А чтобы найти проекцию силы \vec{F}_3 на ось x нужно использовать *правило двойного проецирования*.

Проектируем силу сначала на плоскость xOy , в которой расположена ось (рис.15), получим вектор \vec{F}_{xy} , величиной $F_{xy} = F_3 \sin \beta$, а затем его проектируем на ось x : $X_3 = -F_{xy} \cos \gamma = -F_3 \sin \beta \cdot \cos \gamma$.

Аналогично действуя, найдём проекцию на ось y : $Y_3 = -F_{xy} \sin \gamma = -F_3 \sin \beta \cdot \sin \gamma$.

Проекция на ось z находится проще: $Z_3 = F_3 \cos \beta$.

Нетрудно убедиться, что проекции сил на ось V равны:

$$V_1 = F_1 \cos \gamma; \quad V_2 = -F_2 \sin \alpha \cdot \cos \gamma;$$

$$V_3 = F_{xy} \cos(180^\circ - 2\gamma) = -F_3 \sin \beta \cdot \cos 2\gamma.$$

При определении этих проекций удобно воспользоваться рис.16, видом сверху на расположение сил и осей.

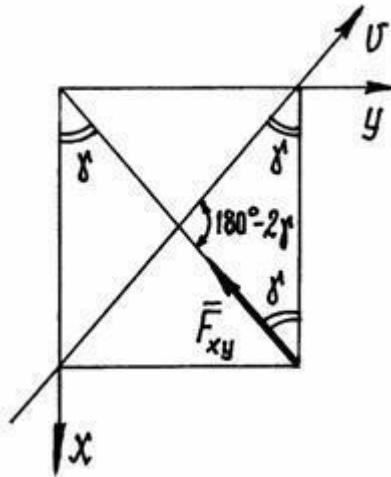


Рис.16

Вернёмся к системе сходящихся сил (рис. 17). Проведём оси координат с началом в точке пересечения линий действия сил, в точке O .

Мы уже знаем, что равнодействующая сил $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$. Спроектируем это векторное равенство на оси. Получим проекции равнодействующей \vec{R} на оси x, y, z :

$$R_x = \sum X_i,$$

$$R_y = \sum Y_i,$$

$$R_z = \sum Z_i.$$

Они равны алгебраическим суммам проекций сил на соответствующие оси. А зная проекции равнодействующей, можно определить и величину её как диагональ прямоугольного параллелепипеда

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ или

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}.$$

Направление вектора \vec{R} найдём с помощью направляющих косинусов (рис.17):

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

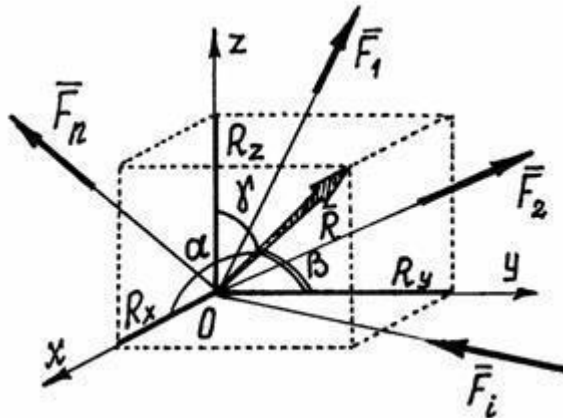


Рис.17

Пример 2. На шар, вес которого P , лежащий на горизонтальной плоскости и привязанный к ней нитью AB , действует сила F (рис.18). Определим реакции связей.

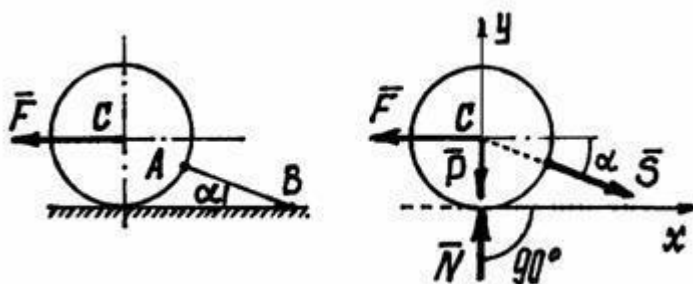


Рис.18

Следует сразу заметить, что все задачи статики решаются по одной схеме, в определённом порядке.

Продемонстрируем ее на примере решения этой задачи.

1. Надо выбрать (назначить) объект равновесия – тело, равновесие которого следует рассмотреть, чтобы найти неизвестные.

В этой задаче, конечно, объект равновесия – шар.

2. Построение расчётной схемы. Расчётная схема – это объект равновесия, изображённый отдельно, свободным телом, без связей, со всеми силами, действующими на него: реакциями и остальными силами.

Показываем реакцию нити \vec{S} и нормальную реакцию плоскости – \vec{N} (рис.18). Кроме них на шар действуют заданные силы \vec{F} и \vec{P} .

3. Надо установить какая получилась система сил и составить соответствующие уравнения равновесия.

Здесь получилась система сходящихся сил, расположенных в плоскости, для которой составляем два уравнения (оси можно проводить произвольно):

$$\sum X_i = 0; \quad -F + S \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -P + N - S \sin \alpha = 0.$$

4. Решаем систему уравнений и находим неизвестные.

$$S = \frac{F}{\cos \alpha}, \quad N = S \sin \alpha + P = F \operatorname{tg} \alpha + P.$$

По условию задачи требовалось найти давление шара на плоскость. А мы нашли реакцию плоскости на шар. Но, по определению следует, что эти силы равны по величине, только давление на плоскость будет направлено в противоположную сторону, вниз.

Пример 3. Тело весом P прикреплено к вертикальной плоскости тремя стержнями (рис.19). Определим усилия в стержнях.

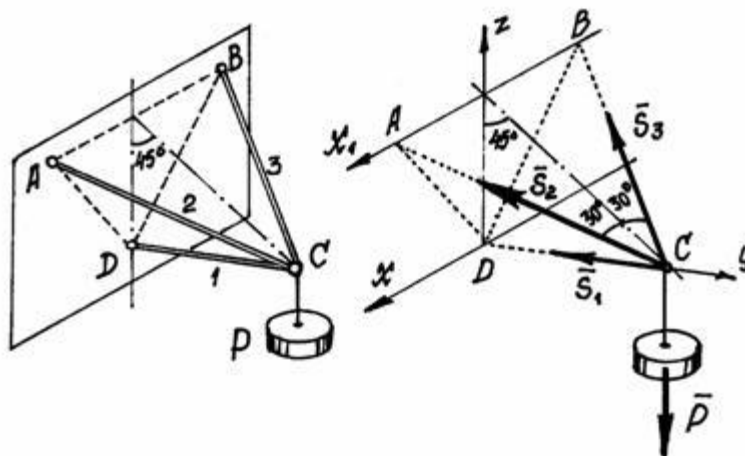


Рис.19

В этой задаче объект равновесия – узел C вместе с грузом. Он нарисован отдельно с

реакциями, усилиями в стержнях \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{S}_3 , и весом \vec{P} . Силы образуют пространственную систему сходящихся сил. Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad S_2 \cos 60^\circ - S_3 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_1 - S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; \quad S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + S_3 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - P = 0.$$

Из первого уравнения следует: $S_2 = S_3$. Тогда из третьего:

$$S_2 = S_3 = \frac{P}{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{6}} P, \quad \text{а из второго: } S_1 = -2S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = -P.$$

Когда мы направляли усилие в стержне от узла, от объекта равновесия, предполагали, что стержни работают на растяжение. Усилие в стержне CD получилось отрицательным. Это значит – стержень сжат. Так что знак усилия в стержне указывает как работает стержень: на растяжение или на сжатие.

Момент силы относительно центра (или точки).

Опыт показывает, что под действием силы твердое тело может наряду с поступательным перемещением совершать вращение вокруг того или иного центра. Вращательный эффект силы характеризуется ее моментом

Рассмотрим силу \vec{F} , приложенную в точке A твердого тела (рис. 20). Допустим, что сила стремится повернуть тело вокруг центра O . Перпендикуляр h , опущенный из центра O на линию действия силы \vec{F} , называется плечом силы \vec{F} относительно центра O . Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы F и длины плеча h ; 2) от положения плоскости поворота OAB , проходящей через центр O и силу F ; 3) от направления поворота к этой плоскости.

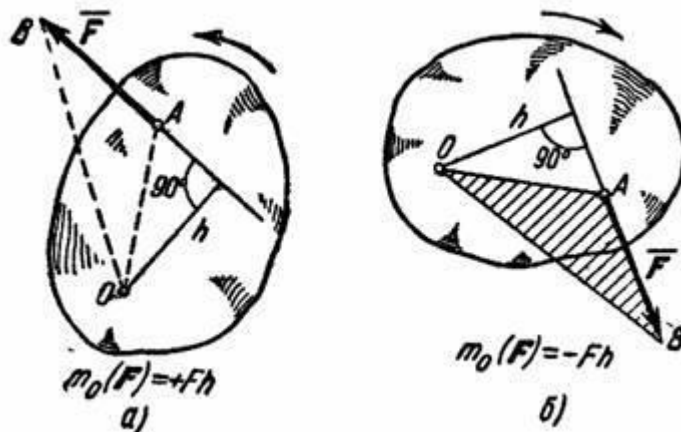


Рис.20

Ограничимся пока рассмотрением систем сил, лежащих в одной плоскости. В этом случае плоскость поворота для всех сил является общей и в дополнительном задании не нуждается.

Тогда для количественного измерения вращательного эффекта можно ввести следующее понятие о моменте силы: моментом силы \vec{F} относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Момент силы \vec{F} относительно центра O будем обозначать символом $m_O(F)$. Следовательно,

$$m_O(\vec{F}) = \pm Fh.$$

В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак плюс, если сила стремится

повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и знак минус, - если по ходу часовой стрелки. Так, для силы \vec{F} , изображенной на рис.20,а, момент относительно центра O имеет знак плюс, а для силы, показанной на рис.20,б, - знак минус.

Отметим следующие свойства момента силы:

- 1) Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия.
- 2) Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).
- 3) Момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB (рис. 20,б)

$$m_0(\vec{F}) = \pm 2\text{пл.}\Delta OAB$$

Этот результат следует из того, что

$$\text{пл.}\Delta OAB = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} Fh.$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Докажем следующую теорему Вариньона: момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.

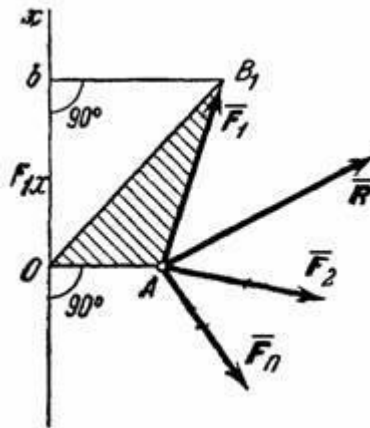


Рис.21

Рассмотрим систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, сходящихся в точке A (рис.21). Возьмем произвольный центр O и проведем через него ось Ox , перпендикулярную к прямой OA ; положительное направление оси Ox выбираем так, чтобы знак проекции любой из сил на эту ось совпадал со знаком ее момента относительно центра O .

Для доказательства теоремы найдем соответствующие выражения моментов $m_0(\vec{F}_1), m_0(\vec{F}_2), \dots$. По формуле $m_0(\vec{F}_1) = +2\text{пл.}\Delta OAB_1$. Но, как видно из рисунка, $2\text{пл.}\Delta OAB_1 = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}$, где F_{1x} - проекция силы \vec{F}_1 на ось Ox ; следовательно

$$m_0(\vec{F}_1) = OA \cdot F_{1x}.$$

Аналогично вычисляются моменты всех других сил.

Обозначим равнодействующую сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, через \vec{R} , где $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$. Тогда, по теореме о проекции суммы сил на ось, получим $R_x = \sum F_{kx}$. Умножая обе части этого равенства на OA , найдем:

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{kx})$$

или,

$$m_0(\bar{R}) = \sum m_0(\bar{F}_k)$$

Пара сил. Момент пары.

Парой сил (или просто парой) называются две силы, равные по величине, параллельные и направленные в противоположные стороны (рис.22). Очевидно, $F_1 = F_2$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

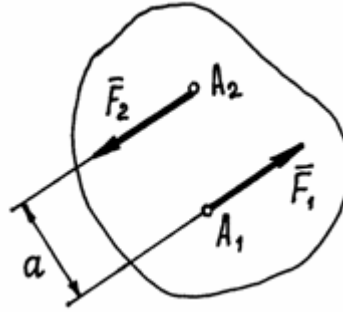


Рис.22

Несмотря на то, что сумма сил равна нулю, эти силы не уравниваются. Под действием этих сил, пары сил, тело начнёт вращаться. И вращательный эффект будет определяться моментом пары:

$$m = F_1 \cdot a = F_2 \cdot a$$

Расстояние a между линиями действия сил называется *плечом пары*.

Если пара вращает тело против часовой стрелки, момент её считается положительным (как на рис.22), если по часовой стрелке – отрицательным.

Для того, чтобы момент пары указывал и плоскость, в которой происходит вращение, его представляют вектором.

Вектор момента пары \vec{m} направляется перпендикулярно плоскости, в которой расположена пара, в такую сторону, что если посмотреть оттуда, увидим вращение тела против часовой стрелки (рис. 23).

Нетрудно доказать, что вектор момента пары $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}_1$ – есть вектор этого векторного произведения (рис. 23). И заметим, что он равен вектору момента силы \vec{F}_1 относительно точки A , точки приложения второй силы:

$$\vec{m} = \vec{M}_A(\vec{F}_1)$$

О точке приложения вектора \vec{m} будет сказано ниже. Пока приложим его к точке A .

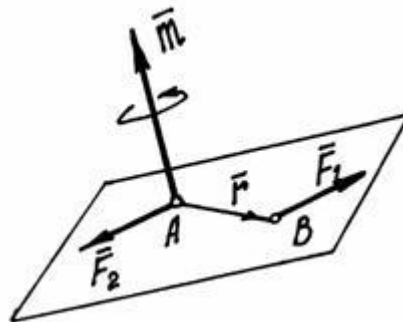


Рис.23

Свойства пар

- 1) Проекция пары на любую ось равна нулю. Это следует из определения пары сил.
- 2) Найдём сумму моментов сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 составляющих пару, относительно какой-либо точки O (рис.24).

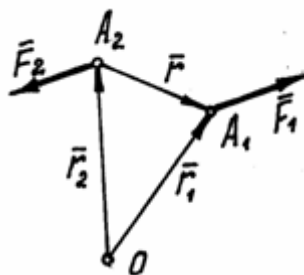


Рис.24

Покажем радиусы-векторы точек A_1 и A_2 и вектор \vec{r} , соединяющий эти точки. Тогда момент пары сил относительно точки O

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$

$$\text{Но } \vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}. \text{ Поэтому } \vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{r}_2 + \vec{r}) \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{r} \times \vec{F}_1.$$

$$\text{Но } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \text{ а } \vec{r} \times \vec{F}_1 = \vec{m}.$$

$$\text{Значит } \vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{m}.$$

Момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары.

Отсюда следует, что, во-первых, где бы не находилась точка O и, во-вторых, где бы не располагалась эта пара в теле и как бы она не была повернута в своей плоскости, действие её на тело будет одинаково. Так как момент сил, составляющих пару, в этих случаях один и тот же, равный моменту этой пары \vec{m} .

Поэтому можно сформулировать ещё два свойства.

3) Пару можно перемещать в пределах тела по плоскости действия и переносить в любую другую параллельную плоскость.

4) Так как действие на тело сил, составляющих пару, определяется лишь её моментом, произведением одной из сил на плечо, то у пары можно изменять силы и плечо, но так, чтобы момент пары остался прежним. Например, при силах $F_1 = F_2 = 5$ Н и плече $a = 4$ см момент пары $m = 20$ Н·см. Можно силы сделать равными 2 Н, а плечо $a = 10$ см. При этом момент останется прежним 20 Н·см и действие пары на тело не изменится.

Все эти свойства можно объединить и, как следствие, сделать вывод, что пары с одинаковым вектором момента \vec{m} и неважно где расположенные на теле, оказывают на него равное действие. То есть такие пары эквивалентны.

Исходя из этого, на расчётных схемах пару изображают в виде дуги со стрелкой, указывающей направление вращения, и рядом пишут величину момента m . Или, если это пространственная конструкция, показывают только вектор момента этой пары. И вектор момента пары можно прикладывать к любой точке тела. Значит вектор момента пары \vec{m} – свободный вектор.

И ещё одно дополнительное замечание. Так как момент пары равен вектору момента одной из сил её относительно точки приложения второй силы, то момент пары сил относительно какой-либо оси z – есть проекция вектора момента пары \vec{m} на эту ось:

$$m_z = m \cdot \cos \gamma,$$

где γ – угол между вектором \vec{m} и осью z .

Сложение пар

Пусть даны две пары с моментами m_1 и m_2 , расположенные в пересекающихся плоскостях (рис.25).

Сделаем у пар плечи одинаковыми, равными $a = AB$. Тогда модули сил, образующих

первую пару, должны быть равны: $F_1 = F_1' = \frac{m_1}{a}$, а образующих вторую пару: $F_2 = F_2' = \frac{m_2}{a}$.

Эти пары показаны на рис.25, где $\vec{F}_1' = -\vec{F}_1$, $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$. И расположены они в своих плоскостях так, что плечи пар совпадают с прямой AB на линии пересечения плоскостей.

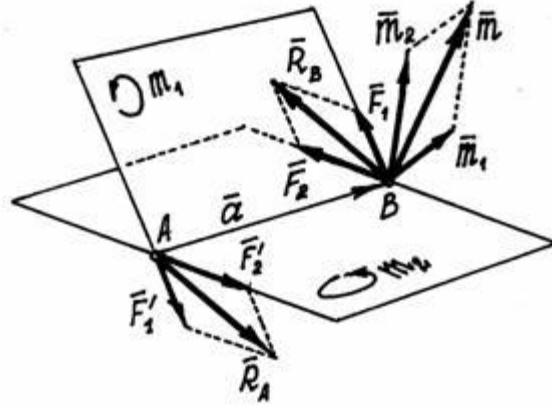


Рис.25

Сложив силы, приложенные к точкам A и B , построением параллелограммов, получим их равнодействующие $\vec{R}_B = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ и $\vec{R}_A = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'$. Так как $\vec{R}_B = -\vec{R}_A$, то эти силы \vec{R}_A и \vec{R}_B будут образовывать пару, момент которой $\vec{m} = \vec{a} \times \vec{R}_B$, где \vec{a} – радиус-вектор точки B , совпадающий с AB .

Так как $\vec{R}_B = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то момент полученной пары

$$\vec{m} = \vec{a} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{a} \times \vec{F}_1 + \vec{a} \times \vec{F}_2 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.$$

Следовательно, в результате сложения пар, расположенных в пересекающихся плоскостях, получится пара сил. Момент её будет равен векторной сумме моментов слагаемых пар.

При сложении нескольких пар, действующих в произвольных плоскостях, получим пару с моментом

$$\vec{m} = \sum \vec{m}_i.$$

Конечно, эта результирующая пара будет располагаться в плоскости перпендикулярной вектору \vec{m} .

Равенство нулю результирующей пары будет означать, что пары, действующие на тело, уравновешиваются. Следовательно, условие равновесия пар

$$\sum \vec{m}_i = 0.$$

Если пары расположены в одной плоскости, векторы моментов их будут параллельны. И момент результирующей пары можно определить как алгебраическую сумму моментов пар.

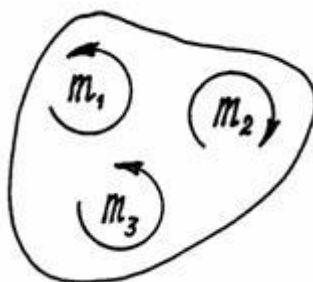


Рис.26

Например, пары, показанные на рис.26, расположены в одной плоскости и моменты их:

$m_1=2$ Нсм, $m_2=5$ Нсм, $m_3=3$ Нсм. Пары уравниваются, потому что алгебраическая сумма их моментов равна нулю:

$$\sum m_i = m_1 - m_2 + m_3 = 2 - 5 + 3 = 0$$

Теорема о параллельном переносе силы.

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью аксиомы параллелограмма сил. Для двух параллельных сил эта задача была решена путем приведения их к сходящимся силам. Очевидно, что аналогичную задачу легко будет решить и для произвольной системы сил, если найти и для них метод приведения к силам, приложенным в одной точке.

Ранее мы установили, что вектор силы можно переносить по линии действия в любую точку тела.

Попробуем силу \vec{F} (рис. 27) перенести в какую-нибудь точку O , не расположенную на линии действия.

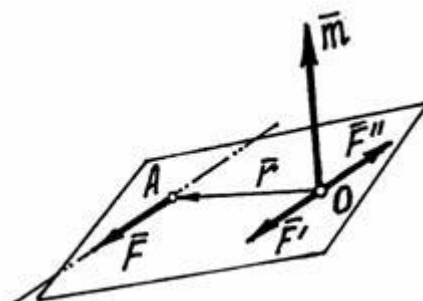


Рис.27

Приложим к этой точке две уравнивающиеся силы \vec{F}' и \vec{F}'' , параллельные силе \vec{F} и равные ей по величине: $F' = F'' = F$

В результате получим силу $\vec{F}' = \vec{F}$, приложенную к точке O . То есть мы как бы перенесли заданную силу \vec{F} из точки A в точку O , но при этом появилась пара, образованная силами \vec{F} и \vec{F}'' . Момент этой пары $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F})$, равен моменту заданной силы \vec{F} относительно точки O .

Этот процесс замены силы \vec{F} равной ей силой \vec{F}' и парой называется приведением силы к точке O .

Точка O называется точкой приведения; сила \vec{F}' , приложенная к точке приведения, – приведённой силой. Появившаяся пара – присоединённой парой.

Приведение плоской системы сил к данному центру.

Пусть на твердое тело действует какая-нибудь система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, лежащих в одной плоскости. Возьмем в этой плоскости произвольную точку O , которую назовем центром приведения, и, перенесем все силы в центр O (рис. 28, а). В результате на тело будет действовать система сил $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$, приложенных в центре O , и система пар, моменты которых будут равны: $m_1 = m_0(\vec{F}_1), m_2 = m_0(\vec{F}_2), \dots, m_n = m_0(\vec{F}_n)$.

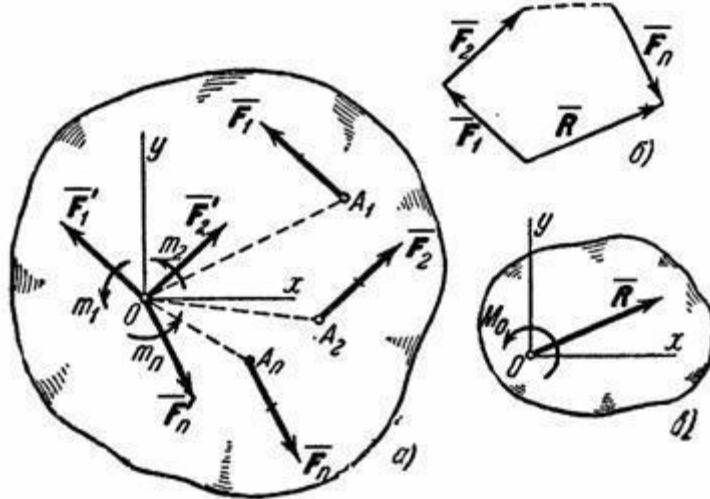


Рис.28

Силы, приложенные в центре O , можно заменить одной силой \vec{R} , приложенной в том же центре; при этом $\vec{R} = \sum \vec{F}'_k$ или $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$.

Точно так же, по теореме о сложении пар, все пары можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары $M_0 = \sum m_k$ или $M_0 = \sum m_0(\vec{F}_k)$.

Величина \vec{R} , равная геометрической сумме всех сил системы, называется, как известно, главным вектором системы; величину M_0 , равную сумме моментов всех сил системы относительно центра O , будем называть главным моментом системы относительно центра O . В результате мы доказали следующую теорему: всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой R , равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O , и одной парой с моментом M_0 , равным главному моменту системы относительно центра O (рис. 28, в).

Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Случай параллельных сил.

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия: $R = 0, M_0 = 0$.

Здесь O - любая точка плоскости.

Найдем вытекающие из равенств аналитические условия равновесия.

Величины R и M_0 определяются равенствами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad M_0 = \sum m_0(\vec{F}_k),$$

где $R_x = \sum F_{kx}, R_y = \sum F_{ky}$. Но R может равняться нулю только тогда, когда одновременно $R_x = 0$ и $R_y = 0$. Следовательно, условия будут выполнены, если будет:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_k) = 0.$$

Равенства выражают, следующие аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

Теорема о трех моментах. Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил системы относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 ; \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0 ; \quad \sum M_C(\vec{F}_i) = 0$$

Равновесие плоской системы параллельных сил.

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, мы можем направить ось Ox перпендикулярно к силам, а ось Oy параллельно им (рис. 29). Тогда проекция каждой из сил на Ox будет равна нулю и первое из 3-х равенств обратится в тождество вида $0 = 0$. В результате для параллельных сил останется два условия равновесия: $\sum \vec{F}_{ky} = 0$, $\sum m_0(\vec{F}_k) = 0$.

Где ось Oy параллельна силам.

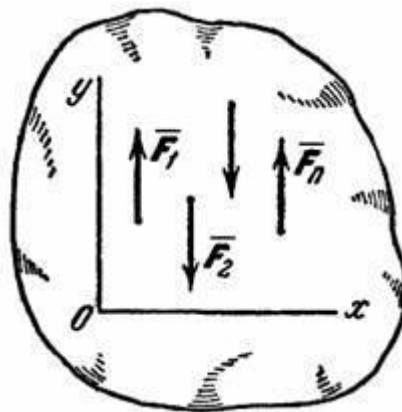


Рис.29

Статически определимые и статически неопределимые задачи.

Для любой плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется три независимых условия равновесия. Следовательно, для любой плоской системы сил из условий равновесия можно найти не более трех неизвестных.

В случае пространственной системы сил, действующих на твердое тело, имеется шесть независимых условия равновесия. Следовательно, для любой пространственной системы сил из условий равновесия можно найти не более шести неизвестных.

Задачи, в которых число неизвестных не больше числа независимых условий равновесия для данной системы сил, приложенных к твердому телу, называются **статически определенными**.

В противном случае задачи **статически неопределимы**.

Решение задач.

При решении задач этого раздела следует иметь в виду все те общие указания, которые были сделаны ранее.

Приступая к решению, надо, прежде всего, установить, равновесие какого именно тела следует в данной задаче рассмотреть. Затем, выделив это тело и рассматривая его как свободное, следует изобразить все действующие на тело заданные силы и реакции отброшенных связей.

Далее следует составить условия равновесия, применяя ту из форм этих условий, ко-

торая приводит к более простой системе уравнений (наиболее простой будет система уравнений, в каждое из которых входит по одному неизвестному).

Для получения более простых уравнений следует (если это только не усложняет ход расчета): а) составляя уравнения проекций, проводить координатную ось, перпендикулярно какой-нибудь неизвестной силе; б) составляя уравнения моментов, брать центр моментов в точке, где пересекается больше неизвестных сил.

При вычислении моментов иногда бывает удобно разлагать данную силу на две составляющие и, пользуясь теоремой Вариньона, находить момент силы как сумму моментов этих составляющих.

Решение многих задач статики сводится к определению реакций опор, с помощью которых закрепляются балки, мостовые фермы и т. п.

Лекция 3. Расчет ферм. Трение скольжения и качения. **Равновесие систем тел.**

Статический расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции из системы тел, соединенных какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть внутренними, в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с телами, в нее не входящими (например, с опорами).

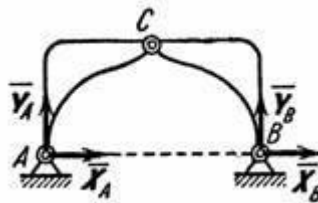


Рис.22

Если после отбрасывания внешних связей (опор) конструкция остается жесткой, то для нее задачи статики решаются как для абсолютно твердого тела.

Однако могут встречаться такие инженерные конструкции, которые после отбрасывания внешних связей не остаются жесткими. Примером такой конструкции является трехшарнирная арка (рис. 22). Если отбросить опоры А и В, то арка не будет жесткой: ее части могут поворачиваться вокруг шарнира С.

На основании принципа отвердевания система сил, действующих на такую конструкцию, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия твердого тела. Но эти условия, как указывалось, будучи необходимыми, не будут являться достаточными, поэтому из них нельзя будет определить всех неизвестных. Для решения задачи необходимо будет дополнительно рассмотреть равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции.

Например, составляя условия равновесия для сил, действующих на трех шарнирную арку (см. рис. 22), мы получим три уравнения с четырьмя неизвестными $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$. Рассмотрев дополнительно условия равновесия левой (или правой) ее половины, мы получим еще три уравнения, содержащие два новых неизвестных \vec{X}_C, \vec{Y}_C , на рис. 22 не показанных. Решая полученную систему шести уравнений, найдем все шесть неизвестных.

Другой способ решения подобных задач состоит в том, что конструкцию сразу расчленяют на отдельные тела и составляют условия равновесия каждого из тел, рассматривая его как свободное. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Для конструкции из n тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, получится таким путем $3n$ уравнений, позволяющих найти $3n$ неизвестных (при других системах сил число уравнений соответственно изменит-

ся). Если для данной конструкции число всех реакций связей будет больше числа уравнений, в которые эти реакции входят, то конструкция будет статически неопределимой.

Расчет ферм. Понятие о ферме. Аналитический расчет плоских ферм.

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферма называется плоской. Места соединения стержней фермы называют узлами. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней (по сравнению с внешними нагрузками) пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Тогда на каждый из стержней фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Следовательно, можно считать, что стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие. Ограничимся рассмотрением жестких плоских ферм, без лишних стержней, образованных из треугольников. В таких фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением

$$k = 2n - 3.$$

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции можно найти обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело. Перейдем к определению усилий в стержнях.

Метод вырезания узлов. Этим методом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы. Ход расчетов поясним на конкретном примере.

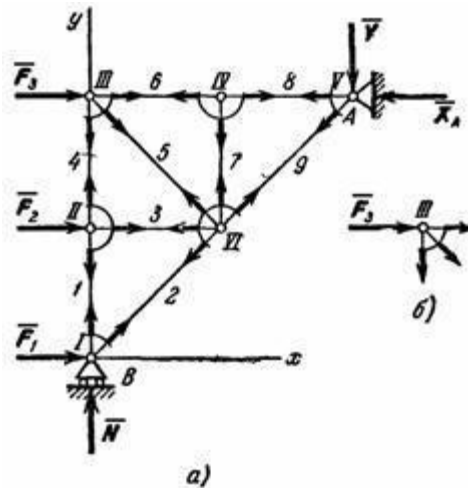


Рис.23

Рассмотрим изображенную на рис. 23,а ферму, образованную из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников; действующие на ферму силы параллельны оси x и равны: $F_1 = F_2 = F_3 = F = 2$.

В этой ферме число узлов $n = 6$, а число стержней $k = 9$. Следовательно, соотношение выполняется и ферма является жесткой, без лишних стержней.

Составляя уравнения равновесия для фермы в целом, найдем, что реакции опор направлены, как показано на рисунке, и численно равны;

$$X_A = 3F = 6H$$

$$Y_A = N = \frac{3}{2}F = 3H$$

Переходим к определению усилий в стержнях.

Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами, а стержни — арабскими. Искомые усилия будем обозначать S_1 (в стержне 1), S_2 (в стержне 2) и т. д. Отрежем мысленно все узлы вместе со сходящимися в них стержнями от остальной фермы. Действие отброшенных частей стержней заменим силами, которые будут направлены вдоль соответствующих

стержней и численно равны искомым усилиям S_1, S_2, \dots . Изображаем сразу все эти силы на рисунке, направляя их от узлов, т. е. считая, все стержни растянутыми (рис. 23, а; изображенную картину надо представлять себе для каждого узла так, как это показано на рис. 23, б для узла III). Если в результате расчета величина усилия в каком-нибудь стержне получится отрицательной, это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат. Буквенных обозначений для сил, действующих вдоль стержней, на рис. 23 не вводим, поскольку ясно, что силы, действующие вдоль стержня 1, равны численно S_1 , вдоль стержня 2 — равны S_2 и т. д.

Теперь для сил, сходящихся в каждом узле, составляем последовательно уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0.$$

Начинаем с узла 1, где сходятся два стержня, так как из двух уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия.

Составляя уравнения равновесия для узла 1, получим

$$F_1 + S_2 \cos 45^\circ = 0, \quad N + S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0.$$

Отсюда находим

$$S_2 = -F \sqrt{2} = -2,82H, \quad S_1 = -N - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{F}{2} = -1H$$

Теперь, зная S_1 , переходим к узлу II. Для него уравнения равновесия дают

$$S_3 + F_2 = 0, \quad S_4 - S_1 = 0,$$

откуда

$$S_3 = -F = -2H, \quad S_4 = S_1 = -1H.$$

Определив S_4 , составляем аналогичным путем уравнения равновесия сначала для узла III, а затем для узла IV. Из этих уравнений находим:

$$S_5 = -S_4 \sqrt{2} = 1,41H, \quad S_6 = S_8 = -3H, \quad S_7 = 0.$$

Наконец, для вычисления S_9 составляем уравнение равновесия сил, сходящихся в узле V, проектируя их на ось V_y . Получим $Y_A + S_9 \cos 45^\circ = 0$, откуда $S_9 = -3\sqrt{2} = -4,23H$.

Второе уравнение равновесия для узла V и два уравнения для узла VI можно составить как проверочные. Для нахождения усилий в стержнях эти уравнения не понадобились, так как вместо них были использованы три уравнения равновесия всей фермы в целом при определении N, X_A , и Y_A .

Окончательные результаты расчета можно свести в таблицу:

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в Н	-1	-2,82	-2	-1	+1,41	-3	0	-3	-4,23

Как показывают знаки усилий, стержень 5 растянут, остальные стержни сжаты; стержень 7 не нагружен (нулевой, стержень).

Наличие в ферме нулевых стержней, подобных стержню 7, обнаруживается сразу, так как если в узле, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Этот результат получается из уравнения равновесия в проекции на ось, перпендикулярную к упомянутым двум стержням.

Если в ходе расчета встретится узел, для которого число неизвестных больше двух, то можно воспользоваться методом сечений.

Метод сечений (метод Риттера). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности, для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилие, и рассматривают

равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т. е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем составляют уравнения равновесия, беря центры моментов (или ось проекций) так, чтобы в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.

Графический расчет плоских ферм.

Расчет фермы методом вырезания узлов может производиться графически. Для этого сначала, определяют опорные реакции. Затем, последовательно отсекая от фермы каждый из ее узлов, находят усилия в стержнях, сходящихся в этих узлах, строя соответствующие замкнутые силовые многоугольники. Все построения проводятся в масштабе, который должен быть заранее выбран. Расчет начинают с узла, в котором сходятся два стержня (иначе не удастся определить неизвестные усилия).

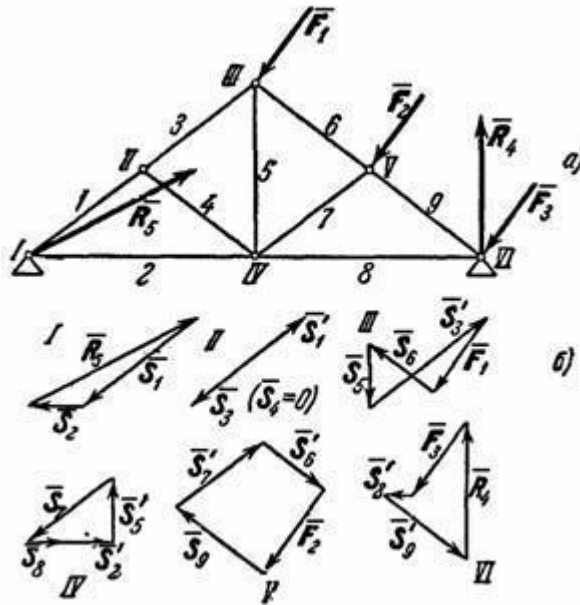


Рис.24

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 24, а. В этой ферме число узлов $n = 6$, а число стержней $k = 9$. Следовательно, соотношение выполняется и ферма является жесткой, без лишних стержней. Опорные реакции \vec{R}_4 и \vec{R}_5 для рассматриваемой фермы, изображаем наряду с силами \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 , как известные.

Определение усилий в стержнях начинаем с рассмотрения стержней, сходящихся в узле I (узлы нумеруем римскими цифрами, а стержни - арабскими). Мысленно отрезав от этих стержней остальную часть фермы, отбрасываем ее действие отброшенной части также мысленно заменяем силами \vec{S}_1 и \vec{S}_2 , которые должны быть направлены вдоль стержней 1 и 2. Из сходящихся в узле I сил \vec{R}_5 , \vec{S}_1 и \vec{S}_2 строим замкнутый треугольник (рис. 24, б). Для этого изображаем сначала в выбранном масштабе известную силу \vec{R}_5 , а затем проводим через ее начало и конец прямые, параллельные стержням 1 и 2. Таким путем будут найдены силы \vec{S}_1 и \vec{S}_2 , действующие на стержни 1 и 2. Затем рассматриваем равновесие стержней, сходящихся в узле II. Действие на эти стержни отброшенной части фермы мысленно заменяем силами \vec{S}_1' , \vec{S}_2' , и \vec{S}_4 , направленными вдоль соответствующих стержней; при этом сила \vec{S}_1' нам известна, так как по равенству действия и противодействия $\vec{S}_1' = -\vec{S}_1$. Построив из

сил, сходящихся в узле II, замкнутый треугольник (начиная с силы \vec{S}'_1), найдем величины S_3 и S_4 (в данном случае $S_4 = 0$). Аналогично находятся усилия в остальных стержнях. Соответствующие силовые многоугольники для всех узлов показаны на рис. 24, б. Последний многоугольник (для узла VI) строится для проверки, так как все входящие в него силы уже найдены.

Из построенных многоугольников, зная масштаб, находим величины всех усилий. Знак усилия в каждом стержне определяется следующим образом. Мысленно вырезав узел по сходящимся в нем стержням (например, узел III), прикладываем к обрезам стержней найденные силы (рис. 25); сила, направленная от узла (\vec{S}'_5 на рис. 25), растягивает стержень, а сила, направленная к узлу (\vec{S}'_3 и \vec{S}'_6 на рис. 25) сжимает его.

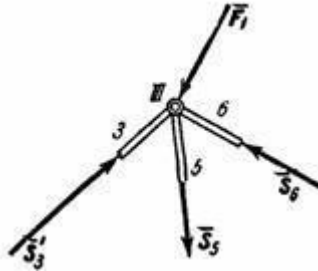


Рис.25

Согласно принятому условию растягивающим усилиям приписываем знак «+», а сжимающим - знак «-». В рассмотренном примере (рис. 25) стержни 1, 2, 3, 6, 7, 9 сжаты, а стержни 5, 8 растянуты.

Трение.

Почему звучит скрипичная струна, когда по ней ведут смычком? Ведь смычок движется, а колебания струны периодические. А как разгоняется автомобиль, и какая сила замедляет его при торможении? Почему автомобиль «заносит» на скользкой дороге? Ответы на все эти и многие другие важные вопросы, связанные с движением тел, дают законы трения.

Вы видите, как разнообразно и порой неожиданно проявляется трение в окружающей нас обстановке. Трение принимает участие, и притом весьма существенное, там, где мы о нём даже и не подозреваем. Если бы трение внезапно исчезло из мира, множество обычных явлений протекало бы совершенно иным образом.

Очень красочно пишет о роли трения французский физик Гильом:

«Всем нам случалось выходить в гололедицу; сколько усилий стоило нам удерживаться от падения, сколько смешных движений приходилось нам проделать, чтобы устоять! Это заставляет нас признать, что обычно земля, по которой мы ходим, обладает драгоценным свойством, благодаря которому мы сохраняем равновесие без особых усилий. Та же мысль возникает у нас, когда мы едем на велосипеде по скользкой мостовой или когда лошадь скользит по асфальту и падает. Изучая подобные явления, мы приходим к открытию тех следствий, к которым приводит трение. Инженеры стремятся по возможности устранить его в машинах – и хорошо делают. В прикладной механике о трении говорится как о крайне нежелательном явлении, и это правильно, - однако лишь в узкой специальной области. Во всех прочих случаях мы должны быть благодарны трению: оно даёт нам возможность ходить, сидеть и работать без опасения, что книги и чернильница упадут на пол, что стол будет скользить, пока не упрётся в угол, а перо выскользывает из пальцев.

Трение представляет настолько распространенное явление, что нам, за редкими исключениями, не приходится призывать его на помощь: оно является к нам само.

Трение способствует устойчивости. плотники выравнивают пол так, что столы и стулья остаются там, куда их поставили. Блюдца, тарелки, стаканы, поставленные на стол,

остаются неподвижными без особых забот с нашей стороны, если только дело не происходит на пароходе во время качки.

Вообразим, что трение может быть устранено совершенно. Тогда никакие тела, будь они величиною с каменную глыбу или малы, как песчинки, никогда не удержатся одно на другом: всё будет скользить и катиться, пока не окажется на одном уровне. Не будь трения, Земля представляла бы шар без неровностей, подобно жидкому».

К этому можно прибавить, что при отсутствии трения гвозди и винты выскальзывали бы из стен, ни одной вещи нельзя было бы удержать в руках, никакой вихрь никогда бы не прекращался, никакой звук не умолкал бы, а звучал бы бесконечным эхом, неослабно отражаясь, например, от стен комнаты.

Наглядный урок, убеждающий нас в огромной важности трения, даёт нам всякий раз гололедица. Застигнутые ею на улице, мы оказываемся беспомощными, и всё время рискуем упасть. Вот поучительная выдержка из газеты (декабрь 1927 г.):

«Лондон, 21. Вследствие сильной гололедицы уличное и трамвайное движение в Лондоне сильно затруднено. Около 1400 человек поступило в больницы с переломами рук, ног и т. д.».

«При столкновении вблизи Гайд-Парка трёх автомобилей и двух трамвайных вагонов машины были уничтожены из-за взрыва бензина...»

«Париж, 21. Гололедица в Париже и его пригородах вызвала многочисленные несчастные случаи...»

Однако, ничтожное трение на льду может быть успешно использовано технически. Уже обыкновенные сани служат тому примером. Ещё лучше свидетельствуют об этом так называемые ледяные дороги, которые устраивали для вывозки леса с места рубки к железной дороге или к пунктам сплава. На такой дороге, имеющей гладкие ледяные рельсы, две лошади тащат сани, нагруженные 70 тоннами брёвен.

Трение покоя, скольжения.

Прежде думали, что механизм трения не сложен: поверхность покрыта неровностями и трение есть результат подъёма скользящих частей на эти неровности; но это неправильно, ведь тогда не было бы потерь энергии, а на самом деле энергия на трение тратится.

Механизм потерь иной. И здесь крайне неожиданным оказывается, что эмпирически это трение можно приближенно описать простым законом. Сила нужная для того, чтобы преодолеть трение и тащить один предмет по поверхности другого, зависит от силы, направленной по нормали к поверхностям соприкосновения.

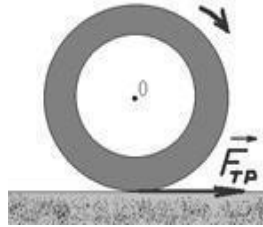
Поверхность твёрдого тела обычно обладает неровностями. Например, даже у очень хорошо отшлифованных металлов в электронный микроскоп видны «горы» и «впадины» размером в $100 - 1000 \text{ \AA}$. При сжатии тел соприкосновение происходит только в самых высоких местах и площадь реального контакта значительно меньше общей площади соприкасающихся поверхностей. Давление в местах соприкосновения может быть очень большим, и там возникает пластическая деформация. При этом площадь контакта увеличивается, а давление падает. Так продолжается до тех пор, пока давление не достигнет определённого значения, при котором деформация прекращается. Поэтому площадь фактического контакта оказывается пропорциональной сжимающей силе.

В месте контакта действуют силы молекулярного сцепления (известно, например, что очень чистые и гладкие металлические поверхности прилипают друг к другу).

Эта модель сил сухого трения (так называют трение между твёрдыми телами), по видимому, близка к реальной ситуации в металлах.

Если тело, например, просто лежит на горизонтальной поверхности, то сила трения на него не действует. Трение возникает, если попытаться сдвинуть тело, приложить к нему силу. Пока величина этой силы не превышает определённого значения, тело остаётся в покое и сила трения равна по величине и обратна по направлению приложенной силе. Затем начинается движение.

Может показаться удивительным, но именно сила трения покоя разгоняет автомобиль. Ведь при движении автомобиля колеса не проскальзывают относительно дороги, и между шинами и поверхностью дороги возникает сила трения покоя. Как легко видеть, она направлена в сторону движения автомобиля. Величина этой силы не может превосходить максимального значения трения покоя. Поэтому если на скользкой дороге резко нажать на газ, то автомобиль начнет буксовать. А вот если нажать на тормоза, то вращение колёс прекратится, и автомобиль будет скользить по дороге. Сила трения изменит своё направление и начнёт тормозить автомобиль.



Сила трения при скольжении твёрдых тел зависит не только от свойств поверхностей и силы давления (это зависимость качественно такая же, как для трения покоя), но и от скорости движения. Часто с увеличением скорости сила трения сначала резко падает, а затем снова начинает возрастать.

Эта важная особенность силы трения скольжения как раз и объясняет, почему звучит скрипичная струна. Вначале между смычком и струной нет проскальзывания, и струна захватывается смычком. Когда сила трения покоя достигнет максимального значения, струна сорвется, и дальше она колеблется почти как свободная, затем снова захватывается смычком и т.д.

Подобные, но уже вредные колебания могут возникнуть при обработке металла на токарном станке вследствие трения между снимаемой стружкой и резцом. И если смычок натирают канифолью, чтобы сделать зависимость силы трения от скорости более резкой, то при обработке металла приходится действовать наоборот (выбирать специальную форму резца, смазку и т.п.). Так что важно знать законы трения и уметь ими пользоваться.

Кроме сухого трения существует ещё так называемое жидкое трение, возникающее при движении твёрдых тел в жидкостях и газах и связанное с их вязкостью. Силы жидкого трения пропорциональны скорости движения и обращаются в нуль, когда тело останавливается. Поэтому в жидкости можно заставить тело двигаться, прикладывая даже очень маленькую силу. Например, тяжелую баржу на воде человек может привести в движение, отталкиваясь то дна шестом, а на земле такой груз ему, конечно, не сдвинуть. Эта важная особенность сил жидкого трения объясняет, например, тот факт, почему автомобиль «заносит» на мокрой дороге. Трение становится жидким, и даже небольшие неровности дороги, создающие боковые силы, приводят к «заносу» автомобиля.

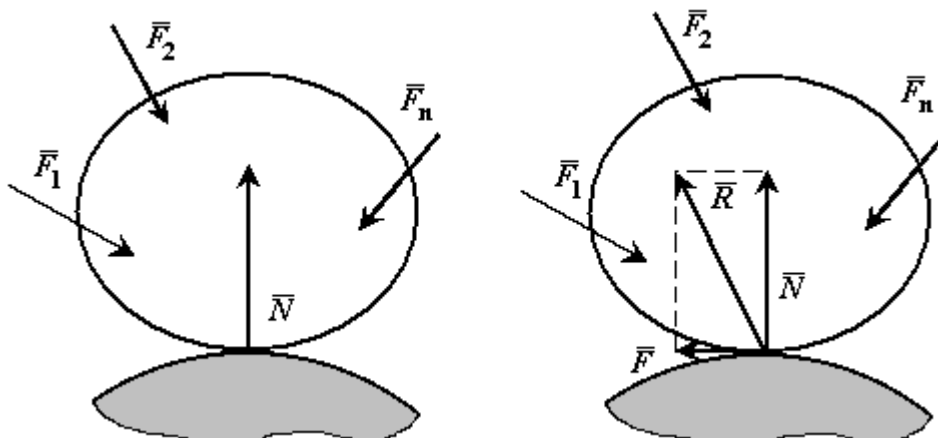
Резюмируя вышесказанное можно заключить, что возникновение трения обусловлено, прежде всего, шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения представляет собою довольно сложную физико-механическую проблему, рассмотрение которой выходит за рамки курса теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем общих закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности, называемые законами трения скольжения при покое (законами Кулона), можно сформулировать следующим образом:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), величина которой может принимать любые значения от нуля до значения F_{np} , называемого предельной силой трения.

$$0 < \bar{F} < \bar{F}_{np}.$$

Силой трения скольжения \vec{F} (или просто силой трения) называется составляющая силы реакции связи, которая лежит в касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел.



Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

В теоретической механике предполагается, что между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Сухим трением называется трение, когда между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Будем рассматривать два случая: трения при покое или равновесии тела и трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью.

При покое сила трения зависит только от активных сил. При выбранном направлении касательной в точке соприкосновения поверхностей тел сила трения вычисляется по формуле:

$$\vec{F} = -\sum \vec{F}_{\vec{v}}$$

Аналогично при выбранном направлении нормали нормальная реакция выражается через заданные силы:

$$\vec{N} = -\sum \vec{F}_{ni}$$

При движении одного тела по поверхности другого сила трения является постоянной величиной.

2. Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию:

$$F_{np} = f_0 N.$$

Статический коэффициент трения f_0 — число отвлеченное $0 < f_0 < 1$; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность, смазка и т. п.). Считается, что коэффициент трения не зависит от скорости движения.

3. Предельная сила трения скольжения при прочих равных условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей. Из этого закона следует, что для того чтобы сдвинуть, например кирпич, надо приложить одну и ту же силу, независимо, от того, какой гранью он положен на поверхность, широкой или узкой.

Объединяя вместе первый и второй законы, получаем, что при равновесии сила трения покоя (сила сцепления)

$$F \leq F_{np} \text{ или } F \leq f_0 N.$$

Реакции шероховатых связей. Угол трения.

До сих пор при решении задач статики мы пренебрегали трением и считали поверхности связей гладкими, а их реакции направленными по нормальным к этим поверхностям. Реакция реальной (шероховатой) связи будет состоять из двух составляющих: из нормальной реакции \vec{N} и перпендикулярной к ней силы трения \vec{F} . Следовательно, полная реакция \vec{R} будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до F_{np} сила R будет меняться от N до R_{np} , а ее угол с нормалью будет расти от нуля до некоторого предельного значения φ_0 (рис. 26).

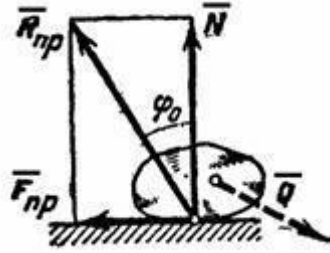


Рис.26

Наибольший угол φ_0 , который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется **углом трения**. Из чертежа видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{np}}{N}.$$

Так как $F_{np} = f_0 N$, отсюда находим следующую связь между углом трения и коэффициентом трения:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0.$$

При равновесии полная реакция R , в зависимости от сдвигающих сил, может проходить где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол φ_0 .

Конусом трения называют конус, описанный предельной силой реакции шероховатой связи \vec{R}_{np} вокруг направления нормальной реакции.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу P , образующую угол α с нормалью (рис. 27), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P \sin \alpha$ будет больше $F_{np} = f_0 P \cos \alpha$ (мы считаем $N = P \cos \alpha$, пренебрегая весом тела). Но неравенство $P \sin \alpha > f_0 P \cos \alpha$, в котором $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, выполняется только при $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi_0$, т.е. при $\alpha > \varphi_0$. Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол α , меньший угла трения φ_0 , тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняются известные явления заклинивания или самоторможения тел.

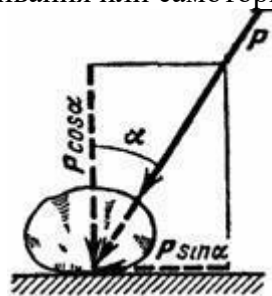


Рис.27

Для равновесия твёрдого тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на твёрдое тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через его вершину.

Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если её линия действия проходит внутри конуса трения.

Равновесие при наличии трения.

Изучение равновесия тел с учетом трения сводится обычно к рассмотрению предельного положения равновесия, когда сила трения достигает своего наибольшего значения F_{np} . При аналитическом решении задач реакцию шероховатой связи в этом случае изображают двумя составляющими N и F_{np} , где $F_{np} = f_0 N$. Затем составляют обычные условия равновесия статики, подставляют в них вместо F_{np} величину $f_0 N$ и, решая полученные уравнения, определяют искомые величины.

Пример 1. Рассмотрим тело, имеющее вертикальную плоскость симметрии (рис.28). Сечение тела этой плоскости имеет форму прямоугольника. Ширина тела равна $2a$.

К телу в точке C , лежащей на оси симметрии, приложена вертикальная сила \bar{Q} и в точке A , лежащей на расстоянии h от основания, горизонтальная сила \bar{P} . Реакция плоскости основания (реакция связи) приводится к нормальной реакции \bar{N} и силе трения \bar{F} . Линия действия силы \bar{N} неизвестна. Расстояние от точки C до линии действия силы \bar{N} обозначим x ($x \leq a$).

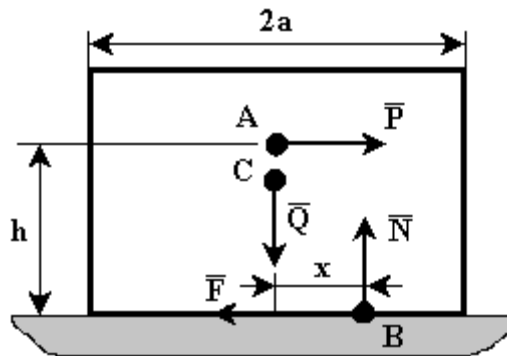


Рис.28

Составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad P - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad N - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Q$$

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0 \quad Q \cdot x - P \cdot h = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{P \cdot h}{Q} \leq a$$

Согласно закону Кулона $F \leq f \cdot N$, т.е. $P \leq f \cdot Q$. (1)

Так как $\frac{P \cdot h}{Q} \leq a$, то $P \leq \frac{a}{h} Q$ (2)

Проанализируем полученные результаты:

Будем увеличивать силу \bar{P} .

Если $f < \frac{a}{h}$, то равновесие будет иметь место до тех пор, пока сила трения не достигнет своей предельной величины, условие (1) превратится в равенство. Дальнейшее увеличе-

ние силы приведет к скольжению тела по поверхности.

Если $f > \frac{a}{h}$, то равновесие будет иметь место до тех пор, пока сила трения не достигнет величины $\frac{a \cdot Q}{h}$,

нет величины h , условие (2) превратится в равенство. Величина x будет равна h . Дальнейшее увеличение силы приведет к тому, что тело станет опрокидываться вокруг точки B (скольжения не будет).

Пример 2. На какое максимальное расстояние a может подняться человек по лестнице, приставленной к стене (рис.29)? Если вес человека – P , коэффициент трения скольжения между лестницей и стеной – f_1 , между лестницей и полом – f_2 .

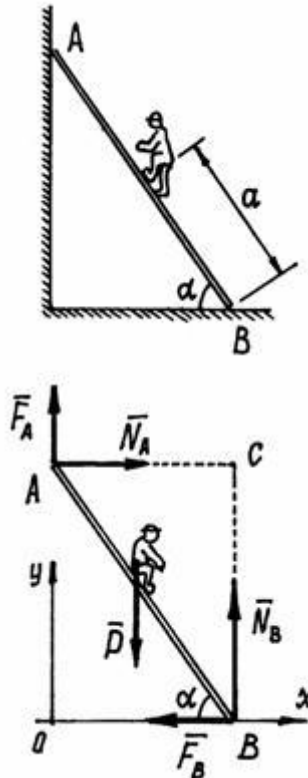


Рис.29

Рассматриваем равновесие лестницы с человеком. Показываем силу \vec{F} , нормальные реакции \vec{N}_A и \vec{N}_B и добавляем силы трения: $F_A = f_1 \cdot N_A$ и $F_B = f_2 \cdot N_B$. Полагаем, что человек находится на расстоянии $a = a_{\max}$, при большем значении которого начнётся движение лестницы. Составляем уравнения равновесия.

$$\sum X_i = 0; N_A - F_B = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; F_A - P + N_B = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; -F_A l \cos \alpha + P a \cos \alpha - F_B l \sin \alpha = 0.$$

Подставив значения сил трения и решив систему уравнений, получим

$$a = l \frac{f_2}{1 + f_1 \cdot f_2} (f_1 + \operatorname{tg} \alpha).$$

Теперь можно определить и угол под которым надо поставить лестницу, чтоб добраться до стены. Полагая $a = l$, получим, после преобразований, $\operatorname{ctg} \alpha = f_2$ и $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} f_2$.

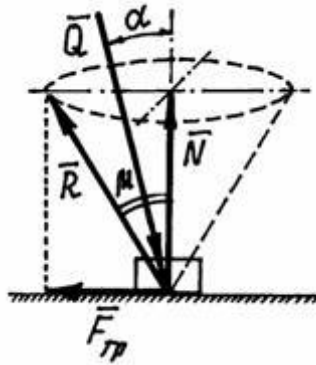


Рис.30

Заметим, что если равнодействующая \vec{Q} всех активных сил (всех кроме реакций) направлена под углом α (рис.30), то нормальная реакция $N = Q \cos \alpha$, а сила трения $F_{\text{тр}} = fN = fQ \cos \alpha$. Для того, чтобы началось скольжение должно выполняться условие $Q \sin \alpha > fQ \cos \alpha$, или $\text{tg} \alpha > f$. И так как $f = \text{tg} \mu$, то $\text{tg} \alpha > \text{tg} \mu$. Значит угол α должен быть больше угла μ . Следовательно, если сила \vec{Q} действует внутри угла или конуса трения ($\alpha < \mu$), то как бы не была велика эта сила, скольжение тела не произойдет. Такое условие называется условием заклинивания, самоторможения.

Мы рассмотрели скольжение твёрдых тел по поверхности. Но нередко встречается скольжение гибких тел по неплоской поверхности. Например, нежелательное проскальзывание в ременной передаче ремня по шкиву, или троса, каната, намотанного на неподвижный цилиндр.

Пример 3. Пусть имеется нить, перекинута через неподвижную цилиндрическую поверхность (рис.31). За счёт сил трения натяжение левого и правого концов этой нити будут различными.

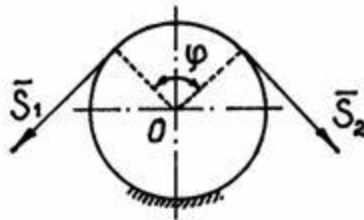


Рис.31

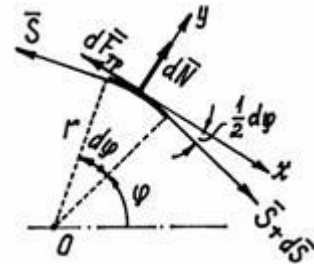


Рис.32

Предположим, что нормальная реакция и сила трения распределяются равномерно по дуге контакта нити на цилиндре. Рассмотрим равновесие участка нити длиной $dl = r \cdot d\varphi$ (рис.32). На левом конце этого участка натяжение \vec{S} , на правом $\vec{S} + d\vec{S}$. Составляем уравнения равновесия, проецируя силы на оси:

$$\sum X_i = 0; -S \cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) - dF_{\text{тр}} + (S + dS) \cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; -S \sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) + dN - (S + dS) \sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 0.$$

Так как угол $d\varphi$ - малая величина, то полагаем $\sin\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = \frac{1}{2}d\varphi$, $\cos\left(\frac{1}{2}d\varphi\right) = 1$. С

учётом этого из уравнений находим $dF_{\text{тр}} = dS$, $dN = Sd\varphi$ и, так как $dF_{\text{тр}} = fdN$, имеем $dS = f \cdot Sd\varphi$ или $\frac{dS}{S} = f \cdot d\varphi$. Интегрируя, получим $\ln S \Big|_{S_2}^{S_1} = f\varphi \Big|_0^{\varphi}$. Или $\frac{S_2}{S_1} = e^{-f\varphi}$.

Этот результат называется формулой Эйлера.

Например, если нить перекинута через неподвижный шкив и $\varphi = \pi$, а коэффициент трения $f = 0,2$, то отношение натяжений $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,2\pi} = 0,533$. А, обернув цилиндр один раз ($\varphi = 2\pi$), $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,22\pi} = 0,285$, то есть можно удержать груз на другом конце нити силой почти в три раза меньшей веса тела.

Трение качения и верчения.

Возьмем деревянный цилиндр и положим его на стол так, чтобы он касался стола по образующей. В центры оснований цилиндра вставим концы проволочной вилки и прикрепим к ней снабженный очень чувствительный динамометр. Если тянуть за динамометр, то цилиндр покатится по столу. По показаниям динамометра увидим, что нужна весьма небольшая сила тяги, чтобы сдвинуть с места цилиндр и катить его равномерно дальше, гораздо меньшая, чем при скольжении того же цилиндра, если бы он не вращался и скользил бы по столу. При той же силе давления на стол сила трения качения много меньше силы трения скольжения. Например, при качении стальных колёс по стальным рельсам трение качения примерно в 100 раз меньше, чем трение скольжения. Поэтому в машинах стремятся заменить трение скольжения трением качения, применяя так называемые шариковые или роликовые подшипники.

Происхождение трения качения можно наглядно представить себе так. Когда шар или цилиндр катится по поверхности другого тела, он немного вдавливается в поверхность этого тела, а сам немного сжимается. Таким образом, катящееся тело всё время как бы вкатывается на горку.

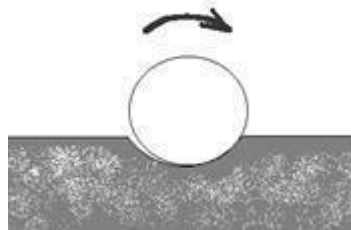


Рис.33

Вместе с тем происходит отрыв участков одной поверхности от другой, а силы сцепления, действующие между этими поверхностями, препятствуют этому. Оба эти явления и вызывают силы трения качения. Чем твёрже поверхности, тем меньше вдавливание и тем меньше трение качения.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

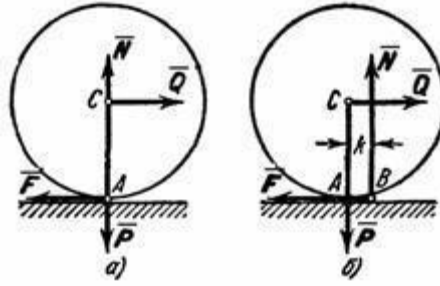


Рис.34

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса R и веса \vec{P} , лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости. Приложим к оси катка силу \vec{Q} (рис. 34, а), меньшую F_{np} . Тогда в точке A возникает сила трения \vec{F} , численно равная Q , которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию \vec{N} тоже приложенной в точке A , то она уравнивает силу \vec{P} , а силы \vec{Q} и \vec{F} образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы \vec{Q} .

Истинная же картина, как показывает опыт, выглядит иначе. Объясняется это тем, что фактически, вследствие деформаций тел, касание их происходит вдоль некоторой площадки AB (рис. 34, б). При действии силы \vec{Q} интенсивность давлений у края A убывает, а у края B возрастает. В результате реакция \vec{N} оказывается смещенной в сторону действия силы \vec{Q} . С увеличением \vec{Q} это смещение растет до некоторой предельной величины k . Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара (\vec{Q}_{np}, \vec{F}) с моментом $Q_{np}R$ и уравнивающая ее пара (\vec{N}, \vec{P}) с моментом Nk . Из равенства моментов находим $Q_{np}R = Nk$ или

$$Q_{np} = \frac{k}{R} N.$$

Пока $Q < Q_{np}$, каток находится в покое; при $Q > Q_{np}$ начинается качение.

Входящая в формулу линейная величина k называется коэффициентом трения качения. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значение коэффициента k зависит от материала тел и определяется опытным путем.

Коэффициент трения качения при качении в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости.

Для вагонного колеса по рельсу $k = 0,5$ мм.

Рассмотрим движение ведомого колеса. $\vec{L} = 0$, а $\vec{Q} \neq 0$.

Качение колеса начнется, когда выполнится условие $Q \cdot R > M_{\max}$ или $Q > \frac{M_{\max}}{R} = \frac{k \cdot N}{R} = \frac{k}{R} \cdot N$

Скольжение колеса начнется, когда выполнится условие $Q > F_{\max} = f \cdot N$.

Обычно отношение $\frac{k}{R} < f_0$ и качение начинается раньше скольжения.

Если $\frac{k}{R} > f_0$, то колесо будет скользить по поверхности, без качения.

Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0 . Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

Сопротивление среды.

Если твёрдое тело находится внутри жидкости или газа, то вся его поверхность всё время соприкасается с частицами жидкости или газа. При движении тела на него со стороны жидкости или газа действуют силы, направленные навстречу движению. Эти силы называют сопротивлением среды. Как силы трения, сопротивление среды всегда направленно против движения. Сопротивление среды можно рассматривать как один из видов трения.

Особенностью сил трения в жидкости или газе является отсутствие трения покоя. Твёрдое тело лежащее на другом твёрдом теле, может быть сдвинуто с места, только если к нему приложена достаточно большая сила, превосходящая наибольшую силу трения покоя. При меньшей силе твёрдое тело с места не сдвинется, сколько бы времени эта сила ни действовала. Картина получается иной, если тело находится в жидкости. В этом случае, чтобы сдвинуть с места тело, достаточно сколь угодно малых сил: хотя и очень медленно, но всё же тело начнёт двигаться. Человек вообще никогда не сдвинет с места голыми руками камень весом в сто тонн. В то же время баржу весом в сто тонн, плавающую на воде, один человек, хотя и очень медленно, но всё же сможет двигать. Однако по мере увеличения скорости сопротивление среды сильно увеличивается, так что, сколько бы времени сила не действовала, она не сможет разогнать тело до большой скорости.

Важной характеристикой жидких и газообразных сред является вязкость. Вязкость – свойство текучих тел (жидкостей и газов) сопротивляться перемещению одной их части относительно другой под действием внешних сил.

Количественно вязкость определяется величиной касательной силы, которая должна быть приложена к единице площади сдвигаемого слоя, чтобы поддерживать в этом слое ламинарное течение с постоянной скоростью относительно сдвига, равной единице.

Вязкость газов и жидкостей, согласно молекулярной кинетической теории, вызвана передачей импульса от молекул более быстро движущегося слоя к молекулам более медленного слоя, которая происходит при перемешивании молекул соседних слоёв вследствие теплового движения.

Силы внутреннего трения гораздо меньше сил трения скольжения. Поэтому для уменьшения трения между движущимися частями машин и механизмов используется смазка – слой вязкой жидкости, заполняющий пространство между трущимися поверхностями и отталкивающий их друг от друга. Это приводит к существенному уменьшению нагрева и износа деталей. Вместе с тем следует избегать попадания жидкости между фрикционными муфтами, ремнём и шкивом в ременной передаче, ведущими колесами локомотива и рельсом и т.п., ибо во всех этих случаях именно сила трения служит для передачи движения.

С увеличением температуры вязкость газов возрастает, а жидкостей (за некоторым исключением) резко падает. Это связано с различиями в характере движения молекул в жидкости и газе. При понижении температуры вязкость некоторых жидкостей настолько возрастает, что они теряют характерную для них способность течь, превращаясь в аморфные твёрдые тела.

Сопротивление воздуха.

При движении твёрдого тела в воздухе на тело действует сила сопротивления воздуха, направленная противоположно движению тела. Такая же сила возникает, если на неподвижное тело набегают пучок воздуха; она направлена, конечно, по движению потока.

Сила сопротивления вызывается, во-первых, трением воздуха о поверхность тела и,

во-вторых, изменением движения потока, вызванным телом. В воздушном потоке, изменённом присутствием тела, давление на передней стороне тела растёт, а на задней – понижается по сравнению с давлением в невозмущенном потоке.

Таким образом, создаётся разность давлений, тормозящая движущееся тело или увлекающая тело, погруженное в поток. Движение воздуха позади тела принимает беспорядочный вихревой характер.

Сила сопротивления зависит от скорости потока, от размеров и формы тела.

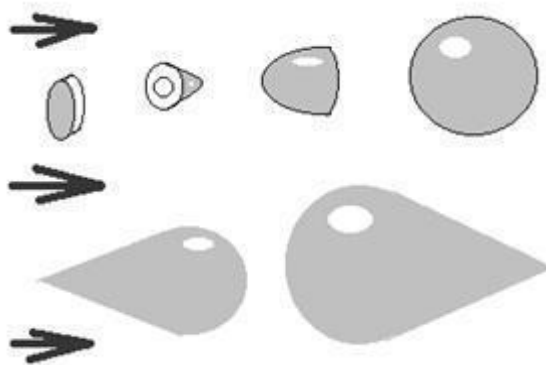


Рис.35

Для всех тел, изображенных на рисунке, сопротивление движению одинаково, несмотря на весьма разные размеры тел.

«Обтекаемое» тело почти не нарушает правильности потока; поэтому давление на заднюю часть тела лишь немного понижено по сравнению с передней частью и сопротивление не велико.

Различные обтекатели, устанавливаемые на выдающихся частях самолёта, как раз имеют своим назначением устранять завихрения потока выступающими частями конструкции. Вообще же конструкторы стремятся оставлять на поверхности возможно меньшее количество выдающихся частей и неровностей, могущих создавать завихрения.

Влияние сопротивления воздуха сильно сказывается и для наземных средств передвижения: с увеличением скорости автомобилей на преодоление сопротивления воздуха затрачивается всё большая часть мощности мотора. Поэтому современным автомобилям также придают по возможности обтекаемую форму.

Для уменьшения трения при сверхзвуковой скорости нужно заострять переднюю часть движущегося тела, в то время как при меньших скоростях наибольшее значение имеет «обтекаемость».

Сопротивление воды.

При движении тел в воде также возникают силы сопротивления, направленные противоположно движению тела. Если тело движется под водой, то сопротивление теми же обстоятельствами, что и при движении в воздухе: трение воды о поверхность тела и изменением потока, создающим дополнительное сопротивление. Быстро плавающие рыбы и китообразные имеют «обтекаемую форму тела, уменьшающую сопротивление воды при их движении. Обтекаемую форму придают и подводным лодкам. Вследствие большой плотности воды по сравнению с плотностью воздуха, сопротивление движению данного тела в воде много больше сопротивления в воздухе при той же скорости движения.

Для обычных судов, идущих на поверхности воды, есть ещё дополнительное волновое сопротивление: от идущего судна на поверхности воды расходятся волны, на создание которых непроизводительно затрачивается часть работы судовой машины.

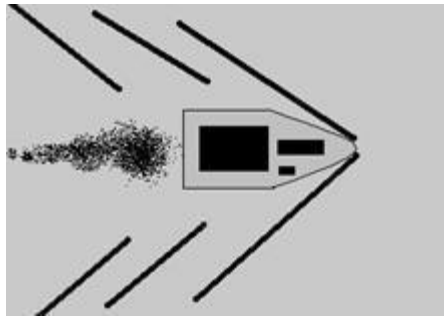


Рис.36

Для уменьшения волнового сопротивления, которое для быстроходных судов может составлять $3/4$ полного сопротивления, корпусу судна придают специальную форму. Нос судна в подводной части иногда делают «бульбообразной» формы; при этом образование волн на поверхности воды уменьшается, а значит, уменьшается и сопротивление.

Момент силы относительно центра как вектор.

Чтобы перейти к решению задач статики для системы сил, как угодно расположенных в пространстве, оказывается необходимым несколько уточнить и расширить ряд введенных ранее понятий. Начнем с понятия о моменте силы.

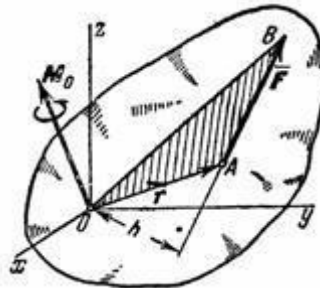


Рис.37

1. Изображение момента вектором. Момент силы \vec{F} относительно центра O (см. рис. 37) как характеристика ее вращательного эффекта определяется следующими тремя элементами:

1) модулем момента, равным произведению модуля силы на плечо, т. е. Fh ; 2) плоскостью поворота OAB , проходящей через линию действия силы \vec{F} и центр O ; 3) направлением поворота в этой плоскости. Когда все силы и центр O лежат в одной плоскости, необходимость задавать каждый раз плоскость поворота OAB отпадает, и момент можно определять как скалярную алгебраическую величину, равную $\pm Fh$, где знак указывает направление поворота.

Но в случае сил, произвольно расположенных в пространстве, плоскости поворота у разных сил будут разными и должны задаваться дополнительно. Положение плоскости в пространстве можно задать, задав отрезок (вектор), перпендикулярный к этой плоскости. Если одновременно модуль этого вектора выбрать равным модулю момента силы и условиться направлять этот вектор так, чтобы его направление определяло направление поворота силы, то такой вектор полностью определит все три элемента, характеризующие момент данной силы относительно центра O .

Поэтому в общем случае момент $m_0(\vec{F})$ силы \vec{F} относительно центра O (рис. 37) будем изображать приложенным в центре O вектором \vec{M}_0 , равным по модулю (в выбранном масштабе) произведению модуля силы \vec{F} на плечо h и перпендикулярным к плоскости OAB ,

проходящей через центр O и силу \vec{F} . Направлять вектор \vec{M}_0 будем в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки. Таким образом, вектор \vec{M}_0 будет одновременно характеризовать модуль момента, плоскость поворота OAB , разную для разных сил, и направление поворота в этой плоскости. Точка приложения вектора \vec{M}_0 определяет положение центра момента.

2. Выражение момента силы с помощью векторного произведения. Рассмотрим векторное произведение $\vec{OA} \times \vec{F}$ векторов \vec{OA} и \vec{F} (рис. 37). По определению, $|\vec{OA} \times \vec{F}| = 2 \text{пл. } \triangle OAB = M_O$,

так как модуль вектора \vec{M}_0 тоже равен 2 пл. $\triangle OAB$. Направлен вектор $(\vec{OA} \times \vec{F})$ перпендикулярно к плоскости OAB , в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение \vec{OA} с \vec{F} (если их отложить от одной точки) видно против хода часовой стрелки, т. е., так же, как вектор \vec{M}_0 . Следовательно, векторы $(\vec{OA} \times \vec{F})$ и \vec{M}_0 совпадают и по модулю и по направлению и, как легко проверить, по размерности, т. е. оба эти вектора изображают одну и ту же величину. Отсюда

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F},$$

где вектор $\vec{r} = \vec{OA}$ называется радиусом-вектором точки A относительно центра O .

Таким образом, момент силы \vec{F} относительно центра O равен векторному произведению радиуса вектора $\vec{r} = \vec{OA}$, соединяющего центр O с точкой приложения силы A , на саму силу. Этим выражением момента силы бывает удобно пользоваться при доказательстве некоторых теорем.

Момент пары сил как вектор.

Действие пары сил на тело характеризуется: 1) величиной модуля момента пары, 2) плоскостью действия, 3) направлением поворота в этой плоскости. При рассмотрении пар, не лежащих в одной плоскости, для характеристики каждой из пар необходимо будет задать все эти три элемента. Это можно сделать, если условиться, по аналогии с моментом силы, изображать момент пары соответствующим образом, построенным вектором, а именно: будем изображать момент пары вектором \vec{m} или \vec{M} , модуль которого равен (в выбранном масштабе) модулю момента пары, т.е. произведению одной из ее сил на плечо, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 38).

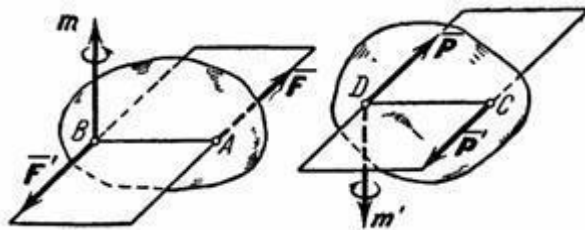


Рис. 38

Как известно модуль момента пары равен моменту одной из ее сил относительно точки, где приложена другая сила, т. е. $\vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F})$; по направлению же векторы этих моментов совпадают. Следовательно $\vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F}) = \vec{m}_A(\vec{F}')$.

Момент силы относительно оси.

Чтобы перейти к решению задач статики для случая произвольной пространственной системы сил, необходимо ввести еще понятие о моменте силы относительно оси.

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z (рис. 39).

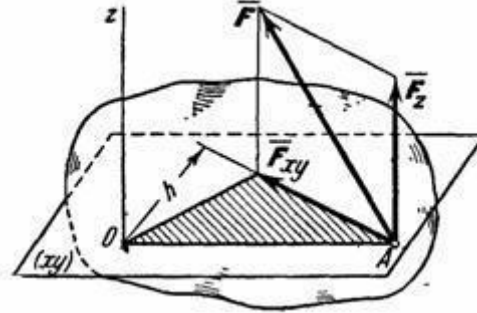


Рис.39

Пусть на это тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке A . Проведем через точку A плоскость xy , перпендикулярную оси z , и разложим силу \vec{F} на составляющие: \vec{F}_z , параллельную оси z , и \vec{F}_{xy} , лежащую в плоскости xy (\vec{F}_{xy} является одновременно проекцией силы \vec{F} на плоскости xy). Сила \vec{F}_z , направленная параллельно оси z , очевидно, не может повернуть тело вокруг этой оси (она только стремится сдвинуть тело вдоль оси z). Весь вращательный эффект, создаваемый силой \vec{F} , будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей \vec{F}_{xy} . Отсюда заключаем, что $m_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_{xy})$, где символ $m_z(\vec{F})$ обозначает момент силы \vec{F} относительно оси z .

Для силы же \vec{F}_{xy} , лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси z , вращательный эффект измеряется произведением модуля этой силы на ее расстояние h от оси. Но этой же величиной измеряется момент силы \vec{F}_{xy} относительно точки O , в которой ось z пересекается с плоскостью xy . Следовательно, $m_z(\vec{F}_{xy}) = m_O(\vec{F}_{xy})$ или, согласно предыдущему равенству, $m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h$.

В результате приходим к следующему определению: моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

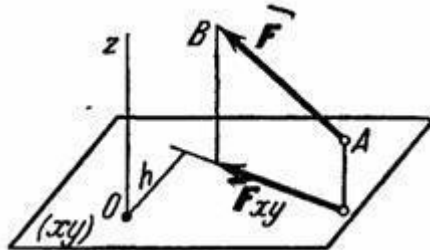


Рис.40

Момент будем считать положительным, если с положительного конца оси z поворот, который сила \vec{F}_{xy} , стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Из чертежа (рис.40) видно, что при вычислении момента плоскость $xу$ можно проводить через любую точку оси z . Таким образом, чтобы найти момент силы относительно оси z (рис. 40) надо:

- 1) провести плоскость $xу$, перпендикулярную к оси z (в любом месте);
- 2) спроектировать силу \vec{F} на эту плоскость и вычислить величину \vec{F}_{xy} ;
- 3) опустить из точки O пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на направление \vec{F}_{xy} и найти его длину h ;
- 4) вычислить произведение $F_{xy} \cdot h$;
- 5) определить знак момента.

При вычислении моментов надо иметь в виду следующие частные случаи:

- 1) Если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как $F_{xy} = 0$).
- 2) Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси также равен нулю (так как $h = 0$).

Объединяя оба случая вместе, заключаем, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

- 3) Если сила перпендикулярна к оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силой и осью.

Пример 4. Определим моменты сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 относительно осей (рис.41).

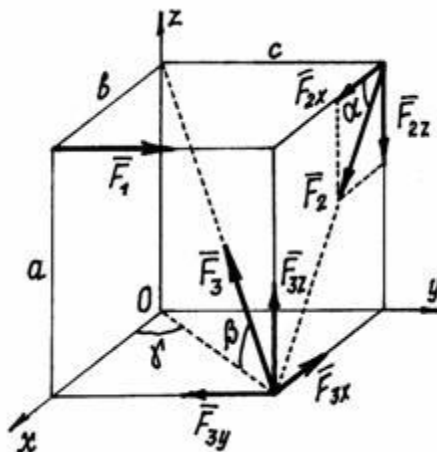


Рис.41

Моменты силы \vec{F}_1 находятся просто:

$$M_x(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot a,$$

$$M_y(\vec{F}_1) = 0,$$

$$M_z(\vec{F}_1) = F_1 \cdot b.$$

Моменты сил \vec{F}_2 и \vec{F}_3 - посложнее.

В тех случаях, когда вектор силы направлен под углом к осям, полезно разложить вектор силы на составляющие параллельные осям и, затем, находить сумму моментов этих составляющих.

Так моменты силы \vec{F}_2 :

$$M_x(\vec{F}_2) = M_x(\vec{F}_{2x}) + M_x(\vec{F}_{2z}) = 0 - F_{2z} \cdot c = -F_2 \sin \alpha \cdot c,$$

$$M_y(\vec{F}_2) = M_y(\vec{F}_{2x}) = F_2 \cdot a = F_2 \cos \alpha \cdot a,$$

$$M_x(\vec{F}_2) = -F_{2x} \cdot c = -F_2 \cos \alpha \cdot c.$$

И силы \vec{F}_3 :

$$M_x(\vec{F}_3) = F_{3x} \cdot c = F_3 \sin \beta \cdot c,$$

$$M_y(\vec{F}_3) = -F_{3y} \cdot b = -F_3 \sin \beta \cdot b,$$

$$M_z(\vec{F}_3) = 0 \quad (\text{линия действия силы } \vec{F}_3 \text{ пересекает ось } z).$$

Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси.

Пусть на тело действует приложенная в точке A сила \vec{F} (рис. 42). Проведем какую-нибудь ось z и возьмем на ней произвольную точку O . Момент силы \vec{F} относительно центра O будет изображаться вектором \vec{M}_0 перпендикулярным плоскости OAB , причем по модулю $M_0 = Fh = 2\text{пл.}\Delta OAB$.

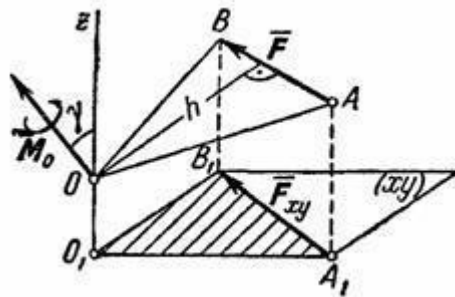


Рис.42

Проведем теперь через любую точку O_1 на оси z плоскость x_1y_1 , перпендикулярную к оси; проектируя силу \vec{F} на эту плоскость, найдем $m_z(\vec{F}) = m_{O_1}(\vec{F}_{xy}) = 2\text{пл.}\Delta O_1A_1B_1$.

Но треугольник $O_1A_1B_1$ представляет собою проекцию треугольника OAB на плоскость x_1y_1 . Угол между плоскостями этих треугольников равен углу между перпендикулярами к плоскостям, т. е. равен γ . Тогда, по известной геометрической формуле, $\Delta O_1A_1B_1 = \text{пл.}\Delta OAB \cos \gamma$.

Умножая обе части этого равенства на 2 и замечая, что удвоенные площади треугольников $O_1A_1B_1$ и OAB равны соответственно $m_z(\vec{F})$ и M_0 , найдем окончательно: $m_z(\vec{F}) = M_0 \cos \gamma$.

Так как произведение $M_0 \cos \gamma$ дает проекцию вектора $\vec{M}_0 = m_0(\vec{F})$ на ось z , то равенство можно еще представить в виде

$$m_z(\vec{F}) = M_z \quad \text{или} \quad m_z(\vec{F}) = \left[m_0(\vec{F}) \right]_z.$$

В результате мы доказали, что между моментом силы относительно оси и ее моментом относительно какого-нибудь центра, лежащего на этой оси, существует следующая зависимость: момент силы \vec{F} относительно оси равен проекции на эту ось вектора, изображающего момент данной силы относительно любого центра, лежащего на оси.

Приведение пространственной системы сил к данному центру.

Полученные выше результаты позволяют решить задачу о приведении любой системы сил к данному центру. Эта задача, решается с помощью теоремы о параллельном переносе силы. Для переноса действующей на абсолютно твердое тело силы \vec{F} из точки A (рис. 43, а) в точку O прикладываем в точке O силы $\vec{F}' = \vec{F}$ и $\vec{F}'' = -\vec{F}$. Тогда сила $\vec{F}' = \vec{F}$ окажется приложенной в точке O и к ней будет присоединена пара (\vec{F}', \vec{F}'') с моментом \vec{m} , что можно показать еще так, как на рис. 43, б. При этом $\vec{m} = \vec{m}_0(\vec{F})$.

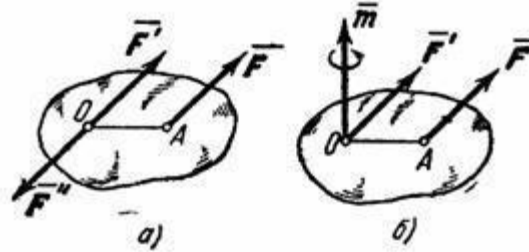


Рис.43

Рассмотрим теперь твердое тело, на которое действует какая угодно система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 44, а). Выберем произвольную точку O за центр приведения и перенесем все силы системы в этот центр, присоединяя при этом соответствующие пары. Тогда на тело будет действовать система сил

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n.$$

приложенных в центре O , и система пар, моменты которых будут равны

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_0(\vec{F}_1), \vec{m}_2 = \vec{m}_0(\vec{F}_2), \dots, \vec{m}_n = \vec{m}_0(\vec{F}_n),$$

Силы, приложенные в точке O , заменяются одной силой \vec{R} , приложенной в той же точке.

При этом $\vec{R} = \sum \vec{F}'_k$ или,

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k.$$

Чтобы сложить все полученные пары, надо геометрически сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой $\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_k$ или, $\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k)$.

Как и в случае плоской системы, величина \vec{R} , равная геометрической сумме всех сил, называется *главным вектором системы*; величина \vec{M}_0 , равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O , называется *главным моментом системы* относительно этого центра.

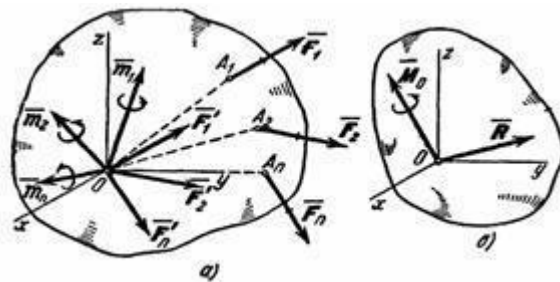


Рис.44

Таким образом мы доказали следующую теорему, любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой \vec{R} , равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O , и одной парой с моментом \vec{M}_0 , равным главному моменту системы относительно центра O (рис. 36, б).

Векторы \vec{R} и \vec{M}_0 обычно определяют аналитически, т.е. по их проекциям на оси координат.

Выражения для R_x, R_y, R_z нам известны. Проекции вектора \vec{M}_0 на оси координат будем обозначать M_x, M_y, M_z . По теореме о проекциях суммы векторов на ось будем $M_x = \sum \left| m_0(\vec{F}_k) \right|_x$ или, $M_x = \sum m_x(\vec{F}_k)$. Аналогично находятся величины M_y и M_z .

Окончательно для определения проекций главного вектора \vec{R} и главного момента \vec{M}_0 получаем формулы:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}, & R_y &= \sum F_{ky}, & R_z &= \sum F_{kz}. \\ M_x &= \sum m_x(\vec{F}_k), & M_y &= \sum m_y(\vec{F}_k), & M_z &= \sum m_z(\vec{F}_k). \end{aligned}$$

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

Произвольную пространственную систему сил, как и плоскую, можно привести к какому-нибудь центру O и заменить одной результирующей силой \vec{R} и парой с моментом \vec{M}_0 . Рассуждая так, что для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно было $R = 0$ и $M_0 = 0$. Но векторы \vec{R} и \vec{M}_0 могут обратиться в нуль только тогда, когда равны нулю все их проекции на оси координат, т.е. когда $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$ или, когда действующие силы удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & \sum F_{ky} &= 0, & \sum F_{kz} &= 0; \\ \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0, & \sum m_y(\vec{F}_k) &= 0, & \sum m_z(\vec{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

Задачи на равновесие тела под действием пространственной системы сил.

Принцип решения задач этого раздела остается тем же, что и для плоской системы сил. Установив, равновесие, какого тела будет рассматриваться, заменяют наложенные на тело связи их реакциями и составляют условия равновесия этого тела, рассматривая его как свободное. Из полученных уравнений определяются искомые величины.

Для получения более простых систем уравнений рекомендуется оси проводить так, чтобы они пересекали больше неизвестных сил или были к ним перпендикулярны (если это только излишне не усложняет вычисления проекций и моментов других сил).

Новым элементом в составлении уравнений является вычисление моментов сил относительно осей координат.

В случаях, когда из общего чертежа трудно усмотреть, чему равен момент данной силы относительно какой-нибудь оси, рекомендуется изобразить на вспомогательном чертеже проекцию рассматриваемого тела (вместе с силой) на плоскость, перпендикулярную к этой оси.

В тех случаях, когда при вычислении момента возникают затруднения в определении

проекция силы на соответствующую плоскость или плеча этой проекции, рекомендуется разложить силу на две взаимно перпендикулярные составляющие (из которых одна параллельна какой-нибудь координатной оси), а затем воспользоваться теоремой Вариньона.

Пример 5. Рама AB (рис.45) удерживается в равновесии шарниром A и стержнем BC . На краю рамы находится груз весом P . Определим реакции шарнира и усилие в стержне.

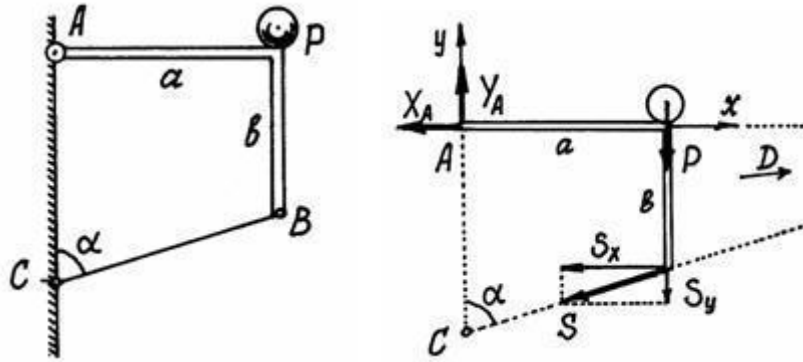


Рис.45

Рассматриваем равновесие рамы вместе с грузом.

Строим расчётную схему, изобразив раму свободным телом и показав все силы, действующие на неё: реакции связей и вес груза P . Эти силы образуют систему сил, произвольно расположенных на плоскости.

Желательно составить такие уравнения, чтобы в каждом было по одной неизвестной силе.

Рекомендуется составлять уравнения моментов относительно трёх точек, точек пересечения линий действия неизвестных сил.

В нашей задаче это точка A , где приложены неизвестные \vec{X}_A и \vec{Y}_A ; точка C , где пересекаются линии действия неизвестных сил \vec{Y}_A и \vec{S} ; точка D – точка пересечения линий действия сил \vec{X}_A и \vec{S} . Составим уравнение проекций сил на ось y (на ось x проектировать нельзя, т.к. она перпендикулярна прямой AC).

И, прежде чем составлять уравнения, сделаем еще одно полезное замечание. Если на расчётной схеме имеется сила, расположенная так, что плечо её находится непросто, то при определении момента рекомендуется предварительно разложить вектор этой силы на две, более удобно направленные. В данной задаче разложим силу \vec{S} на две: \vec{S}_x и \vec{S}_y (рис.37) такие, что модули их $S_x = S \sin \alpha$, $S_y = S \cos \alpha$.

Составляем уравнения: $\sum Y_i = 0$; $Y_A - P - S \cos \alpha = 0$;

$\sum M_{A_i} = 0$; $-Pa - S_y a + S_x b = 0$;

$\sum M_{C_i} = 0$; $X_A \cdot AC - Pa = 0$.

Из второго уравнения находим $S = -P \frac{a}{a \cos \alpha + b \sin \alpha}$. Из третьего $X_A = P \frac{a}{AC} = P \frac{a}{b + a \operatorname{ctg} \alpha}$. $Y_A = P + S \cos \alpha = P \left(1 - \frac{a}{a \cos \alpha + b \sin \alpha} \right)$.

Так как получилось $S < 0$, то стержень BC будет сжат.

Пример 6. Прямоугольная полка весом P удерживается в горизонтальном положении двумя стержнями CE и CD , прикрепленными к стене в точке E . Стержни одинаковой длины, $AB = 2a$, $EO = a$. Определим усилия в стержнях и реакции петель A и B .

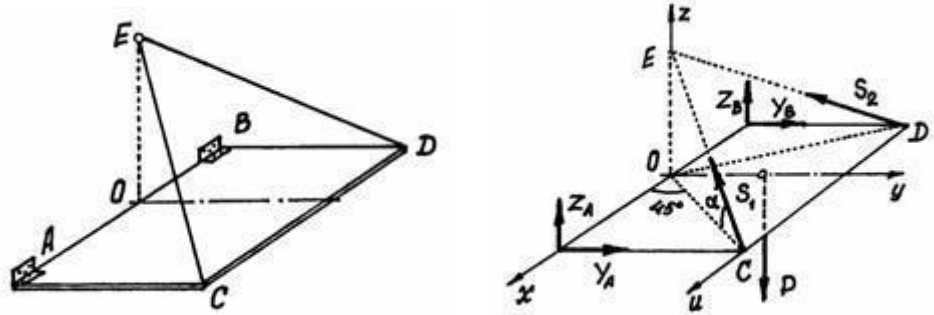


Рис.46

Рассматриваем равновесие плиты. Строим расчётную схему (рис.46). Реакции петель принято показывать двумя силами перпендикулярными оси петли: \vec{Y}_A, \vec{Z}_A и \vec{Y}_B, \vec{Z}_B .

Силы образуют систему сил, произвольно расположенных в пространстве. Можем составить 6 уравнений. Незвестных - тоже шесть.

Какие уравнения составлять – надо подумать. Желательно такие, чтобы они были проще и чтобы в них было поменьше неизвестных.

Составим такие уравнения:

$$(1) \sum X_i = 0; \quad -S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ + S_2 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$(2) \sum M_{xi} = 0; \quad -Z_A \cdot a - Z_B \cdot a + P \cdot 0,5a = 0;$$

$$(3) \sum M_{yi} = 0; \quad Y_A \cdot a - Y_B \cdot a = 0;$$

$$(4) \sum M_{zi} = 0; \quad S_1 \sin \alpha \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a - P \cdot 0,5a = 0;$$

$$(5) \sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B - S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ - S_2 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$(6) \sum M_{yi} = 0; \quad -Z_A \cdot a + Z_B \cdot a - S_1 \sin \alpha \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a = 0.$$

Из уравнения (1) получим: $S_1 = S_2$. Тогда из (4): $S_1 = S_2 = \frac{1}{4} \frac{P}{\sin \alpha}$.

Из (3): $Y_A = Y_B$ и, по (5), $2Y_A = 2S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ$. Значит $Y_A = Y_B = \frac{1}{4} P \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos 45^\circ$. Из

уравнения (6), т.к. $S_1 = S_2$, следует $Z_A = Z_B$. Тогда по (2) $Z_A = Z_B = \frac{1}{4} P$.

Из треугольника OEC , где $EC = \sqrt{OC^2 + OE^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$, следует $\sin \alpha = \frac{EO}{EC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \alpha = \frac{OC}{EC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$. Поэтому $S_1 = S_2 = 0,25\sqrt{3}P$, $Y_A = Y_B = 0,25P$, $Z_A = Z_B = 0,25P$.

Для проверки решения можно составить ещё одно уравнение и посмотреть, удовлетворяется ли оно при найденных значениях реакций:

$$\sum Z_i = Z_A + Z_B - P + S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \alpha = 0,25P + 0,25P - P + 0,25\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0,25\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Задача решена правильно.

Лекция 4. Центр тяжести.

Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил.

Пусть даны две параллельные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , направленные в одну сторону и приложенные к точкам A_1 и A_2 (рис.34).

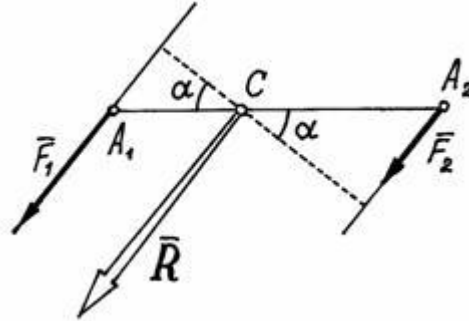


Рис.34

Конечно, величина их равнодействующей $R = F_1 + F_2$. Вектор её параллелен силам и направлен в ту же сторону. С помощью теоремы Вариньона найдём точку приложения равнодействующей – точку C . По этой теореме $M_C(\vec{R}) = \sum M_C(\vec{F}_i)$

$$\text{Значит } 0 = F_1 \cdot A_1C \cdot \cos \alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot \cos \alpha.$$

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Отсюда $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$. То есть точка приложения равнодействующей делит расстояние между точками A_1 и A_2 на части обратно пропорциональные силам.

Если параллельные силы направлены в противоположные стороны (рис.35), то аналогично можно доказать, что равнодействующая по величине будет равна разности сил: $R = F_2 - F_1$ (если $F_2 > F_1$), параллельна им, направлена в сторону большей силы и расположена за большей силой – в точке C . А расстояния от точки C до точек приложения сил

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}.$$

обратно пропорциональны силам:

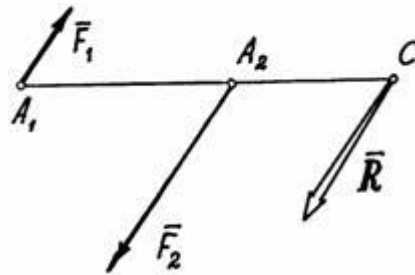


Рис.35

Следует заметить, что если точка приложения равнодействующей расположена на одной прямой с точками A_1 и A_2 , точками приложения сил, то, при повороте этих сил в одну сторону на одинаковый угол, равнодействующая также повернётся вокруг точки приложения C в том же направлении, и останется параллельной им.

Такая точка приложения равнодействующей называется *центром параллельных сил*.

Конечно, если хотя бы одну из сил перенести по своей линии действия в другую точку, то и точка приложения равнодействующей, центр параллельных сил, тоже переместится

по линии действия.

Следовательно, положение центра параллельных сил зависит от координат точек приложения сил.

Центром нескольких параллельных сил, найденный последовательным сложением каждой двух сил, будем называть точку C , радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_c = \frac{\sum F_i \cdot \vec{r}_i}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i \cdot \vec{r}_i}{R}, \quad (1)$$

где \vec{r}_i - радиусы-векторы точек приложения сил; $R = \sum F_i$ - величина равнодействующей параллельных сил, равная алгебраической сумме этих сил (знак силы определяется направлением, которое заранее выбирается и считается положительным).

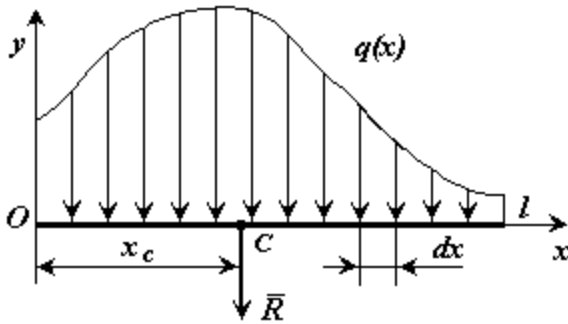
Используя (1), нетрудно найти координаты центра параллельных сил. Если радиус-векторы откладывать из начала координат, то проекции радиусов-векторов точек на оси будут равны их координатам. Поэтому, проектируя векторное равенство (1) на оси, получим

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{R}; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{R},$$

где x_i, y_i, z_i - координаты точек приложения сил.

Параллельные силы, распределенные по отрезку прямой.

а) **общий случай**



$q(x)$ - интенсивность распределенной силы [Н/м],

$dR = q(x) \cdot dx$ - элементарная сила.

l - длина отрезка

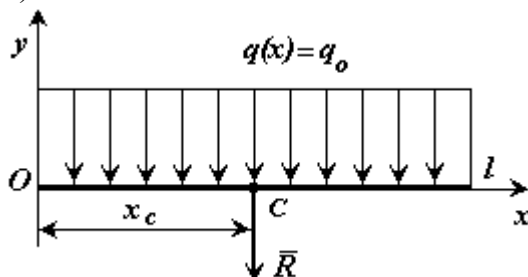
Распределенная по отрезку прямой сила интенсивности $q(x)$ эквивалентна сосредото-

ченной силе $R = \int_0^l q(x) dx$.

Сосредоточенная сила прикладывается в точке C (центре параллельных сил) с координатой

$$x_c = \frac{\int_0^l x q(x) dx}{R}$$

б) **постоянная интенсивность**

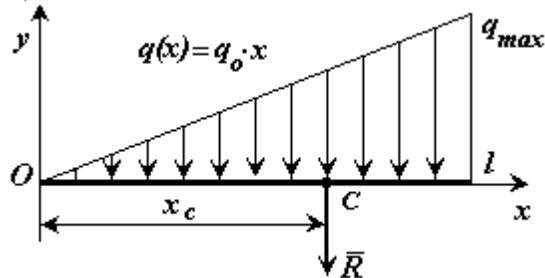


$$R = \int_0^l q_0 dx = q_0 \cdot l$$

$$\int_0^l x \cdot q_0 dx = q_0 \cdot \frac{l^2}{2}$$

$$x_C = \frac{l}{2}$$

в) интенсивность, меняющаяся по линейному закону



$$R = \int_0^l q_0 \cdot x dx = q_0 \cdot \frac{l^2}{2}$$

$$R = \int_0^l q_0 \cdot x dx = q_0 \cdot \frac{l^2}{2}$$

$$x_C = \frac{2 \cdot l}{3}$$

Центр тяжести тел.

На все точки тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действуют силы – силы тяжести этих точек или их вес \vec{P}_i . Вообще эти силы будут сходящимися – линии действия их пересекаются в центре Земли. Но, если пренебречь размерами тела в сравнении с размерами Земли, то можно считать их параллельными.

Центр этих параллельных сил, сил тяжести точек, называется *центром тяжести* тела.

Значит находить центр тяжести тел можно как центр параллельных сил. Например, координаты его

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}; \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}; \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P}; \quad (2)$$

где P_i – вес каждой точки тела, а $P = \sum P_i$ – вес всего тела.

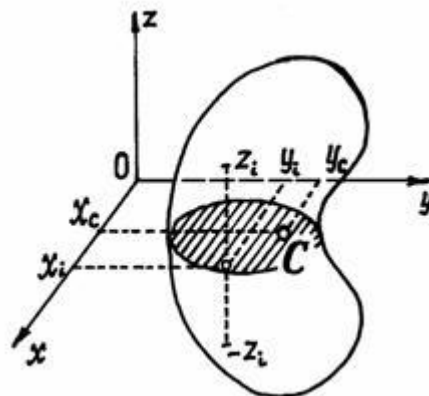


Рис.36

При определении центра тяжести полезны несколько теорем.

1) Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости.

Если оси x и y расположить в этой плоскости симметрии (рис.36), то для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $x_i, y_i, -z_i$. И координата z_c по (2), будет равна нулю, т.к. в сумме $\sum P_i \cdot z_i$ все члены имеющие противоположные знаки, попарно уничтожаются. Значит центр тяжести расположен в плоскости симметрии.

2) Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Действительно, в этом случае, если ось z провести по оси симметрии, для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $-x_i, -y_i, z_i$ и координаты x_c и y_c , вычисленные по формулам (2), окажутся равными нулю.

Аналогично доказывается и третья теорема.

3) Если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела находится в этой точке.

И ещё несколько замечаний.

Первое. Если тело можно разделить на части, у которых известны вес и положение центра тяжести, то незачем рассматривать каждую точку, а в формулах (2) P_i – определять как вес соответствующей части и x_i, y_i, z_i – как координаты её центра тяжести.

Второе. Если тело однородное, то вес отдельной части его $P_i = V_i \cdot \gamma$, где γ – удельный вес материала, из которого сделано тело, а V_i – объём этой части тела. И формулы (1) примут более удобный вид. Например,

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P} = \frac{\sum V_i \cdot \gamma \cdot X_i}{V \cdot \gamma} = \frac{\sum V_i x_i}{V}.$$

$$\text{И аналогично, } y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V}, \quad z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V}, \quad \text{где } V = \sum V_i \text{ - объём всего тела.}$$

Третье замечание. Если тело состоит из однородных пластин одинаковой, малой толщины, то объём каждой пластины $V_i = S_i \cdot d$, где S_i – площадь пластины, d – толщина. И координаты центра тяжести будут определяться только с помощью площадей:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}; \quad z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S},$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести отдельных пластин; $S = \sum S_i$ – общая площадь тела.

Четвёртое замечание. Если тело состоит из стержней, прямых или криволинейных, однородных и постоянного сечения, то вес их $P_i = l_i \cdot \rho$, где l_i – длина, ρ – вес единицы длины (погонного метра), а координаты центра тяжести будут определяться с помощью длин отдельных участков:

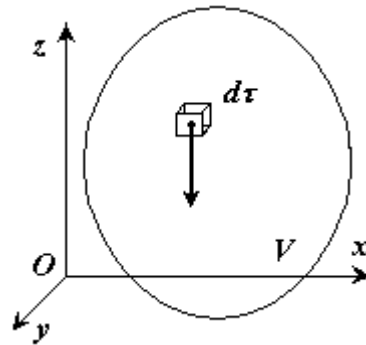
$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L},$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести i -го участка; $L = \sum l_i$.

Отметим, что согласно определению центр тяжести – это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

Координаты центров тяжести неоднородных тел.

Координаты центра тяжести **неоднородного твердого тела** в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

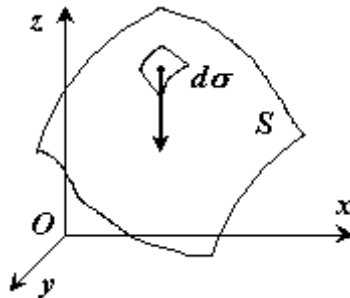


$$x_C = \frac{\int_V x \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau} \quad y_C = \frac{\int_V y \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau} \quad z_C = \frac{\int_V z \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau}$$

где $\gamma_T(x, y, z)$ - вес единицы объема тела (удельный вес)

$$\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau \quad - \text{ вес всего тела.}$$

Если твердое тело представляет собой **неоднородную поверхность**, то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

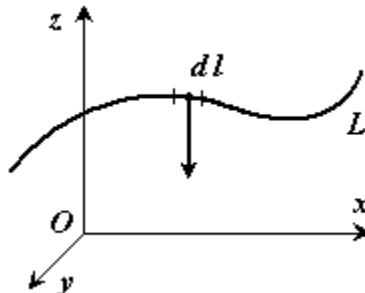


$$x_C = \frac{\int_S x \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma} \quad y_C = \frac{\int_S y \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma} \quad z_C = \frac{\int_S z \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma}$$

где $\gamma_S(x, y, z)$ - вес единицы площади тела,

$$\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma \quad - \text{ вес всего тела.}$$

Если твердое тело представляет собой **неоднородную линию**, то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:



$$x_C = \frac{\int_L x \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl} \quad y_C = \frac{\int_L y \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl} \quad z_C = \frac{\int_L z \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl}$$

где $\gamma_L(x, y, z)$ - вес единицы длины тела,

$\int_L \gamma_L(x, y, z) dl$ - вес всего тела.

Координаты центров тяжести однородных тел.

Для однородного тела вес P_k любой его части пропорционален объему V_k этой части: $P_k = \gamma V_k$, а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела $P = \gamma V$, где γ - вес единицы объема.

Подставив эти значения P и P_k в предыдущие формулы, мы заметим, что в числителе γ как общий множитель выносится за скобку и сокращается с γ в знаменателе. В результате получим:

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V}, \quad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V}, \quad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}.$$

Как видно, центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит. По этой причине точку C , координаты которой определяются формулами, называют центром тяжести объема V .

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S},$$

где S - площадь всей пластины, а S_k - площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются формулами называют центром тяжести площади S .

Точно так же получаются формулы для координат центра тяжести линии:

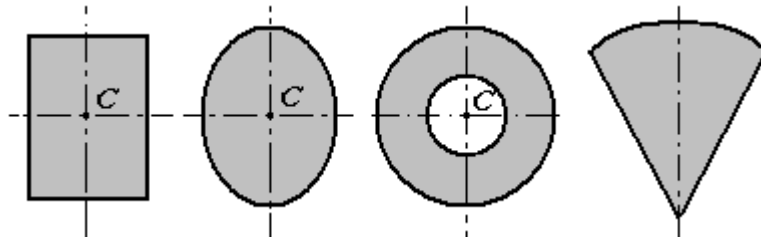
$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L},$$

где L — длина всей линии, l — длины ее частей.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

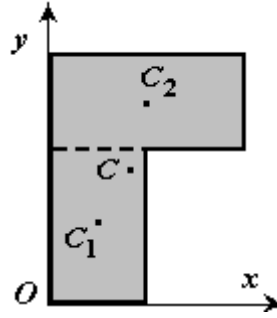
Способы определения координат центра тяжести.

Исходя из полученных выше общих формул, можно указать конкретные способы определения координат центров тяжести тел.



1. **Симметрия.** Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно в плоскости симметрии, оси симметрии или в центре симметрии.

2. **Разбиение.** Тело разбивается на конечное число частей, для каждой из которых положение центра тяжести и площадь известны.



$$C_1(x_1, y_1), S_1$$

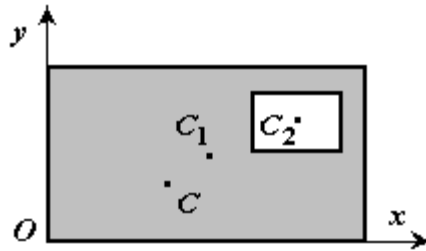
$$C_2(x_2, y_2), S_2$$

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$

$$S = S_1 + S_2.$$

3. **Дополнение.** Частный случай способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.



$$C_1(x_1, y_1), S_1$$

$$C_2(x_2, y_2), S_2$$

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}$$

$$S = S_1 - S_2.$$

Центры тяжести некоторых однородных тел.

1) **Центр тяжести дуги окружности.** Рассмотрим дугу AB радиуса R с центральным углом $AOB = 2\alpha$. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси Ox (рис. 37).

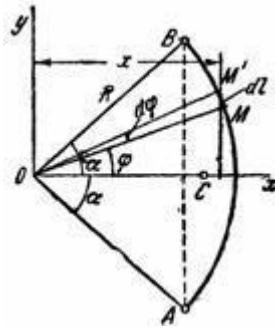


Рис.37

$$x_C = \frac{1}{L} \int x dl$$

Найдем координату x_C по формуле . Для этого выделим на дуге AB элемент MM' длиной $dl = R d\varphi$, положение которого определяется углом φ . Координата x элемента MM' будет $x = R \cos \varphi$. Подставляя эти значения x и dl и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим:

$$x_C = \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{R^2}{L} \sin \alpha,$$

где L - длина дуги AB , равная $R \cdot 2\alpha$. Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O , равном

$$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

где угол α измеряется в радианах.

2) **Центр тяжести площади треугольника.** Разобьем площадь треугольника ABD (рис. 38) прямыми, параллельными AD , на узкие полоски; центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане BE треугольника.

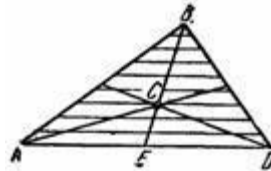


Рис.38

Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается для двух других медиан. Отсюда заключаем, что центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

$$CE = \frac{1}{3} BE.$$

При этом, как известно,

3) **Центр тяжести площади кругового сектора.** Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса R с центральным углом 2α (рис. 39). Разобьем мысленно площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O , на n секторов. В пределе, при неограниченном увеличении числа n , эти секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге DE радиуса $\frac{2R}{3}$. Следовательно, центр тяжести сектора OAB будет совпадать с центром тяжести дуги DE . Окончательно получим, что центр тяжести площади кругового сектора лежит на его центральной оси симметрии на расстоянии

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

от начального центра O , равном

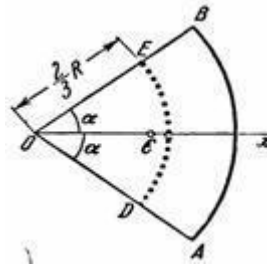


Рис.39

Пример 1. Определим центр тяжести однородного тела, изображённого на рис. 40.

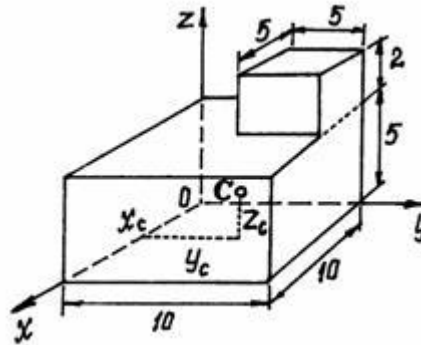


Рис.40

Тело однородное, состоящее из двух частей, имеющих симметричную форму. Координаты центров тяжести их:

$$x_1 = 5 \text{ см}, y_1 = 5 \text{ см}, z_1 = 2,5 \text{ см},$$

$$x_2 = 2,5 \text{ см}, y_2 = 7,5 \text{ см}, z_2 = 6 \text{ см}.$$

Объёмы их: $V_1 = 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500 \text{ см}^3$; $V_2 = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50 \text{ см}^3$.

Поэтому координаты центра тяжести тела

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{500 + 50} = 4,77 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V} = \frac{500 \cdot 5 + 50 \cdot 7,5}{550} = 5,23 \text{ см},$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{550} = 2,82 \text{ см}.$$

Пример 2. Найдем центр тяжести пластины, согнутой под прямым углом. Размеры – на чертеже (рис.41).

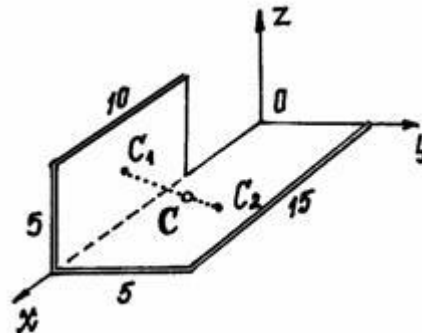


Рис.41

Координаты центров тяжести: $x_1 = 20$ см, $y_1 = 0$, $z_1 = 2,5$ см,
 $x_2 = 7,5$ см, $y_2 = 2,5$ см, $z_2 = 0$.

Площади: $S_1 = 5 \cdot 10 = 50$ см², $S_2 = 5 \cdot 15 = 75$ см².

Поэтому:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{50 \cdot 20 + 75 \cdot 7,5}{50 + 75} = 12,5 \text{ см,}$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S} = \frac{50 \cdot 0 + 75 \cdot 2,5}{125} = 1,5 \text{ см,}$$

$$z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S} = \frac{50 \cdot 2,5}{125} = 1,0 \text{ см.}$$

Пример 3. У квадратного листа 20×20 см вырезано квадратное отверстие 5×5 см (рис.42). Найдём центр тяжести листа.

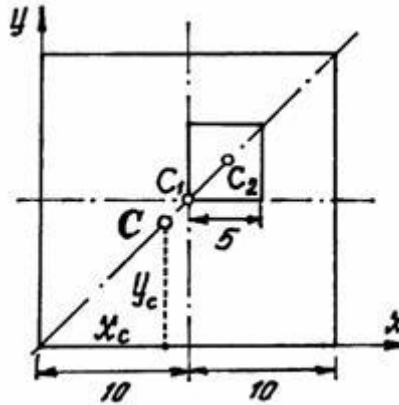


Рис.42

В этой задаче удобнее разделить тело на две части: большой квадрат и квадратное отверстие. Только площадь отверстия надо считать отрицательной. Тогда координаты центра тяжести листа с отверстием:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S_1 - S_2} = \frac{20 \cdot 20 \cdot 10 - 5 \cdot 5 \cdot 12,5}{400 - 25} = 9,83 \text{ см,}$$

координата $y_c = x_c = 9,83$ см, так как тело имеет ось симметрии (диагональ).

Пример 4. Проволочная скобка (рис.43) состоит из трёх участков одинаковой длины l .

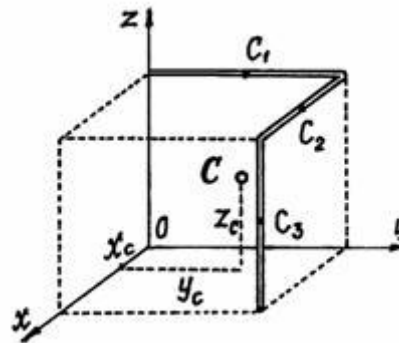


Рис.43

Координаты центров тяжести участков: $x_1 = 0$, $y_1 = 0,5l$, $z_1 = l$; $x_2 = 0,5l$, $y_2 = l$, $z_2 = l$; $x_3 = l$, $y_3 = l$, $z_3 = 0,5l$. Поэтому ко-

ординаты центра тяжести всей скобки:

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L} = \frac{l \cdot 0 + l \cdot 0,5l + l \cdot l}{3l} = 0,5l,$$

$$y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L} = \frac{l \cdot 0,5l + l \cdot l + l \cdot l}{3l} = 0,83l,$$

$$z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L} = \frac{l \cdot l + l \cdot l + l \cdot 0,5l}{3l} = 0,83l.$$

КИНЕМАТИКА

Лекция 1. Кинематика точки и твердого тела.

Кинематика точки. Введение в кинематику.

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Под движением мы понимаем в механике изменение, с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета.

Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым они связаны).

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике мы рассматриваем, как трехмерное евклидово пространство.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т. е. как функции времени t .

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) - значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Способы задания движения точки

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов:

1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

1. Векторный способ задания движения точки.

Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxuz$. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав ее радиус-вектор \vec{r} , проведенный из начала координат O в точку M (рис. 1).

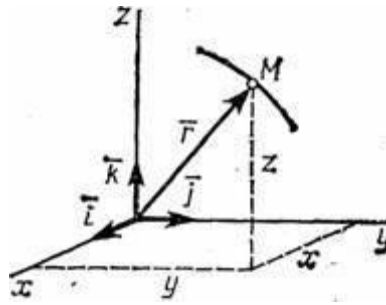


Рис.1

При движении точки M вектор \vec{r} будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, \vec{r} является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Равенство определяет закон движения точки в векторной форме, так как оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий вектор \vec{r} и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора \vec{r} , т.е. *годограф* этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

2. Координатный способ задания движения точки.

Положение точки можно непосредственно определять ее декартовыми координатами x, y, z (рис.1), которые при движении точки будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т.е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т.е. знать зависимости

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

Уравнения представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

Чтобы получить уравнение траектории надо из уравнений движения исключить параметр t .

Нетрудно установить зависимость между векторным и координатным способами задания движения.

Разложим вектор \vec{r} на составляющие по осям координат:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k},$$

где r_x, r_y, r_z - проекции вектора на оси; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы направленные по осям, орты осей.

Так как начало \vec{r} вектора находится в начале координат, то проекции вектора будут равны координатам точки M . Поэтому

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Пример 1. Движение точки задано уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \sin 2t, \\ y &= 3 \cos 2t. \end{aligned} \right\}$$

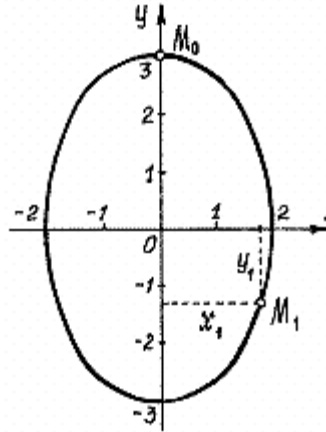


Рис.2

Чтобы исключить время, параметр t , найдём из первого уравнения $\sin 2t = \frac{x}{2}$, из второго $\cos 2t = \frac{y}{3}$. Затем возведём в квадрат и сложим. Так как $\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$, получим $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Это уравнение эллипса с полуосями 2 см и 3 см (рис.2).

Начальное положение точки M_0 (при $t=0$) определяется координатами $x_0 = 0, y_0 = 3$ см.

Через 1 сек. точка будет в положении M_1 с координатами $x_1 = 2 \sin 2 = 2 \cdot 0,91 = 1,82$ см, $y_1 = 3 \cos 2 = 3 \cdot (-0,42) = -1,25$ см.

Примечание.

Движение точки может быть задано с помощью и других координат. Например, цилиндрических или сферических. Среди них будут не только линейные размеры, но и углы. При необходимости, с заданием движения цилиндрическими и сферическими координатами можно познакомиться по учебникам.

3. Естественный способ задания движения точки.

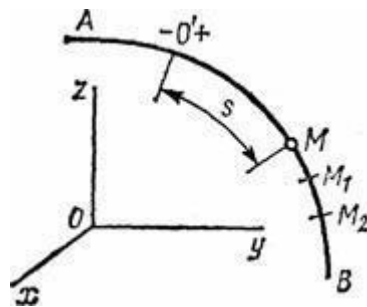


Рис.3

Естественным способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть кривая AB является траекторией точки M при ее движении относительно системы отсчета $Oxyz$ (рис.3). Выберем на этой траектории какую-нибудь неподвижную точку O' , которую примем за начало отсчета, и установим на траектории положительное и отрицательное направления отсчета (как на координатной оси).

Тогда положение точки M на траектории будет однозначно определяться криволинейной ко-

ординатой s , которая равна расстоянию от точки O' до точки M , измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точка M перемещается в положения M_1, M_2, \dots . следовательно, расстояние s будет с течением времени изменяться.

Чтобы знать положение точки M на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость

$$s = f(t)$$

Уравнение выражает закон движения точки M вдоль траектории.

Пример 2. Точка движется по прямой линии, по закону $s = 2t + 3$ (см) (рис. 4).

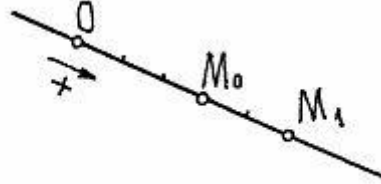


Рис.4

В начале движения, при $t = 0$ $s = OM_0 = s_0 = 3$ см. Положение точки M_0 называется *начальным положением*. При $t = 1$ с, $s = OM_1 = 5$ см.

Конечно, за 1 сек. точка прошла расстояние $M_0M_1 = 2$ см. Так что s – это не путь пройденный точкой, а расстояние от начала отсчёта до точки.

Вектор скорости точки

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки.

Известно, что при движении точки по прямой линии с постоянной скоростью, равномерно, скорость её определяется делением пройденного расстояния s на время: $v = \frac{s}{t}$. При неравномерном движении эта формула не годится. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени. Пусть движущаяся точка находится

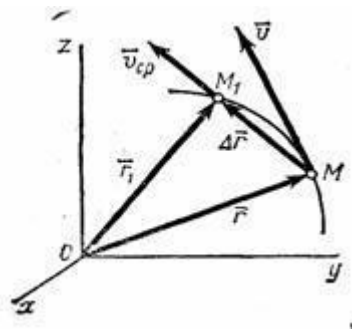


Рис. 5

в момент времени t в положении M , определяемом радиусом-вектором \vec{r} , а в момент t_1 приходит в положение M_1 определяемое вектором \vec{r}_1 (рис.5). Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором \vec{MM}_1 который будем называть вектором перемещения точки. Из треугольника OMM_1 видно, что $\vec{r} + \vec{MM}_1 = \vec{r}_1$; следовательно, $\vec{MM}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}$.

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени

дает векторную величину, называемую средней по модулю и направлению скоростью точки за промежутки времени Δt :

$$\vec{v}_{cp} = \vec{MM}_1 / \Delta t = \Delta \vec{r} / \Delta t$$

Скоростью точки в данный момент времени t называется векторная величина v , к которой стремится средняя скорость v_{cp} при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{v}_{cp}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Итак, вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени.

Так как предельным направлением секущей MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения

Вектор скорости точки $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, учитывая, что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, найдем:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Таким образом, проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т.е. углы α , β , γ , которые вектор v образует с координатными осями) по формулам

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$\cos \alpha = v_x / v, \quad \cos \beta = v_y / v, \quad \cos \gamma = v_z / v.$$

Итак, численная величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) s точки по времени.

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, которая нам наперед известна.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Величину скорости можно определить как предел (Δr – длина хорды MM_1):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – длина дуги MM_1 . Первый предел равен единице, второй предел – производная $\frac{ds}{dt}$.

Следовательно, скорость точки есть первая производная по времени от закона движения:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Направлен вектор скорости, как было установлено ранее, по касательной к траектории. Если величина скорости в данный момент будет больше нуля, то вектор скорости направляется в положительном направлении

Вектор ускорения точки

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость \vec{v} , а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость \vec{v}_1 (рис. 6).

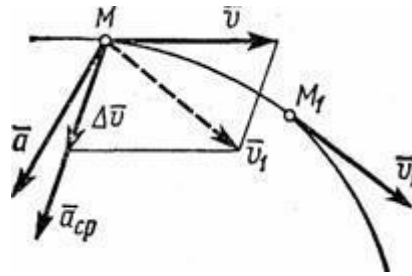


Рис.6

Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получает приращение $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$. Для построения вектора $\Delta \vec{v}$ отложим от точки M вектор, равный \vec{v}_1 , и построим параллелограмм, в котором диагональю будет \vec{v}_1 , а одной из сторон \vec{v} . Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta \vec{v}$. Заметим, что вектор $\Delta \vec{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta \vec{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$$\vec{a}_{cp} = \Delta \vec{v} / \Delta t$$

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta \vec{v}$, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени t называется векторная величина \vec{a} , к которой стремится среднее ускорение \vec{a}_{cp} при стремлении промежутка времени Δt к нулю: Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Найдем, как располагается вектор \vec{a} по отношению к траектории точки. При прямолинейном движении вектор \vec{a} направлен вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией точки является плоская кривая, то вектор ускорения \vec{a} , так же как и вектор \vec{a}_{cp} , лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. Если траектория не является плоской кривой, то вектор \vec{a}_{cp} направлен в сторону вогнутости траектории и лежит в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке M и прямую, параллельную касательной в соседней точке M_1 (рис. 4). В пределе, когда точка M стремится к M , эта плоскость занимает положение так называемой соприкасающейся плоскости, т.е. плоскости, в которой происходит бесконечно малый поворот касательной к траектории при элементарном перемещении движущейся точки. Следовательно, в общем случае вектор ускорения \vec{a} лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

Определение ускорения при координатном способе задания движения

Вектор ускорения точки $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ в проекции на оси получаем:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

или

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z},$$

т.е. проекция ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos \alpha_1 = a_x/a, \quad \cos \beta_1 = a_y/a, \quad \cos \gamma_1 = a_z/a,$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

Пример 3. Движение точки задано уравнениями $x = 2t, y = 3 - 4t^2$.

Из первого уравнения $t = \frac{x}{2}$. Подставив во второе, получим уравнение траектории: $y = 3 - x^2$.

Это уравнение параболы. В начале движения, при $t = 0$, точка находилась на самом верху, в положении $M_0(x_0 = 0, y_0 = 3 \text{ см})$.

А, например, при $t = 0,5$ с она будет в положении M с координатами $x_1 = 1 \text{ см}, y_1 = 2 \text{ см}$.

Проекции скорости на оси $v_x = \dot{x} = 2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, v_y = \dot{y} = -8t \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

При $t = 0,5 \text{ с}, v_x = 2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, v_y = -4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

И модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

Составляющие скорости по осям и вектор её показаны в масштабе на рис. 7.

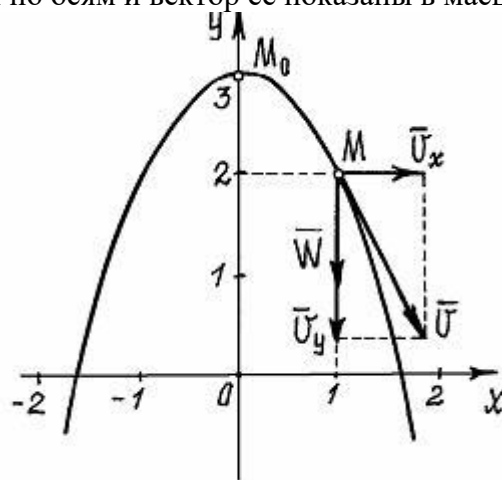


Рис.7

Проекции ускорения $a_x = \ddot{x} = 0, a_y = \ddot{y} = -8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. Так как проекция вектора ускорения на ось x равна нулю, а на ось y – отрицательна, то вектор ускорения направлен вертикально вниз, и величина его постоянна, не зависит от времени.

Определение ускорения при естественном способе задания движения. Касательное и нормальное ускорение точки

При естественном способе задания движения вектор \vec{a} определяют по его проекциям на оси $M\tau$ и Mn , имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с ней (рис.8). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника (или скоростными (естественными) осями), направлены следующим образом: ось $M\tau$ – вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния s ; ось Mn – по нормали, лежащей в соприкасающейся плос-

кости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb - перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Нормаль Mn , лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется главной нормалью, а перпендикулярная к ней нормаль Mb - бинормалью.

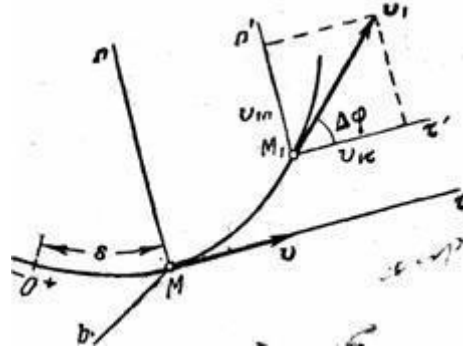


Рис.8

Было показано, что ускорение точки \vec{a} лежит в соприкасающейся плоскости, т.е. в плоскости Mn ; следовательно, проекция вектора \vec{a} на бинормаль равна нулю ($a = 0$).

Вычислим проекции \vec{a} , на две другие оси. Пусть в момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость v , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ приходит в положение M_1 и имеет скорость v_1 .

Тогда по определению

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}$$

Перейдем в этом равенстве от векторов к их проекциям на оси $M\tau$ и Mn , проведенные в точке M (рис.8). Тогда на основании теоремы о проекции суммы (или разности) векторов на ось получим:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}$$

Учитывая, что проекция вектора на параллельные оси одинаковы, проведем через точку M_1 оси $M_1\tau', M_1n'$, параллельные $M\tau, Mn$, и обозначим угол между направлением вектора \vec{v}_1 и касательной $M_1\tau'$ через $\Delta\varphi$. Этот угол между касательными к кривой в точках M и M_1 называется углом смежности.

Напомним, что предел отношения угла смежности $\Delta\varphi$ к длине дуги $MM_1 = \Delta s$ определяет кривизну k кривой в точке M . Кривизна же является величиной, обратной радиусу кривизны ρ в точке M . Таким образом,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}$$

Обращаясь теперь к чертежу (рис.9), находим, что проекции векторов \vec{v} и \vec{v}_1 на оси $M\tau, Mn$, будут равны:

$$\begin{cases} v_\tau = v, v_n = 0 \\ v_{1\tau} = v_1 \cos \Delta\varphi, v_{1n} = v_1 \sin \Delta\varphi \end{cases}$$

где v и v_1 - численные величины скорости точки в моменты t и t_1 . Следовательно,

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta \varphi - v}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta t} \right).$$

Заметим что при $\Delta t \rightarrow 0$ точка M_1 неограниченно приближается к M и одновременно $\Delta \varphi \rightarrow 0, \Delta s \rightarrow 0, v_1 \rightarrow v$.

Тогда, учитывая, что в пределе $\lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} (\cos \Delta \varphi) = 1$, получим для a_{τ} выражение

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Правую часть выражения a_n преобразуем так, чтобы в нее вошли отношения, пределы которых нам известны. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на $\frac{\Delta \varphi \Delta s}{\Delta \varphi \Delta s}$. Тогда будем иметь

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta \varphi \Delta \varphi \Delta s}{\Delta \varphi \Delta s \Delta t} \right) = \frac{v^2}{\rho},$$

так как пределы каждого из стоящих в скобке сомножителей при $\Delta t \rightarrow 0$ равны:

$$\lim v_1 = v, \quad \lim \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = 1, \quad \lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Окончательно получаем:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Итак, мы доказали, что проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от численной величины скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) s по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой; проекция ускорения на бинормаль равна нулю ($a_b = 0$). Эти результаты выражают собою одну из важных теорем кинематики точки.

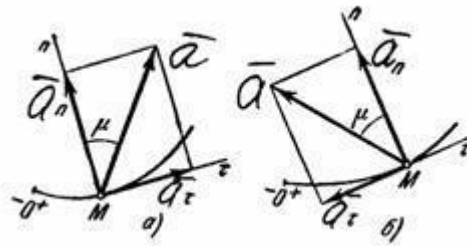


Рис.9

Отложим вдоль касательной $M\tau$ и главной нормали Mn векторы \bar{a}_{τ} и \bar{a}_n , численно равные a_{τ} и a_n (рис. 9). Эти векторы изображают касательную и нормальную составляющие ускорения точки. При этом составляющая \bar{a}_n будет всегда направлена в сторону вогнутости кривой (величина a всегда положительна), а составляющая \bar{a}_{τ} может быть направлена или в положительном, или в отрицательном направлении оси $M\tau$ в зависимости от знака проекции a_{τ} (см. рис.9, а и б).

Вектор ускорения точки \bar{a} изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих \bar{a}_{τ} и \bar{a}_n . Так как эти составляющие взаимно перпендикулярны, то по модулю:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

Некоторые частные случаи движения точки.

Пользуясь полученными результатами, рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

1) Прямолинейное движение. Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho = \infty$. Тогда $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ и все ускорение точки равно одному только касательному ускорению:

$$a = a_r = \frac{dv}{dt}$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что касательное ускорение характеризует изменение скорости по численной величине.

2) Равномерное криволинейное движение. Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором численная величина скорости все время остается постоянной: $v = \text{const}$.

$$\text{Тогда } a_r = \frac{dv}{dt} = 0$$

и все ускорение точки равно одному только нормальному:

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Вектор ускорения \vec{a} направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Найдем закон равномерного криволинейного движения.

$$\text{Из формулы } \frac{ds}{dt} = v \text{ имеем } ds = v dt.$$

Пусть в начальный момент ($t = 0$) точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0 . Тогда, беря от левой и правой части равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt \quad \text{или} \quad s - s_0 = vt,$$

так как $v = \text{const}$. Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения в виде

$$s = s_0 + vt.$$

Если $s_0 = 0$, то s даст путь, пройденный точкой за время t . Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, расчет пропорционального времени, а скорость движения равна отношению пути ко времени

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}.$$

3) Равномерное прямолинейное движение. В этом случае $a_n = a_r = 0$, а значит и $a = 0$. Заметим, что единственным движением, в котором ускорение точки все время равно нулю, является равномерное прямолинейное движение.

4) Равнопеременное криволинейное движение. Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время величиной постоянной: $a_{\tau} = \text{const}$. Найдем закон этого движения, считая, что при $t = 0$: $s = s_0$, а $v = v_0$, где v_0 - начальная скорость точки. Согласно формуле $a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$ имеем $dv = a_{\tau} dt$.

Так как $a_{\tau} = \text{const}$, то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$v = v_0 + a_{\tau} t$$

Формулу представим в виде

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_{\tau} t \quad \text{или} \quad ds = v_0 dt + a_{\tau} t dt$$

Вторично интегрируя, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки в виде

$$s = s_0 + v_0 t + a_{\tau} \frac{t^2}{2}$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется ускоренным, а если убывает - замедленным.

Пример 4. Точка движется по окружности радиуса $R = 3$ см по закону $s = 4t - t^2 - 2$ (см). При $t = 0$ $s_0 = -2$ см. Значит, движение началось из M_0 (рис.10).

При: $t = 2$ с $s_2 = 2$ см; $t = 1$ с $s_1 = 1$ см;

$t = 4$ с $s_4 = 2$ см; $t = 3$ с $s_3 = 1$ см.

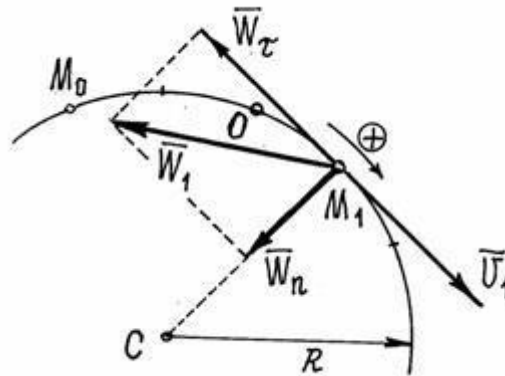


Рис.10

Судя по этим результатам, точка сначала двигалась в положительном направлении, а затем пошла обратно. В крайнем положении скорость точки станет равной нулю.

Так как $v = \frac{ds}{dt} = 4 - 2t$, то положив $v = 0$, найдём время t_* когда точка окажется в этом крайнем положении: $t_* = 2$ с. Значит s_2 определяет это положение точки.

Найдём скорость и ускорение точки при $t = 1$ с. Скорость $v_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2$ см \cdot с $^{-1}$. Направлен вектор скорости в положительном направлении ($v_1 > 0$).

Касательное ускорение $a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = -2$ см \cdot с $^{-2}$. Вектор \vec{a}_{τ} направлен в отрицательном

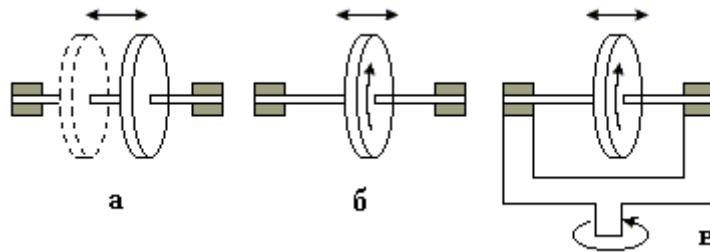
направлении. Нормальное ускорение $a_n = \frac{v_1^2}{\rho} = \frac{2^2}{3} = 1,33 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ (радиус кривизны дуги окружности равен её радиусу $\rho = R$). Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = 2,4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Так как вектор скорости \vec{v}_1 и вектор касательного ускорения \vec{a}_r направлены в противоположные стороны, точка в этот момент движется замедленно.

Лекция 2. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

Степени свободы твердого тела

Числом степеней свободы твердого тела называется число независимых параметров, которые однозначно определяют положение тела в пространстве относительно рассматриваемой системы отсчета. Движение твердого тела во многом зависит от числа его степеней свободы.



Рассмотрим пример. Если диск, не вращаясь, может скользить вдоль неподвижной в данной системе отсчета оси (рис.а), то в данной системе отсчета он, очевидно, обладает только одной степенью свободы - положение диска однозначно определяется, скажем, координатой x его центра, отсчитываемой вдоль оси. Но если диск, кроме того, может еще и вращаться (рис.б), то он приобретает еще одну степень свободы - к координате x добавляется угол поворота φ диска вокруг оси. Если ось с диском зажата в рамке, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси (рис.в), то число степеней свободы становится равным трем - к x и φ добавляется угол поворота рамки ϕ .

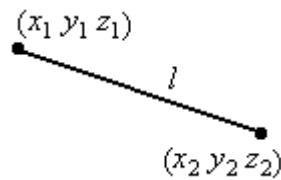
Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы: например декартовы координаты x , y и z . Координаты точки могут определяться также в цилиндрической (r, φ, z) и сферической (r, φ, θ) системах отсчета, но число параметров, однозначно определяющих положение точки в пространстве всегда три.

Материальная точка на плоскости имеет две степени свободы. Если в плоскости выбрать систему координат xOy , то координаты x и y определяют положение точки на плоскости, а координата z тождественно равна нулю.

Свободная материальная точка на поверхности любого вида имеет две степени свободы. Например: положение точки на поверхности Земли определяется двумя параметрами: широтой и долготой.

Материальная точка на кривой любого вида имеет одну степень свободы. Параметром, определяющим положение точки на кривой, может быть, например, расстояние вдоль кривой от начала отсчета.

Рассмотрим две материальные точки в пространстве, соединенные жестким стержнем длины l . Положение каждой точки определяется тремя параметрами, но на них наложена связь.



Уравнение $l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ является уравнением связи. Из этого уравнения любая одна координата может быть выражена через остальные пять координат (пять независимых параметров). Поэтому эти две точки имеют $(2 \cdot 3 - 1 = 5)$ пять степеней свободы.

Рассмотрим три материальные точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, соединенные тремя жесткими стержнями. Число степеней свободы этих точек равно $(3 \cdot 3 - 3 = 6)$ шести.

Свободное твердое тело в общем случае имеет 6 степеней свободы. Действительно, положение тела в пространстве относительно какой-либо системы отсчета, определяется заданием трех его точек, не лежащих на одной прямой, и расстояния между точками в твердом теле остаются неизменными при любых его движениях. Согласно выше сказанному, число степеней свободы должно быть равно шести.

Поступательное и вращательное движения твердого тела.

Поступательное движение

В кинематике, как и в статистике, будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые.

Абсолютно твердым телом называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Кинематика твердого тела, также как и динамика твердого тела, является одним из наиболее трудных разделов курса теоретической механики.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1) задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;

2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Существует пять видов движения твердого тела:

- 1) поступательное движение;
- 2) вращение вокруг неподвижной оси;
- 3) плоское движение;
- 4) вращение вокруг неподвижной точки;
- 5) свободное движение.

Первые два называются простейшими движениями твердого тела/

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Приведем примеры.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.

2. Спарник AB (рис.11) при вращении кривошипов O_1A и O_2B также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

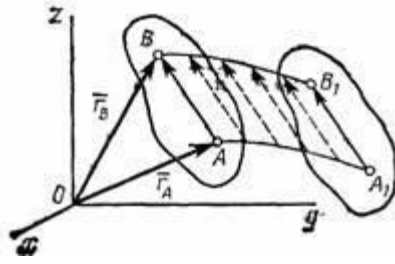


Рис.11

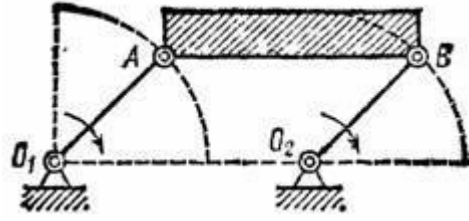
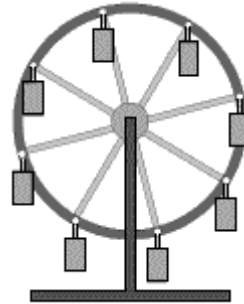


Рис.12

Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках относительно Земли.



Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета $Oxuz$. Возьмем в теле две произвольные точки A и B , положения которых в момент времени t определяются радиусами-векторами \vec{r}_A и \vec{r}_B (рис. 12).

Проведем вектор \vec{AB} , соединяющий эти точки.

Тогда $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$.

При этом длина AB постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление AB остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, вектор AB во все время движения тела остается постоянным ($AB = const$). Вследствие этого, траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор \vec{AB} . Следовательно, траектории точек A и B будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скоростей точек A и B продифференцируем обе части равенства по времени. Получим

$$d\vec{r}_B / dt = d\vec{r}_A / dt + d(\vec{AB}) / dt.$$

Но производная от постоянного вектора AB равна нулю. Производные же от векторов \vec{r}_A и \vec{r}_B по времени дают скорости точек A и B . В результате находим, что

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

т.е. что скорости точек A и B тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени:

$$d\vec{v}_A / dt = d\vec{v}_B / dt \quad \text{или} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Следовательно, ускорения точек A и B тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки A и B были выбраны произвольно, то из найденных результатов следу-

ет, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела определяется движением какой-нибудь одной из его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематике точки, нами уже рассмотренной.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость \vec{v} называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение \vec{a} - ускорением поступательного движения тела. Векторы \vec{v} и \vec{a} можно изображать приложенными в любой точке тела.

Заметим, что понятие о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях точки тела, как мы увидим, движутся с разными скоростями и ускорениями, и термины <<скорость тела>> или <<ускорение тела>> для этих движений теряют смысл.

Вращательное движение твердого тела вокруг оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными (рис.13).

Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется осью вращения.

Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то очевидно, что при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения, вдоль которой направим ось Az , полуплоскость - неподвижную и полуплоскость, врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (рис. 13).

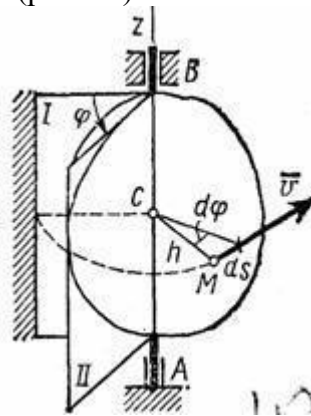


Рис.13

Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем углом поворота тела. Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем всегда в радианах. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t , т.е.

$$\varphi = f(t).$$

Уравнение выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого

тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε .

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то численно средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{cp} = \Delta\varphi / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ найдем, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi}.$$

Таким образом, числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени. Знак ω определяет направление вращения тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, $\omega > 0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$.

Размерность угловой скорости 1/Т (т.е. 1/время); в качестве единицы измерения обычно применяют рад/с или, что тоже, 1/с (c^{-1}), так как радиан - величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен $|\vec{\omega}|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис.14). Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

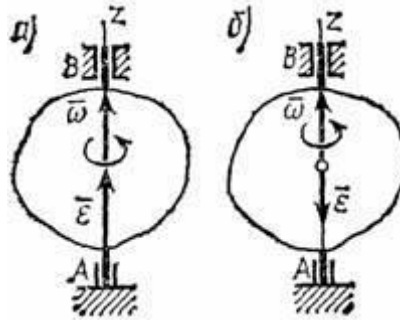


Рис.14

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то численное значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{cp} = \Delta\omega / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ найдем,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Таким образом, числовое значение углового ускорения, тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения 1/Т² (1/время²); в качестве единицы измерения обычно применяется рад/с² или, что то же, 1/с² (c^{-2}).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает, - замедленным. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, - когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt.$$

Направление $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\vec{\omega}$, когда тело вращается ускоренно и (рис.14,а), противоположно $\vec{\omega}$ при замедленном вращении (рис.14,б).

Равномерное и равнопеременное вращения

Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega = \text{const}$), то

вращение тела называется равномерным. Найдем закон равномерного вращения. Из форму-

лы $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ имеем $d\varphi = \omega dt$.

Отсюда, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi = \varphi_0$, и беря интегралы слева от φ_0 до φ , а справа от 0 до t , получим окончательно

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Из равенства следует, что при равномерном вращении, когда $\varphi_0 = 0$
 $\varphi = \omega t$ и $\omega = \varphi / t$.

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n об/мин. Найдем зависимость между n об/мин и ω 1/с. При одном обороте тело повернется на угол 2π , а при n оборотах на $2\pi n$; этот поворот делается за время $t = 1 \text{ мин} = 60 \text{ сек}$. Из равенства следует тогда, что

$$\omega = \pi \cdot n / 30 \approx 0,1n.$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным ($\varepsilon = \text{const}$), то вращение называется равнопеременным. Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi = \varphi_0$, а угловая скорость $\omega = \omega_0$ (ω_0 - начальная угловая скорость).

Из формулы $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ имеем $d\omega = \varepsilon \cdot dt$. Интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω , а правую - в пределах от 0 до t , найдем $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$,

$$d\varphi / dt = \omega_0 + \varepsilon \quad \text{или} \quad d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon dt.$$

Вторично интегрируя, найдем отсюда закон равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon^2 / 2.$$

Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение будет равноускоренным, а если разные - равнозамедленным.

Скорости и ускорения точек вращающегося тела.

Установив характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

1. Скорости точек тела. Рассмотрим какую-нибудь точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (см. рис.13). При вращении тела точка M будет описывать окружность радиуса h , плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр C лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds = h d\varphi$. Тогда числовое значение скорости точки будет равно отношению ds к dt , т.е

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad v = h\omega.$$

Скорость \vec{v} в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще линейной или окружной скоростью точки M .

Таким образом, числовое значение скорости точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку M .

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент времени одно и то же значение, то скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси враще-

ния.

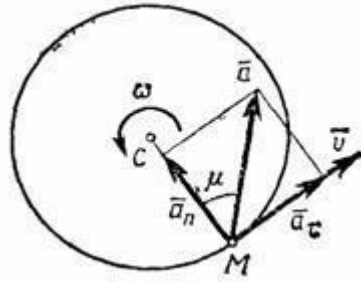


Рис.15

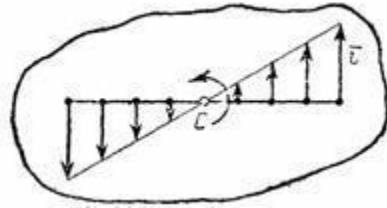


Рис. 16

2. Ускорения точек тела. Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами $a_\tau = dv/dt$, $a_n = v^2/\rho$.

В нашем случае $\rho = h$. Подставляя значение v в выражения a_τ и a_n , получим:

$$a_\tau = h \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h}$$

или окончательно:

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2.$$

Касательная составляющая ускорения a_τ направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном); нормальная составляющая a_n всегда направлена по радиусу MC к оси вращения (рис.16). Полное ускорение точки M будет $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ или $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ , который вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\mu = a_\tau/a_n$. Подставляя сюда значения a_τ и a_n , получаем $\operatorname{tg}\mu = \varepsilon/\omega^2$.

Так как ω и ε имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей. Поле ускорений точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис.18.

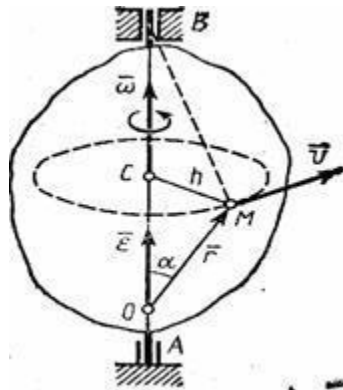


Рис.17

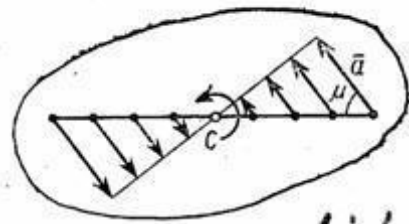


Рис.18

3. Векторы скорости и ускорения точек тела. Чтобы найти выражения непосредственно для векторов v и a , проведем из произвольной точки O оси AB радиус-вектор \vec{r} точ-

ки M (рис. 17). Тогда $h = r \sin \alpha$ и по формуле $|\nu| = |\omega| h = |\omega| r \cdot \sin \alpha$ или $|\nu| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$.

Таким образом, модуль векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$ равен модулю скорости точки M . Направления векторов $\vec{\omega} \times \vec{r}$ и ν тоже совпадают (оба они перпендикулярны плоскости OMB) и размерности их одинаковы. Следовательно, $\vec{\nu} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ - формула Эйлера, т.е. вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.

Пример 5. Маятник OM качается в вертикальной плоскости так, что $\varphi = 0,5 \sin 2t$. Длина $OM = l = 1$ м. (рис. 19)

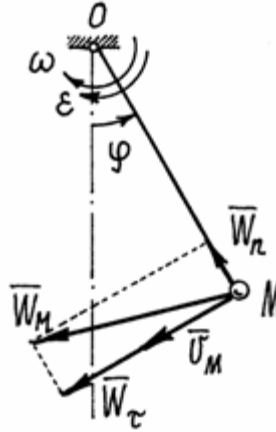


Рис.19

Маятник вращается вокруг горизонтальной оси O , перпендикулярной вертикальной плоскости. Угловая скорость $\omega = \dot{\varphi} = \cos 2t \text{ с}^{-1}$, угловое ускорение $\varepsilon = \dot{\omega} = -2 \sin 2t \text{ с}^{-2}$.

Например, при $t = 1 \text{ с}$ $\varphi = 0,5 \sin 2 = 0,45 \text{ рад} \cong 26^\circ$; $\omega = \cos 2 = -0,42 \text{ с}^{-1}$ (вращение по часовой стрелке); $\varepsilon = -2 \sin 2 = -1,82 \text{ с}^{-2}$ (угловое ускорение направлено также по часовой стрелке). Вращение в этом положении ускоренное.

Скорость точки M : $v_M = l\omega = 1 \cdot 0,42 = 0,42 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ (определяется модуль скорости). Направлен вектор скорости соответственно направлению угловой скорости - в сторону вращения.

Нормальное ускорение $a_n = l\omega^2 = 1 \cdot 0,42^2 = 0,176 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$,

касательное ускорение $a_\tau = l\varepsilon = 1 \cdot 1,82 = 1,82 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$. (Определён опять модуль вектора ускорения. Направлен вектор \vec{a}_τ вниз, как указывает угловое ускорение).

Величина полного ускорения точки $a_M = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 1,828 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Вращение тела вокруг неподвижной точки

Название такого вида движения довольно точно его определяет. Часто это движение называют сферическим движением потому, что все точки тела движутся по сферическим поверхностям.

Наглядным примером такого движения является волчок, закономерности движения которого лежат в основе гироскопических приборов.

1) Углы Эйлера. Уравнения вращения тела с одной неподвижной точкой.

Положение тела определяется тремя углами. Используются различные системы углов. Например, корабельные углы, самолётные углы и др. Но самыми распространёнными яв-

ляются углы Эйлера: ψ (пси), θ (тета), φ (фи).

Положение тела определяется следующим образом. Назначаются две системы декартовых осей. Первая система – неподвижные оси x, y, z . Начало которых берётся в неподвижной точке O тела (рис. 20). Вторая система, оси x_1, y_1, z_1 , связывается с телом. Поэтому положение тела будет определяться как положение этих осей относительно неподвижных.

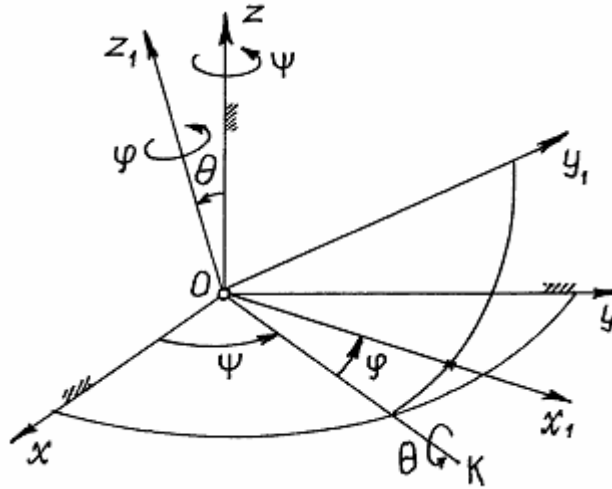


Рис.20

Когда углы Эйлера равны нулю, подвижные оси совпадают с неподвижными. Чтобы определить положение тела, соответствующее заданным углам Эйлера, производим следующие действия. Сначала подвижные оси, а значит и тело, поворачиваем на угол ψ вокруг оси z . При этом оси x_1 и y_1 отойдут от осей x и y в горизонтальной плоскости и ось x_1 займёт положение OK (рис.20). Затем тело вращаем вокруг нового положения оси x_1 (прямой OK) на угол θ . Ось z_1 отойдёт от оси z на этот угол θ , а ось y_1 приподнимется над горизонтальной плоскостью. Наконец, тело (и подвижные оси) вращаем вокруг нового положения оси z_1 на угол φ . Ось x_1 отойдёт от положения OK в наклонной плоскости, перпендикулярной оси z_1 . Это положение тела и будет соответствовать углам Эйлера (на рисунке само тело не показано).

Линия пересечения неподвижной плоскости xOy и подвижной x_1Oy_1 , прямая OK , называется *линией узлов*. Угол ψ называется *углом прецессии*, угол θ – *углом нутации*, угол φ – *углом собственного вращения*. Эти названия углов пришли из теории гироскопов.

При движении тела углы Эйлера изменяются по определённым законам $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, которые называются *уравнениями вращения*.

На примере вращающегося волчка можно лучше разобраться в этих углах Эйлера (рис.21). Ось волчка z_1 описывает конус вокруг неподвижной оси z . Это вращение определяется углом ψ (говорят: волчок совершает прецессию). Отклонение оси волчка от вертикали – угол нутации θ .

А вращение волчка вокруг своей оси z_1 , определяемое углом φ – собственное вращение.

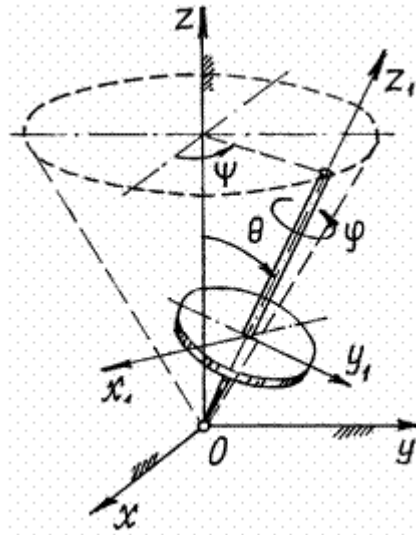


Рис.21

2) Теорема Даламбера – Эйлера. Мгновенная ось вращения.

Проведём в теле сферическую поверхность произвольного радиуса с центром в неподвижной точке O (рис.22).

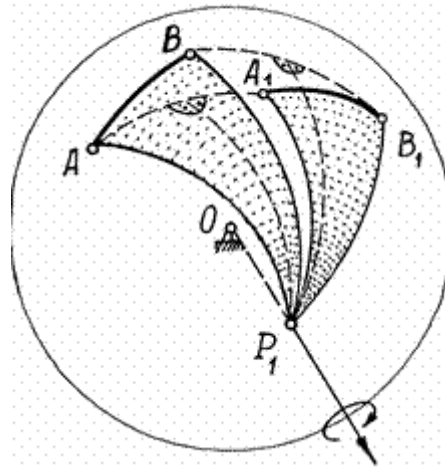


Рис.22

Покажем у тела какие-нибудь две точки A и B , расположенные на этой сфере. Соединим их по сфере дугой наибольшего радиуса (кратчайшее расстояние между точками). Переместим тело в новое положение. Точки, а значит и дуга, займут положение A_1 и B_1 . Соединим точки A и A_1 , B и B_1 дугами большого радиуса AA_1 и BB_1 . Посередине этих дуг проведём им перпендикулярные дуги и найдём их точку пересечения P_1 . Соединим эту точку P_1 с точками A, B, A_1, B_1 . Получим два сферических треугольника $\triangle ABP_1$ и $\triangle A_1B_1P_1$, расположенных на этой сфере. Эти два треугольника равны, как треугольники с равными сторонами ($AB = A_1B_1$, а $AP_1 = A_1P_1$ и $BP_1 = B_1P_1$ – как дуги равноудалённые от перпендикуляров). Так как эти два треугольника расположены на одной сфере и имеют общую вершину P_1 , то их можно совместить поворотом сферы, а значит и тела, вокруг прямой OP_1 .

Поэтому можно сделать вывод, что тело с одной неподвижной точкой можно переместить из одного положения в другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку O . Это утверждение – есть теорема Даламбера-Эйлера.

Конечно, такое перемещение не является истинным движением тела. На самом деле тело переходило из первого положения в другое каким-то другим, наверное более сложным путём. Но, если время Δt такого перехода мало, то это перемещение будет близко к действительному. А при $\Delta t \rightarrow 0$ можно предположить, что для данного момента времени тело поворачивается вокруг некоторой оси P , проходящей через неподвижную точку O , вращаясь вокруг неё с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Конечно, для каждого другого момента времени эта ось расположена иначе. Поэтому ось P называют *мгновенной осью вращения*, а угловую скорость $\vec{\omega}$ – *мгновенной угловой скоростью*, вектор которой направлен по оси.

3) Скорость точек тела.

По теореме Даламбера-Эйлера за малое время Δt движение тела можно представить как вращение вокруг неподвижной оси OP_1 с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}_{cp}$ (рис.23).

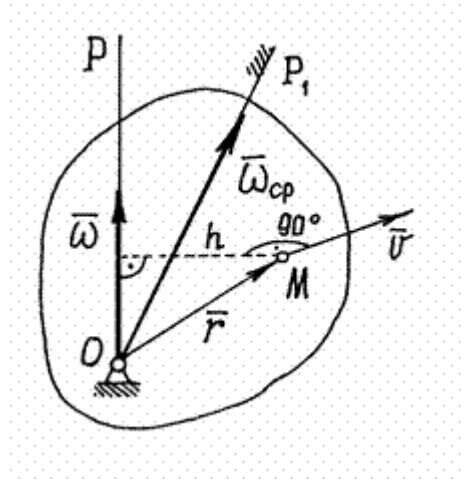


Рис.23

Тогда скорость точки M : $\vec{v}_{cp} = \vec{\omega}_{cp} \times \vec{r}$. В пределе, при $\Delta t \rightarrow 0$, угловая скорость $\vec{\omega}_{cp}$ будет приближаться к мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$, направленной по мгновенной оси вращения P , а скорость точки \vec{v}_{cp} – к истинному значению:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{\omega}_{cp} \times \vec{r}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\omega}_{cp} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Но таким же образом находится скорость точки при вращении тела вокруг оси, по которой направлен вектор $\vec{\omega}$, в нашем случае – по мгновенной оси вращения P . Поэтому скорость точки можно определить как скорость её при вращении тела вокруг мгновенной оси P . Величина скорости $v = h \cdot \omega$ (рис.23).

Определение скоростей точек тела значительно упрощается, если известна мгновенная ось вращения P . Иногда её можно найти, если удастся обнаружить у тела хотя бы ещё одну точку, кроме O , скорость которой в данный момент равна нулю, и провести ось P из неподвижной точки O через эту точку. Так как мгновенная ось вращения – геометрическое место точек, скорости которых равны нулю в данный момент времени.

Пример 6. Водило $OA = a$, вращаясь вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω_0 , заставляет диск радиуса R кататься по горизонтальной плоскости (рис.24).

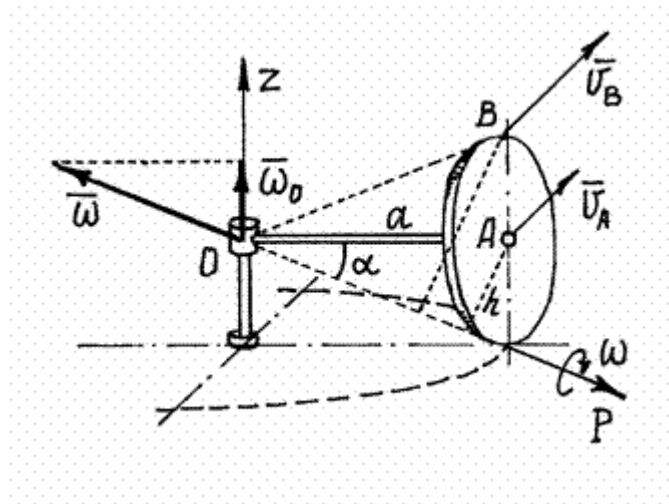


Рис.24

Если представить диск как основание конуса с вершиной в неподвижной точке O , то движение диска можно назвать вращением вокруг этой неподвижной точки O .

Так как скорость точки касания диска с плоскостью равна нулю, то мгновенная ось вращения P проходит через эту точку. И вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ будет направлен по этой оси.

Точка A вместе с водилом OA вращается вокруг оси z . Поэтому её скорость $v_A = a\omega_0$ (рис.24). Эта скорость определяет направление вращения диска вокруг

оси P и направление вектора $\vec{\omega}$. Величина угловой скорости $\omega = \frac{v_A}{h}$ (h – расстояние от A до оси P). Теперь можно найти скорость любой точки диска, рассматривая его движение как вращение вокруг оси P . Так, например, скорость точки B : $v_B = 2h \cdot \omega$. Так

$$\text{как } h = R \cos \alpha \text{ и } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}, \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}},$$

$$\text{то } \omega = \frac{v_A}{h} = \frac{a\omega_0}{R \cos \alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \omega_0 \text{ и } v_B = 2a\omega_0.$$

4) Ускорение точек тела.

Сначала определим угловое ускорение тела $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. При движении тела вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ изменяется и по величине, и по направлению. Точка расположенная на его конце будет двигаться по некоторой траектории со скоростью \vec{u} (рис.25).

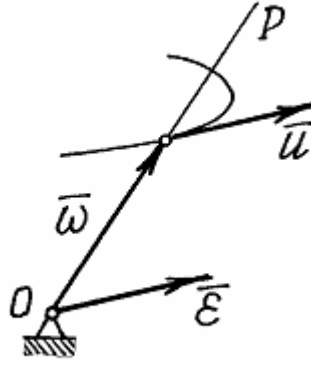


Рис.25

Если рассматривать вектор $\vec{\omega}$ как радиус-вектор этой точки, то $\vec{u} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$.
 Итак. Угловое ускорение тела можно определить как скорость точки, расположенной на конце вектора угловой скорости:

$$\vec{\epsilon} = \vec{u}.$$

Этот результат называется *теоремой Резаля*.

Теперь обратимся к определению ускорения точек. Ускорение какой-либо точки M тела

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

есть сумма двух векторов.

Первый вектор $\vec{a}_1 = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$. Модуль его $a_1 = \epsilon r \sin \alpha_1 = \epsilon h_1$, где h_1 – расстояние от точки M до вектора $\vec{\epsilon}$. Направлен он перпендикулярно $\vec{\epsilon}$ и \vec{r} . Но таким же способом определяется касательное ускорение. Поэтому первую составляющую ускорения определяют как касательное ускорение, предполагая, что тело вращается вокруг оси, совпадающей с вектором $\vec{\epsilon}$. И обозначается этот вектор ускорения так

$$\vec{a}_1^{\epsilon} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}.$$

Второй вектор $\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Модуль его $a_2 = \omega v \sin \alpha_2$, но $\alpha_2 = 90^\circ$, т.к. векторы $\vec{\omega}$ и \vec{v} перпендикулярны друг другу.

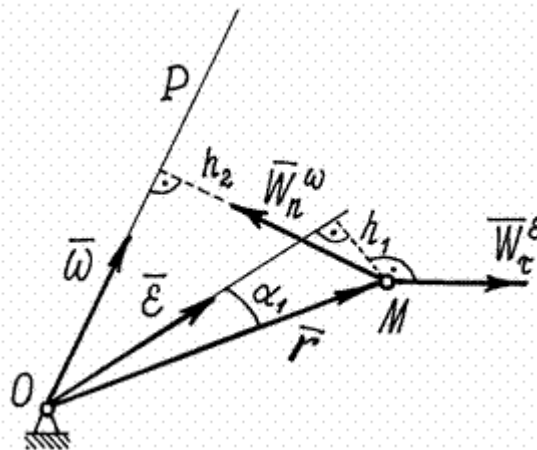


Рис.26

Значит $a_2 = \omega v = \omega h_2 \omega = h_2 \omega^2$, где h_2 – расстояние от точки M до мгновенной оси P , до вектора $\vec{\omega}$.

Направлен вектор \vec{a}_2 перпендикулярно $\vec{\omega}$ и \vec{v} , т.е. так же как вектор нормального ускорения при вращении вокруг оси P , или вектора $\vec{\omega}$. Поэтому этот вектор ускорения и обозначают, соответственно, так:

$$\vec{W}_n^\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Итак, ускорение точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, определяется как сумма двух ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau^\varepsilon + \vec{a}_n^\omega.$$

Этот результат называется *теоремой Ривальса*.

Заметим, что в общем случае векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не совпадают и угол между \vec{a}_τ^ε и \vec{a}_n^ω не равен 90° , векторы не перпендикулярны друг другу, как это было при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Пример 7. Продолжим исследование движения диска (пример 6). Мо-

дуль угловой скорости $\omega = \frac{v_A}{h} = \frac{a}{R \cos \alpha} \omega_0 = \text{const}$. Значит вектор $\vec{\omega}$ вместе с осью P , которая всегда проходит через точку касания диска с плоскостью, вращается вокруг оси Z и описывает конус. Точка M на конце вектора $\vec{\omega}$ движется по окружности радиуса $r = \omega \cdot \cos \alpha$ с угловой скоростью ω_0 . Поэто-

му угловое ускорение диска $\varepsilon = \omega_M = \omega \cos \alpha \cdot \omega_0 = \frac{a}{R} \omega_0^2$.

Откладывается вектор $\vec{\varepsilon}$ из неподвижной точки O . Направлен он, как скорость \vec{u}_M , перпендикулярно водилу OA , параллельно оси x (рис. 27).

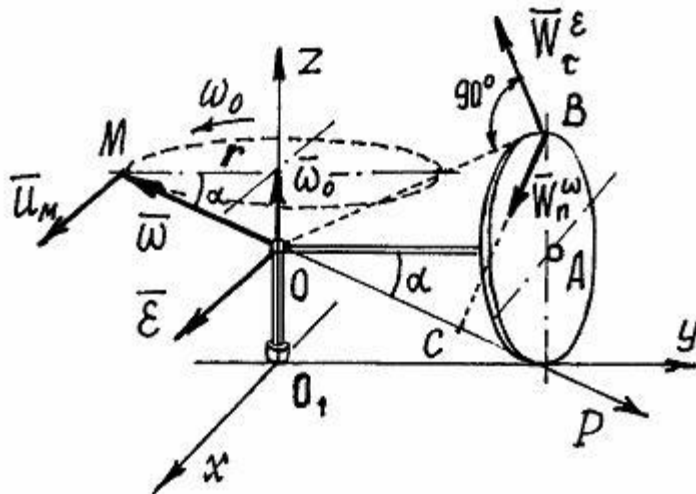


Рис.27

Найдём ускорение точки B .

Ускорение $a_\tau^\varepsilon = OB \cdot \varepsilon = \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \omega_0^2$. Направлен вектор \vec{a}_τ^ε перпендикулярно OB и расположен в плоскости zO_1y .

Ускорение $a_n^{\omega} = BC \cdot \omega^2 = 2h\omega^2 = 2h \frac{v_A^2}{h^2} = 2 \frac{a^2 \omega_0^2}{R \cos \alpha} = 2 \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \cdot \omega_0^2$. Вектор \vec{a}_n^{ω} направлен по BC , перпендикулярно мгновенной оси P . Модуль вектора \vec{a}_B найдём с помощью проекций на оси x, y, z :

$$a_{Bx} = 0,$$

$$a_{By} = -a_r^E \sin \alpha - a_n^{\omega} \sin \alpha = -3 \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \omega_0^2 \sin \alpha = -3a \omega_0^2,$$

$$a_{Bz} = a_r^E \cos \alpha - a_n^{\omega} \cos \alpha = -\frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \omega_0^2 \cos \alpha = -\frac{a^2}{R} \omega_0^2.$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2 + a_{Bz}^2} = a \omega_0^2 \sqrt{9 + \frac{a^2}{R^2}}.$$

Значит

Лекция 3. Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей и ускорений.

Плоскопараллельное движение твердого тела. Уравнения плоскопараллельного движения.

Разложение движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости Π (рис. 28). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

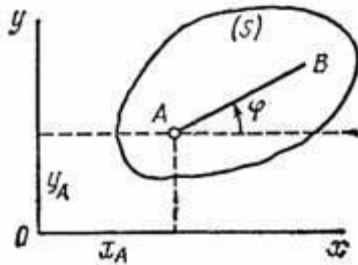


Рис.28

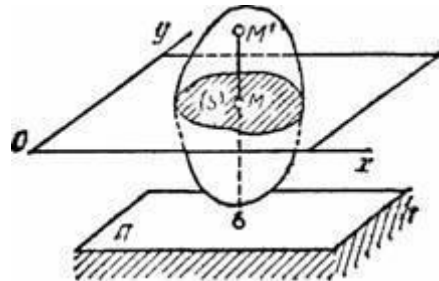


Рис.29

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскости Oxy , параллельной плоскости Π (рис.29). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM' , перпендикулярной течению S , т. е. плоскости Π , движутся тождественно.

Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Oxy сечение S этого тела или некоторая плоская фигура S . Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры S в ее плоскости, т.е. в плоскости Oxy .

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка AB (рис. 28). В свою очередь положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A и y_A точки A и угол φ , который отрезок AB образует с осью x . Точку A , выбранную для определения положения фигуры S , будем в дальнейшем называть полюсом.

При движении фигуры величины x_A и y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости Oxy в любой момент времени, надо знать за-

висимости

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости. Они же являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Первые два из уравнений движения определяют то движение, которое фигура совершала бы при $\varphi = \text{const}$; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A . Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при $x_A = \text{const}$ и $y_A = \text{const}$, т.е. когда полюс A неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса A . Отсюда можно заключить, что в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A , и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса $\vec{v}_{\text{пост}} = \vec{v}_A$, $\vec{a}_{\text{пост}} = \vec{a}_A$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

Определение скоростей точек плоской фигуры

Было отмечено, что движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью v_A полюса A , и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки M фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

В самом деле, положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$ (рис.30), где \vec{r}_A - радиус-вектор полюса A , $\vec{r}' = \vec{AM}$ - вектор, определяющий положение точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой вращение вокруг полюса A). Тогда

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $d\vec{r}_A/dt = \vec{v}_A$ есть скорость полюса A ; величина же $d\vec{r}'/dt$ равна скорости \vec{v}_{MA} , которую точка M получает при $\vec{r}_A = \text{const}$, т.е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса A . Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

Скорость \vec{v}_{MA} , которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A :

$$v_{MA} = \omega MA \quad (\vec{v}_{MA} \perp \vec{MA}),$$

где ω - угловая скорость фигуры.

Таким образом, скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости \vec{v}_M находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.31).

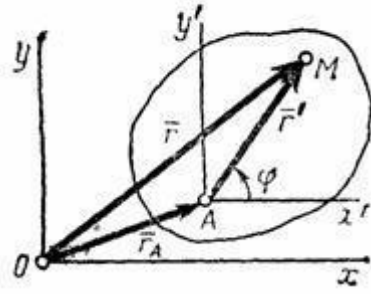


Рис.30

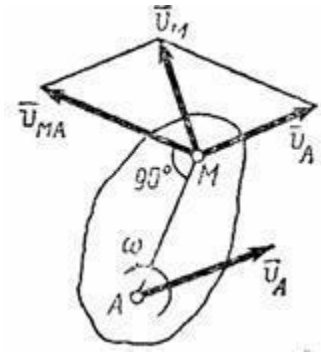


Рис.31

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Определение скоростей точек плоской фигуры (или тела, движущегося плоскопараллельно) связано обычно с довольно сложными расчетами. Однако можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек фигуры (или тела).

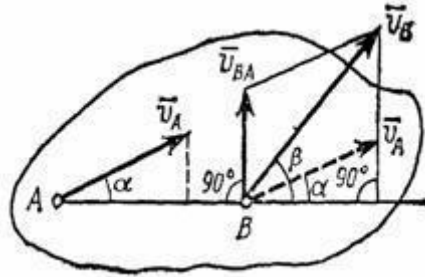


Рис.32

Один из таких методов дает теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу. Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела). Принимая точку A за полюс (рис.32), получаем $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$. Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB , и учитывая, что вектор \vec{v}_{BA} перпендикулярен AB , находим

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha,$$

и теорема доказана.

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B , не параллельные друг другу (рис.33). Тогда точка P , лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору \vec{v}_A и Bb к вектору \vec{v}_B , и будет мгновенным центром скоростей так как $v_P = 0$. В самом деле, если допустить, что $v_P = 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор \vec{v}_P должен быть одновременно перпендикулярен AP (так как $\vec{v}_A \perp AP$) и BP (так

как $\vec{v}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

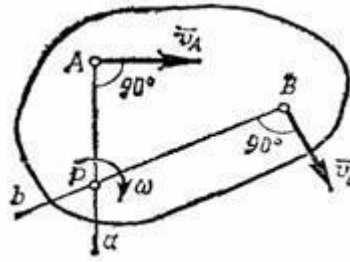


Рис.33

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то скорость точки A будет $\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PA}$,

так как $v_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При этом

$$v_A = \omega PA \quad (\vec{v}_A \perp PA);$$

$$v_B = \omega PB \quad (\vec{v}_B \perp PB) \quad \text{и т.д.}$$

Из равенств, следует еще, что

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

т.е. что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от МЦС.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей \vec{v}_A и \vec{v}_B каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры, надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B . Тогда, восставив из точек A и B перпендикуляры к \vec{v}_A и \vec{v}_B , построим мгновенный центр скоростей P и по направлению \vec{v}_A определим направление поворота фигуры. После этого, зная v_A , найдем скорость v_M любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор \vec{v}_M перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P :

$$\omega = \frac{v_B}{PB}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис.34), имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю ($v_P = 0$), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качение колеса по рельсу.

б) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем ли-

ния AB не перпендикулярна \vec{v}_A (рис.35,а), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны \vec{v}_A . При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, т. е. $v_B = v_A$; аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т.е. фигура имеет мгновенное поступательное распределение скоростей (такое состояние движения тела называют еще мгновенно поступательным). Угловая скорость ω тела в этот момент времени, как видно равна нулю.

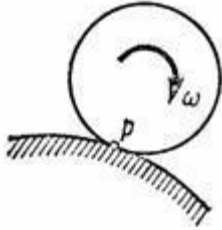


Рис.34

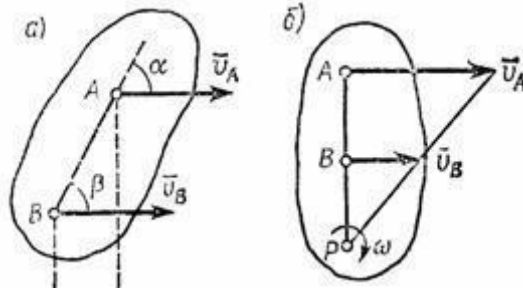


Рис.35

в) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна \vec{v}_A , то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рис. 35,б. Справедливость построений следует из пропорции. В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра P надо кроме направлений знать еще и модули скоростей v_B и v_A .

г) Если известны вектор скорости \vec{v}_B какой-нибудь точки B фигуры и ее угловая скорость ω , то положение мгновенного центра скоростей P , лежащего на перпендикуляре к \vec{v}_B (рис.35,б), можно найти как $BP = v_B / \omega$.

Решение задач на определение скорости.

Для определения искомых кинематических характеристик (угловой скорости тела или скоростей его точек) надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки и направление скорости другой точки сечения этого тела. С определения этих характеристик по данным задачи и следует начинать решение.

Механизм, движение которого исследуется, надо изображать на чертеже в том положении, для которого требуется определить соответствующие характеристики. При расчете следует помнить, что понятие о мгновенном центре скоростей имеет место для данного твердого тела. В механизме, состоящем из нескольких тел, каждое непоступательное движущееся тело имеет в данный момент времени свой мгновенный центр скоростей P и свою угловую скорость.

Пример 8. Тело, имеющее форму катушки, катится своим средним цилиндром по неподвижной плоскости так, что $x_C = 3t$ (см). Радиусы цилиндров: $R = 4$ см и $r = 2$ см (рис.36).

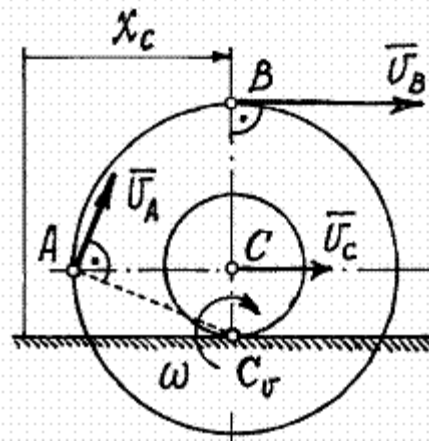


Рис.36

Определим скорости точек A, B и C .

Мгновенный центр скоростей находится в точке касания катушки с плоскостью.

Скорость полюса C

$$v_C = \dot{x}_C = 3 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$$

Угловая скорость катушки

$$\omega = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{v_C}{r} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ с}^{-1}$$

Скорости точек A и B направлены перпендикулярно отрезкам прямых, соединяющих эти точки с мгновенным центром скоростей. Величина скоростей:

$$v_A = AC_v \cdot \omega = \sqrt{r^2 + R^2} \cdot \omega = 6,71 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$v_B = BC_v \cdot \omega = (R+r)\omega = 9,0 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$$

Пример 9. Стержень AB скользит концами по взаимно перпендикулярным прямым так, что при угле α скорость $v_B = u$. Длина стержня $AB = l$. Определим скорость конца A и угловую скорость стержня.

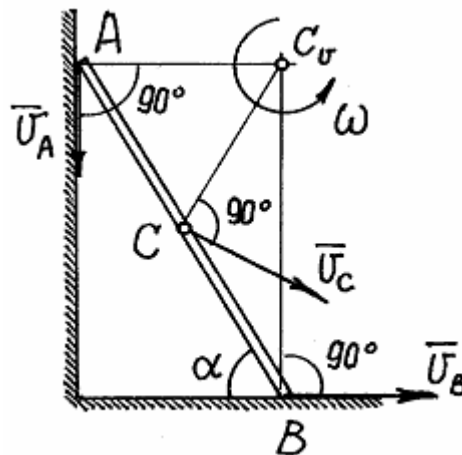


Рис.37

Нетрудно определить направление вектора скорости точки A , скользящей по вертикальной прямой. Тогда C_v находится на пересечении перпендикуляров к \vec{v}_A и \vec{v}_B (рис. 37).

$$\omega = \frac{v_B}{BC_v} = \frac{u}{l \sin \alpha}$$

Угловая скорость

$$v_A = AC_v \cdot \omega = l \cos \alpha \cdot \frac{u}{l \sin \alpha} = u \operatorname{ctg} \alpha$$

Скорость точки A:

A скорость центра стержня C, например, направлена перпендикулярно CC_v и равна:

$$v_C = CC_v \omega = \frac{l}{2} \omega = \frac{u}{2 \sin \alpha}$$

План скоростей.

Пусть известны скорости нескольких точек плоского сечения тела (рис.38). Если эти скорости отложить в масштабе из некоторой точки O и соединить их концы прямыми, то получится картинка, которая называется планом скоростей. (На рисунке $\overline{oa} = \vec{v}_A$, $\overline{oc} = \vec{v}_C$, $\overline{ob} = \vec{v}_B$).

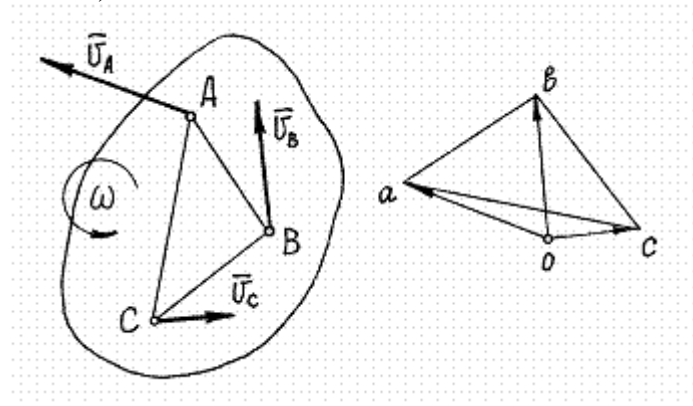


Рис.38

Свойства плана скоростей.

а) Стороны треугольников на плане скоростей перпендикулярны соответствующим прямым на плоскости тела.

Действительно, $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$. Но на плане скоростей $\vec{v}_B = \overline{ob}$, $\vec{v}_A = \overline{oa}$. Значит $\vec{v}_{BA} = \overline{ab}$; причём \vec{v}_{BA} перпендикулярна AB , поэтому и $ab \perp AB$. Точно так же $bc \perp BC$ и $ac \perp AC$.

б) Стороны плана скоростей пропорциональны соответствующим отрезкам прямых на плоскости тела.

Так как $v_{BA} = AB \cdot \omega = ab$, $v_{BC} = BC \cdot \omega = bc$, $v_{AC} = AC \cdot \omega = ac$, то отсюда и следует, что стороны плана скоростей пропорциональны отрезкам прямых на плоскости тела.

Объединив оба свойства, можно сделать вывод, что план скоростей подобен соответствующей фигуре на теле и повернут относительно её на 90° по направлению вращения. Эти свойства плана скоростей позволяют определять скорости точек тела графическим способом.

Пример 10. На рисунке 39 в масштабе изображён механизм. Известна угловая скорость ω_0 звена OA .

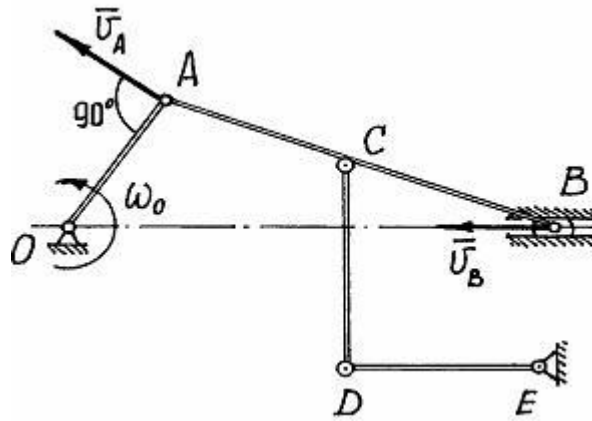


Рис.39

Чтобы построить план скоростей должна быть известна скорость какой-нибудь одной точки и хотя бы направление вектора скорости другой. В нашем примере можно определить скорость точки A : $v_A = OA \cdot \omega_0$ и направление её вектора \vec{v}_A .

План скоростей

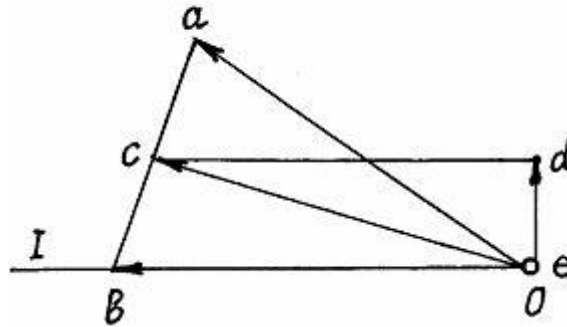


Рис.40

Откладываем (рис. 40) из точки o в масштабе $\overline{oa} = \vec{v}_A$. Известно направление вектора скорости ползуна B – горизонтальное. Проводим на плане скоростей из точки O прямую I по направлению скорости \vec{v}_B , на которой должна находиться точка b , определяющая скорость этой точки B . Так как стороны плана скоростей перпендикулярны соответствующим звеньям механизма, то из точки a проводим прямую перпендикулярно AB до пересечения с

прямой I . Точка пересечения определит точку b , а значит и скорость точки B : $\vec{v}_B = \overline{ob}$. По второму свойству плана скоростей его стороны подобны звеньям механизма. Точка C делит AB пополам, значит и c должна делить ab пополам. Точка c определит на плане скоростей величину и направление скорости $\vec{v}_c = \overline{oc}$ (если c соединить с точкой O).

Скорость точки E равна нулю, поэтому точка e на плане скоростей совпадает с точкой O .

Далее. Должно быть $cd \perp CD$ и $de \perp DE$. Проводим эти прямые, находим их точку пересечения d . Отрезок od определит вектор скорости $\vec{v}_D = \overline{od}$.

Определение ускорений точек плоской фигуры

Покажем, что ускорение любой точки M плоской фигуры (так же, как и скорость) складывается из ускорений, которые точка получает при поступательном и вращательном

движениях этой фигуры. Положение точки M по отношению к осям Oxy (см.рис.30) определяется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$, где $\vec{r}' = \overline{AM}$. Тогда

$$\vec{a}_M = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}.$$

В правой части этого равенства первое слагаемое есть ускорение \vec{a}_A полюса A , а второе слагаемое определяет ускорение \vec{a}_{AM} , которое точка m получает при вращении фигуры вокруг полюса A . следовательно,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}.$$

Значение \vec{a}_{MA} , как ускорения точки вращающегося твердого тела, определяется как

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{tg}\mu = \varepsilon / \omega^2,$$

где ω и ε - угловая скорость и угловое ускорение фигуры, а μ - угол между вектором \vec{a}_{MA} и отрезком MA (рис.41).

Таким образом, ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление ускорения \vec{a}_M , находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.23).

Однако вычисление \vec{a}_M с помощью параллелограмма, изображенного на рис.23, усложняет расчет, так как предварительно надо будет находить значение угла μ , а затем - угла между векторами \vec{a}_{MA} и \vec{a}_A . Поэтому при решении задач удобнее вектор \vec{a}_{MA} заменять его касательной (\vec{a}_{MA}^{τ}) и нормальной (\vec{a}_{MA}^n) составляющими и представить в виде

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n.$$

При этом вектор \vec{a}_{MA}^{τ} направлен перпендикулярно AM в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; вектор \vec{a}_{MA}^n всегда направлен от точки M к полюсу A (рис.42). Численно же

$$a_{MA}^{\tau} = AM\varepsilon, \quad a_{MA}^n = AM\omega^2.$$

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно тоже представить как сумму касательной \vec{a}_A^{τ} и нормальной \vec{a}_A^n составляющих, тогда

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n.$$

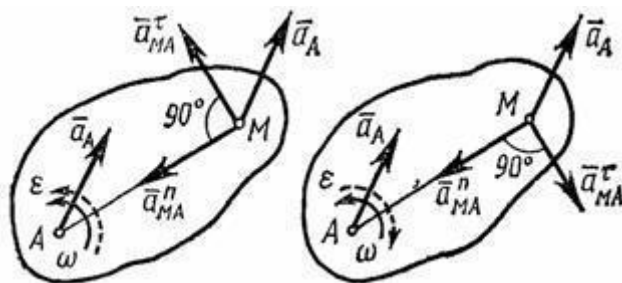


Рис.41

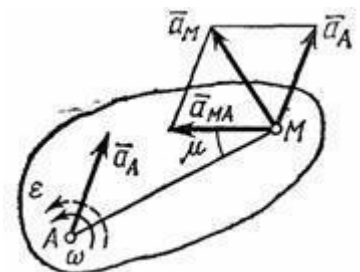


Рис.42

Наконец, когда точка M движется криволинейно и ее траектория известна, то \vec{a}_M можно заменить суммой $\vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^n$.

Решение задач на определение ускорения

Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно найти, если известны: 1) векторы скорости \vec{v}_A и ускорения \vec{a}_A какой-нибудь точки A этой фигуры в данный момент; 2) траектория какой-нибудь другой точки B фигуры. В ряде случаев вместо траектории второй точки фигуры достаточно знать положение мгновенного центра скоростей.

Тело (или механизм) при решении задач надо изображать в том положении, для которого требуется определить ускорение соответствующей точки. Расчет начинается с определения по данным задачи скорости и ускорения точки, принимаемой за полюс.

План решения (если заданы скорость и ускорение одной точки плоской фигуры и направления скорости и ускорения другой точки фигуры):

1) Находим мгновенный центр скоростей, восставляя перпендикуляры к скоростям двух точек плоской фигуры.

2) Определяем мгновенную угловую скорость фигуры.

3) Определяем центростремительное ускорение точки вокруг полюса, приравнивая нулю сумму проекций всех слагаемых ускорений на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения.

4) Находим модуль вращательного ускорения, приравнивая нулю сумму проекций всех слагаемых ускорений на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения.

5) Определяем мгновенное угловое ускорение плоской фигуры по найденному вращательному ускорению.

6) Находим ускорение точки плоской фигуры при помощи формулы распределения ускорений.

При решении задач можно применять «теорему о проекциях векторов ускорений двух точек абсолютно твердого тела»:

«Проекции векторов ускорений двух точек абсолютно твердого тела, которое совершает плоскопараллельное движение, на прямую, повернутую относительно прямой, проходящей через эти две точки, в плоскости движения этого тела на угол $\delta = \arctg(\omega^2 / \varepsilon)$ в сторону углового ускорения, равны».

Эту теорему удобно применять, если известны ускорения только двух точек абсолютно твердого тела как по модулю, так и по направлению, известны только направления векторов ускорений других точек этого тела (геометрические размеры тела не известны), не известны ω и ε – соответственно проекции векторов угловой скорости и углового ускорения этого тела на ось, перпендикулярную плоскости движения, не известны скорости точек этого тела.

Известны еще 3 способа определения ускорений точек плоской фигуры:

1) Способ основан на дифференцировании дважды по времени законов плоскопараллельного движения абсолютно твердого тела.

2) Способ основан на использовании мгновенного центра ускорений абсолютно твердого тела (о мгновенном центре ускорений абсолютно твердого тела будет рассказано ниже).

3) Способ основан на использовании плана ускорений абсолютно твердого тела.

Пример 11. Диск катится без скольжения по прямой. Центр его C имеет скорость v_C и ускорение a_C (рис. 43). Найдем ускорение точки A .

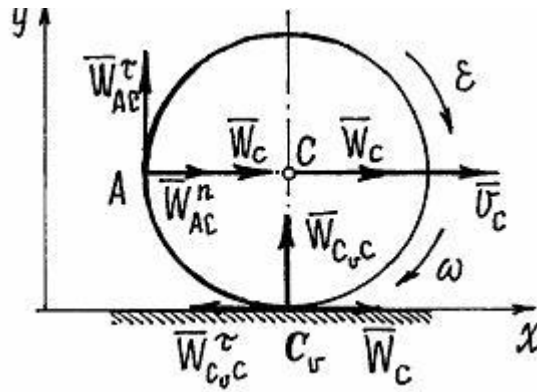


Рис.43

Угловую скорость находим с помощью мгновенного центра скоростей:

$$\omega = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{v_C}{R}$$

Угловое ускорение при таком движении можно найти как производную от угловой скорости. Имея в виду, что $CC_v = R = \text{const}$, а точка C движется по прямой, получим

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_C}{R} = \frac{1}{R} \frac{dv_C}{dt} = \frac{a_C}{R}$$

Если C – полюс, то $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^n + \vec{a}_{AC}^r$, где

$$a_{AC}^n = AC \cdot \omega^2 = R \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{v_C^2}{R};$$

$$a_{AC}^r = AC \cdot \varepsilon = R \frac{a_C}{R} = a_C$$

Величину ускорения найдём с помощью проекций на оси x и y :

$$a_{Ax} = a_{AC}^n + a_C = \frac{v_C^2}{R} + a_C, \quad a_{Ay} = a_{AC}^r = a_C.$$

$$\text{Тогда } a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \frac{1}{R} \sqrt{(v_C^2 + Ra_C)^2 + R^2 a_C^2}$$

Ускорение мгновенного центра скоростей C_v : $\vec{a}_{C_v} = \vec{a}_C + \vec{a}_{C_v C}^n + \vec{a}_{C_v C}^r$,

$$\text{где } a_{C_v C}^n = R\omega^2 = \frac{v_C^2}{R}; \quad a_{C_v C}^r = R\varepsilon = a_C$$

И, так как $\vec{a}_{C_v C}^r = -\vec{a}_C$, ускорение $\vec{a}_{C_v} = \vec{a}_{C_v C}^n$ и $a_{C_v} = \frac{v_C^2}{R} \neq 0$.

Таким образом, ускорение мгновенного центра скоростей не равно нулю.

Пример 12. Вернёмся к примеру 9 (рис. 44).

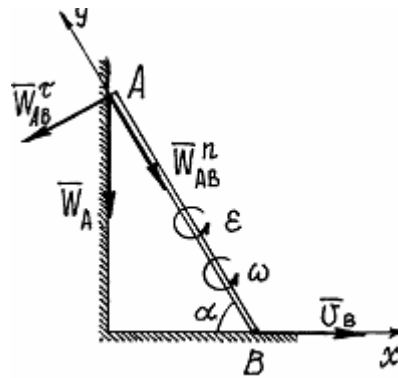


Рис.44

Найдём ускорение точки A , полагая $\vec{v}_B = \vec{u} = \text{const}$, т.е. $\vec{a}_B = 0$.

Имеем:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^r, \quad (1)$$

где $\alpha_{AB}^n = l\omega^2 = \frac{u^2}{l \sin^2 \alpha}$; $\alpha_{AB}^r = l\varepsilon$, но направление вектора \vec{a}_{AB}^r неизвестно, неизвестно и угловое ускорение ε .

Предположим, что вектор \vec{a}_{AB}^r направлен перпендикулярно AB , влево.

Ускорение \vec{a}_A , конечно, направлено по траектории прямолинейного движения точки A , предположим вниз. Спроектируем векторное равенство (1) на оси x и y , получим:

$$0 = \alpha_{AB}^n \cos \alpha - \alpha_{AB}^r \sin \alpha \quad \text{и} \quad -a_A \sin \alpha = -\alpha_{AB}^n.$$

Из второго уравнения сразу находим ускорение точки A

$$a_A = \frac{\alpha_{AB}^n}{\sin \alpha} = \frac{u^2}{l \sin^3 \alpha}.$$

Положительное значение a_A указывает на то, что направление вектора \vec{a}_A выбрано правильно.

Из первого уравнения можно найти ускорение $\alpha_{AB}^r = \alpha_{AB}^n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{u^2}{l \sin^3 \alpha} \cos \alpha$ и

угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\alpha_{AB}^r}{l} = \frac{u^2}{l^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha$ (направления \vec{a}_{AB}^r и ε также угаданы верно).

Мгновенный центр ускорений.

При непоступательном движении плоской фигуры у нее в каждый момент времени имеется точка Q , ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений. Определяется положение центра Q , если известны ускорение \vec{a}_A какой-нибудь точки A фигуры и величины ω и ε , следующим путем:

1) находим значение угла μ , из формулы $\text{tg} \mu = \varepsilon l \omega^2$;

2) от точки A под углом μ , к вектору \vec{a}_A проводим прямую AE (рис.45);

при этом прямая AE должна быть отклонена от \vec{a}_A в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным, и против вращения, если оно является замедленным, т. е. в сторону направления углового ускорения ε ;

3) откладываем вдоль линии AE отрезок AQ , равный

$$AQ = a_A / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

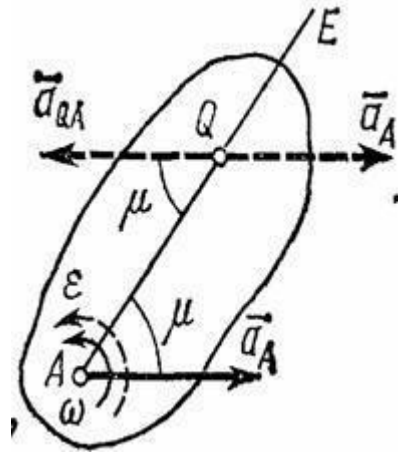


Рис.45

Построенная таким путем точка Q и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, известно что

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA}$$

где численно $a_{QA} = AQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Подставляя сюда значение AQ находим, что $a_{QA} = a_A$. Кроме того, вектор \bar{a}_{QA} должен образовывать с линией AQ угол μ , следовательно, вектор \bar{a}_{QA} параллелен \bar{a}_A , но направлен в противоположную сторону. Поэтому $\bar{a}_{QA} = -\bar{a}_A$ и $\bar{a}_Q = 0$.

Если точку Q выбрать за полюс, то так как $\bar{a}_Q = 0$, ускорение любой точки M тела, будет

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ}$$

При этом численно

$$a_M = MQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Следовательно, ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры, было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q . При этом

$$a_M / MQ = a_A / AQ = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

т.е. ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений. Картина распределения ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени показана на рис.46.

Следует иметь в виду, что положения мгновенного центра скоростей P и мгновенного центра ускорений Q в данный момент времени не совпадают. Например, если колесо катится по прямолинейному рельсу (см. рис.47), причем скорость его центра C постоянна ($v_C = const$), то мгновенный центр скоростей находится в точке P ($v_P = 0$), но при этом, как было показано $a_P \neq 0$; следовательно, точка P не является одновременно мгновенным центром ускорений.

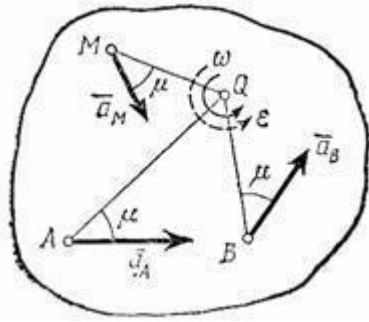


Рис.46

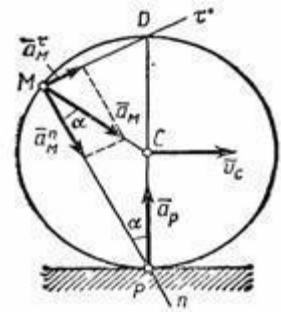


Рис.47

Мгновенный центр ускорений в этом случае находится, очевидно, в точке C , так как она движется равномерно и прямолинейно и $a_C = 0$. Центры скоростей и ускорений совпадают тогда, когда фигура (тело) вращается вокруг неподвижной оси.

Понятием о мгновенном центре ускорений удобно пользоваться при решении некоторых задач.

Лекция 4. Сложное движение точки и тела

Сложное движение точки.

Относительное, переносное и абсолютное движения.

До сих пор мы изучали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета. Однако в ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют *составным* или *сложным*. Например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода, можно считать совершающим по отношению к берегу сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе (подвижная система отсчета), и движения вместе с палубой парохода по отношению к берегу (неподвижная система отсчета). Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых.

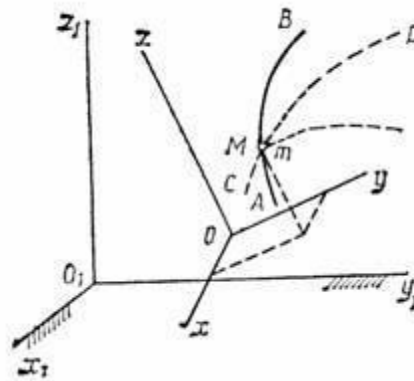


Рис.48

Рассмотрим точку M , движущуюся по отношению к подвижно системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которую называем основной или условно неподвижной (рис. 48). Каждая из этих систем отсчета связана, конечно, с определенным телом, на чертеже не показанным. Введем следующие определения.

1. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Oxyz$), называется *относительным движением* (такое движение будет видеть наблюда-

тель, связанный с этими осями и перемещающийся вместе с ними). Траектория AB , описываемая точкой в относительном движении, называется относительной траекторией. Скорость точки M по отношению к осям $Oxuz$ называется относительной скоростью (обозначается \vec{v}_r), а ускорение - относительным ускорением (обозначается \vec{a}_r). Из определения следует, что при вычислении \vec{v}_r и \vec{a}_r можно движение осей $Oxuz$ во внимание не принимать (рассматривать их как неподвижные).

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxuz$ (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M *переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями $Oxuz$ точки m , с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M , называется переносной скоростью точки M в этот момент (обозначается \vec{v}_e), а ускорение этой точки m - переносным ускорением точки M (обозначается \vec{a}_e). Таким образом,

$$\vec{v}_{пер} = \vec{v}_m, \quad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_m.$$

Если представить себе, что относительное движение точки происходит по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси $Oxuz$, то переносной скоростью (или ускорением) точки M в данный момент времени будет скорость (или ускорение) той точки t тела, с которой в этот момент совпадает точка M .

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется *абсолютным* или сложным. Траектория CD этого движения называется абсолютной траекторией, скорость - абсолютной скоростью (обозначается $\vec{v}_{аб}$) и ускорение - абсолютным ускорением (обозначается $\vec{a}_{аб}$).

В приведенном выше примере движение шара относительно палубы парохода будет относительным, а скорость - относительной скоростью шара; движение парохода по отношению к берегу будет для шара переносным движением, а скорость той точки палубы, которой в данный момент времени касается шар будет в этот момент его переносной скоростью; наконец, движение шара по отношению к берегу будет его абсолютным движением, а скорость - абсолютной скоростью шара.

При исследовании сложного движения точки полезно применять «Правило остановки». Для того, чтобы неподвижный наблюдатель увидел относительное движение точки, надо остановить переносное движение.

Тогда будет происходить только относительное движение. Относительное движение станет абсолютным. И наоборот, если остановить относительное движение, переносное станет абсолютным и неподвижный наблюдатель увидит только это переносное движение.

В последнем случае, при определении переносного движения точки, обнаруживается одно очень важное обстоятельство. Переносное движение точки зависит от того в какой момент будет остановлено относительное движение, от того, где точка находится на среде в этот момент. Так как, вообще говоря, все точки среды движутся по-разному. Поэтому логичнее определять *переносное движение точки как абсолютное движение той точки среды, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка*.

Теорема сложения скоростей.

Пусть некоторая точка M совершает движение по отношению к системе отсчета $Oxuz$, которая сама движется произвольным образом по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, (рис.49).

Конечно, абсолютное движение точки M определяется уравнениями

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t).\end{aligned}$$

Относительное движение – в движущихся осях уравнениями

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(t), \\y_1 &= y_1(t), \\z_1 &= z_1(t).\end{aligned}$$

Уравнений, определяющих переносное движение точки, не может быть вообще. Так как, по определению, переносное движение точки M – это движение относительно неподвижных осей той точки системы $O_1x_1y_1z_1$, с которой совпадает точка в данный момент. Но все точки подвижной системы движутся по-разному.

Положение подвижной системы отсчета может быть также определено, если задать положение точки O радиусом-вектором r_0 , проведенным из начала неподвижной системы отсчета, и направления единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ подвижных осей Ox, Oy, Oz .

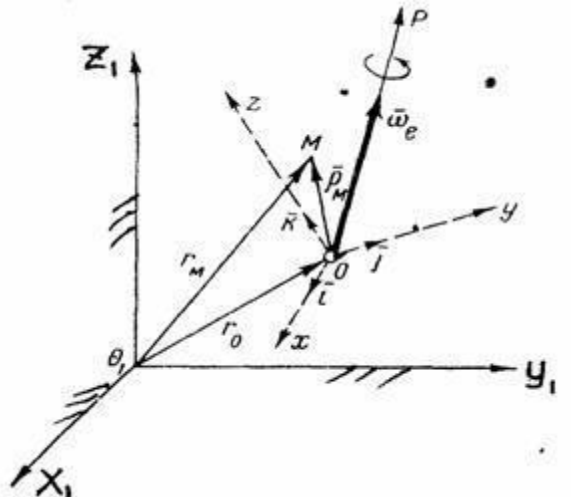


Рис.49

Произвольное переносное движение подвижной системы отсчета складывается из поступательного движения со скоростью v_0 точки O и движения вокруг мгновенной оси вращения OP , проходящей через точку O , с мгновенной угловой скоростью $\bar{\omega}_e$. Вследствие переносного движения подвижной системы отсчета радиус-вектора \bar{r}_0 и направления единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ изменяются. Если векторы $\bar{r}_0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ заданы в функции времени, то переносное движение подвижной системы отсчета вполне определено.

Положение точки M по отношению к подвижной системе отсчета можно определить радиусом-вектором $\bar{\rho}_M$

$$\bar{\rho}_M = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

где координаты x, y, z точки M изменяются с течением времени вследствие движения точки M относительно подвижной системы отсчета. Если радиус-вектор $\bar{\rho}_M$ задан в функции времени, то относительное движение точки M , т.е. движение этой точки относительно подвижной системы отсчета, задано.

Положение точки M относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, может быть определено радиусом-вектором \vec{r}_M . Из рис.49 видно, что

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_M = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$

Если относительные координаты x, y, z точки M и векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ определены в функции времени, то слагающееся из относительного и переносного движений составное движение точки M , т.е. движение этой точки по отношению к неподвижной системе отсчета, также надо считать заданным.

Скорость составного движения точки M , или абсолютная скорость этой точки, равна, очевидно, производной от радиуса-вектора \vec{r}_M точки M по времени t

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_M}{dt}$$

Поэтому, дифференцируя равенство (1) по времени t , получим

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2)$$

Разобьем слагаемые в правой части этого равенства на две группы по следующему признаку.

К первой группе отнесем те слагаемые, которые содержат производные только от относительных координат x, y, z , а ко второй - те слагаемые, которые содержат производные от векторов $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. от величин, изменяющихся только вследствие переносного движения подвижной системы отсчета

$$\vec{v}_r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad (3)$$

$$\vec{v}_e = \vec{r}_0 + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (4)$$

Каждая из групп слагаемых, обозначенных через \vec{v}_r и \vec{v}_e , представляет собой, по крайней мере, по размерности некоторую скорость. Выясним физический смысл скоростей \vec{v}_r и \vec{v}_e .

Скорость \vec{v}_r , как это следует из равенства (3), вычисляется в предположении, что изменяются только относительные координаты x, y, z точки M , но векторы $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ остаются постоянными, т.е. подвижная система отсчета $Oxuz$ как бы условно считается неподвижной. Итак, скорость \vec{v}_r представляет собой относительную скорость точки M .

Скорость \vec{v}_e вычисляется так, как будто бы точка M не двигалась относительно подвижной системы отсчета, так как производные x, y, z в равенство (4) не входят. Поэтому скорость \vec{v}_e представляет собой переносную скорость точки M .

$$\text{Итак, } \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad (5)$$

Это равенство выражает теорему сложения скоростей в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютная скорость точки M равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки.

Пример 13. Колечко M движется по вращающемуся стержню так, что $OM = s = 3t^2$ (см) и $\varphi = 2t$ (рад).

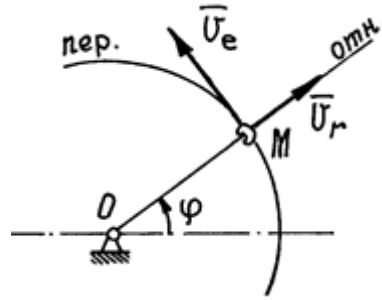


Рис.50

Ранее было установлено, что траектория относительного движения – прямая линия, совпадающая со стержнем, и движение это определяется уравнением $s = s(t)$. Траектория переносного движения точки M в момент времени t – окружность радиуса $OM = s$.

Поэтому относительная скорость $v_r = \dot{s} = 6t \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. И направлена по касательной к траектории вдоль стержня (рис.50). Переносная скорость колечка, как при вращении вокруг оси, $v_e = OM \cdot \omega = s\dot{\varphi} = 3t^2 \cdot 2 = 6t^2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Направлен вектор этой скорости по касательной к траектории переносного движения, перпендикулярно стержню.

Абсолютная скорость колечка $\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Величина ее, т.к. $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$,

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = 6t \sqrt{1 + t^2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$$

Теорема сложения ускорений. Ускорение Кориолиса.

Ускорение составного движения точки M , или абсолютное ускорение этой точки, равно, очевидно, производной от абсолютной скорости точки M по времени t

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}$$

Поэтому, дифференцируя равенство по времени, получим

$$\vec{a}_a = \ddot{r}_0 + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} + \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} + 2 \left(\dot{x} \frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$$

Разделим слагаемые правой части этого равенства на три группы.

К первой группе отнесем слагаемые, содержащие только производные от относительных координат x, y и z , но не содержащие производные от векторов $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a}_r = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$

Ко второй группе отнесем слагаемые, которые содержат только производные от векторов $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, но не содержащие производных от относительных координат x, y, z :

$$\vec{a}_e = \ddot{r}_0 + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}$$

Осталась еще одна группа слагаемых, которые не могли быть отнесены ни к первой, ни ко второй, так как они содержат производные от всех переменных $x, y, z, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Обозначим эту группу слагаемых через \vec{a}_k :

$$\vec{a}_k = 2 \left(\dot{x} \frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$$

Каждая из выделенных групп представляет собой, по крайней мере по размерности,

некоторое ускорение. Выясним физический смысл всех трех ускорений: $\bar{a}_r, \bar{a}_e, \bar{a}_k$.

Ускорение \bar{a}_r , как это видно из равенства, вычисляется так, как если бы относительные координаты x, y, z изменялись с течением времени, а векторы $\bar{r}_0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ оставались неизменными, т.е. подвижная система отсчета $Oxyz$ как бы покоилась, а точка M двигалась. Поэтому ускорение \bar{a}_r представляет собой относительное ускорение точки M . Так как ускорение (и скорость) относительного движения вычисляется в предположении, что подвижная система отсчета находится в покое, то для определения относительного ускорения (и скорости) можно пользоваться всеми правилами, изложенными ранее в кинематике точки.

Ускорение \bar{a}_e , как это видно из равенства, вычисляется в предположении, что сама точка M покоится по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$ ($x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$) и перемещается вместе с этой системой отсчета по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$. Поэтому ускорение \bar{a}_e представляет собой переносное ускорение точки M .

Третья группа слагаемых определяет ускорение \bar{a}_k , которое не может быть отнесено не к относительному ускорению \bar{a}_r , так как содержит в своем выражении производные $\frac{d\bar{i}}{dt}, \frac{d\bar{j}}{dt}, \frac{d\bar{k}}{dt}$, не к переносному ускорению \bar{a}_e , так как содержит в своем выражении производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Преобразуем правую часть равенства, припомним, что

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}.$$

Подставляя эти значения производных в равенства, получим

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \dot{x}\bar{i} + \bar{\omega}_e \times \dot{y}\bar{j} + \bar{\omega}_e \times \dot{z}\bar{k})$$

$$\text{или } \bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times (\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}).$$

Здесь вектор $\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$ есть относительная скорость \bar{v}_r точки M , поэтому

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r.$$

Ускорение \bar{a}_k называют *ускорением Кориолиса*. Ввиду того, что ускорение Кориолиса появляется в случае вращения подвижной системы отсчета, его называют еще поворотным ускорением.

С физической точки зрения появление поворотного ускорения точки объясняется взаимным влиянием переносного и относительного движений.

Итак, ускорение Кориолиса точки равно по модулю и направлению удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Равенство, которое теперь можно сокращенно записать в виде

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k$$

представляет теорему сложения ускорений в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и поворотного ускорений. Эту теорему часто называют теоремой Кориолиса.

Из формулы следует, что модуль поворотного ускорения будет

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin \alpha,$$

где α - угол между вектором $\bar{\omega}_e$ и вектором \bar{v}_r . Чтобы определить направление поворотного ускорения \bar{a}_k , нужно мысленно перенести вектор $\bar{\omega}_e$ в точку M и руководство-

ваться правилом векторной алгебры. Согласно этому правилу, вектор \vec{a} нужно направлять перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами $\vec{\omega}_e$ и \vec{v}_r , и так, чтобы, смотря с конца вектора \vec{a} , наблюдатель мог видеть кратчайший поворот от $\vec{\omega}_e$ к \vec{v}_r происходящим против движения часовой стрелки (рис. 30).

Для определения направления \vec{a}_K можно также пользоваться следующим правилом Н. Е. Жуковского: чтобы получить направление поворотного ускорения \vec{a}_K , достаточно составляющую \vec{v}_1 относительной скорости \vec{v}_r точки M , перпендикулярную к вектору $\vec{\omega}_e$, повернуть (в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{\omega}_e$) на прямой угол вокруг точки M в направлении переносного вращения (рис.51).

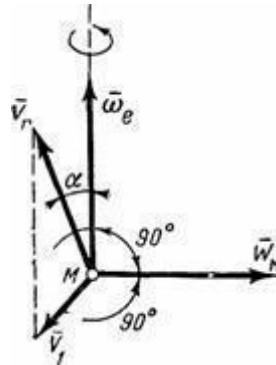


Рис.51

Если переносное движение подвижной системы отсчета есть поступательное движение, то $\vec{\omega}_e = 0$ и поэтому поворотное ускорение α точки также равно нулю. Поворотное ускорение равно, очевидно, нулю и в том случае, когда $\vec{\omega}_e$ в данный момент времени обращается в нуль.

Кроме того, поворотное ускорение точки может, очевидно, обращаться в нуль, если:

а) вектор относительной скорости \vec{v}_r точки параллелен вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$ переносного вращения, т.е. относительное движение точки происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения;

б) точка не имеет движения относительно подвижной системы отсчета или относительная скорость \vec{v}_r точки в данный момент времени равна нулю ($\vec{v}_r = 0$).

Пример 14. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z . По поверхности его движется точка M (рис. 52). Конечно, скорость этого движения точки – относительная скорость \vec{v}_r , а скорость вращения тела – угловая скорость переносного движения $\vec{\omega}_e$.

Ускорение Кориолиса $\vec{W}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, направлено перпендикулярно этим двум векторам, по правилу направления вектора векторного произведения. Так, как показано на рис. 52.

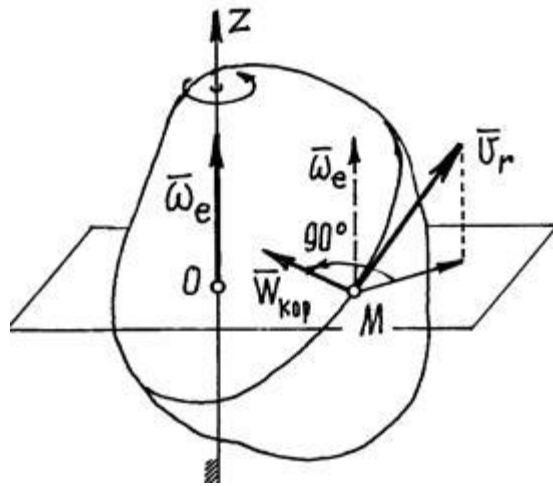


Рис.52

Нетрудно сформулировать более удобное правило определения направления вектора \vec{a}_c : нужно спроектировать вектор относительной скорости \vec{v}_r на плоскость перпендикулярную оси переносного вращения и затем повернуть эту проекцию на 90 градусов в плоскости по направлению переносного вращения. Конечное положение проекции вектора \vec{v}_r укажет направление кориолисова ускорения. (Это правило было предложено Н.Е. Жуковским).

Пример 15. (Вернемся к примеру 13). Найдем абсолютное ускорение колечка М:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c. \quad (6)$$

Переносное ускорение при движении колечка по окружности радиусом $OM = s$: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^r$, где $a_e^r = s\varepsilon_e = s \cdot \ddot{\varphi} = 0$.

Значит $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n$ (рис.53).

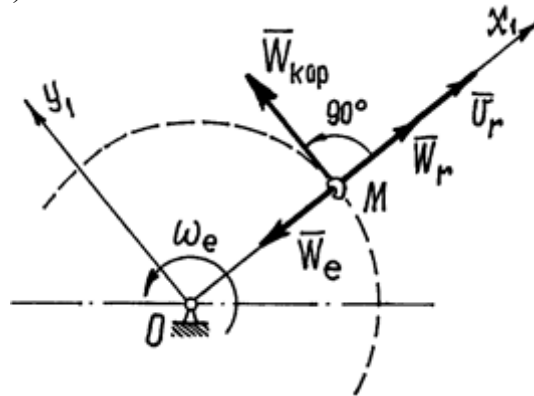


Рис.53

Относительное ускорение $W_r = \ddot{s} = 6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Ускорение Кориолиса $a_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 6t = 24t \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Вектор \vec{a}_c направлен перпендикулярно стержню в сторону вращения (по правилу Жуковского).

Величину абсолютного ускорения колечка М найдем с помощью проекций на подвижные оси x_1 и y_1 проецируя равенство (6) на оси, получим:

$$a_{x_1} = a_r - a_e = 6 - 12t^{-2} = 6(1 - 2t^{-2}), \quad a_{y_1} = a_c = 24t.$$

$$\text{Тогда } a_M = \sqrt{(a_{x_1})^2 + (a_{y_1})^2} = 6\sqrt{(1 - 2t^{-2})^2 + 16t^2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Сложное движение твердого тела.

Так же как при сложном движении точки нередко и движение тела можно рассматривать как сумму нескольких движений. Например, состоящее из двух поступательных движений или поступательного движения и вращения в округ оси. Часто встречаются движения, состоящие из двух вращений вокруг осей или поступательного движения и вращения вокруг точки. Исследование движения точек принадлежащих телу, совершающему сложное движение, можно проводить методами, изложенными выше и никаких особых трудностей не вызывает. Но анализ сложного движения тела, состоящего из нескольких вращений, обнаруживает некоторые особенности, которые следует рассмотреть специально.

1. Сложение вращений тела вокруг двух осей

На рис. 54 изображено тело, которое совершает сложное движение – вращение вокруг оси, которая сама вращается вокруг другой, неподвижной оси. Естественно, первое вращение следует назвать относительным движением тела, второе – переносным, а соответствующие оси обозначить z_r и z_e .

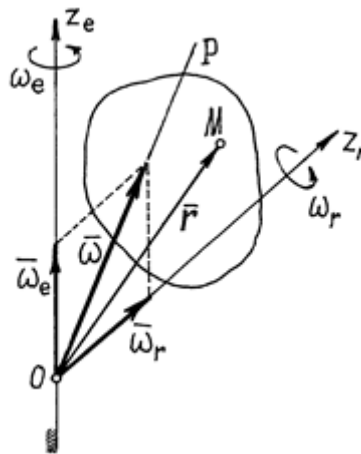


Рис.54

Абсолютным движением будет вращение вокруг точки пересечения осей O . (Если тело имеет большой размер, то его точка, совпадающая с O , все время будет неподвижной). Угловые скорости переносного вращения и относительного вращения изображаются векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$, отложенными из неподвижной точки O , точки пересечения осей, по соответствующим осям.

Найдем абсолютную скорость какой-нибудь точки M тела, положение которой определяется радиусом-вектором \vec{r} (рис.54).

Как известно, она складывается из двух скоростей, относительной и переносной: $\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Но относительное движение точки (используя правило остановки), есть вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ вокруг оси z_r , определяется радиусом-вектором \vec{r} . Поэтому, $\vec{v}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{r}$.

Переносное движение точки в данный момент времени, опять используя правило остановки, тоже есть вращение, но вокруг оси z_e с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$ и будет определяться тем же радиусом-вектором \vec{r} . Поэтому и переносная скорость $\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}$.

Абсолютная же скорость, скорость при вращении вокруг неподвижной точки O , при сферическом движении, определяется аналогично $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}$ - абсолютная угловая скорость, направленная по мгновенной оси вращения P .

формуле сложения скоростей получим:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_r \times \vec{r} \quad \text{или}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{r}$$

Отсюда $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$

То есть мгновенная угловая скорость, угловая скорость абсолютного движения, есть векторная сумма угловых скоростей переносного и относительного движений. А мгновенная ось вращения P , направленная по вектору $\vec{\omega}$, совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$ (рис.54).

Частные случаи:

1. Оси вращения Z_e и Z_r параллельны, направления вращений одинаковы (рис. 55).

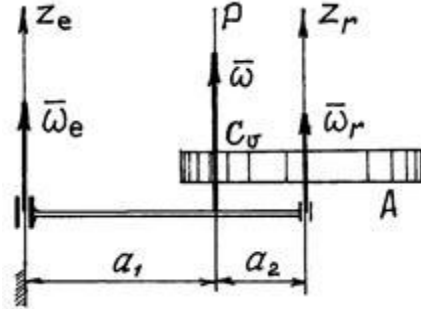


Рис.55

Так как векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$ параллельны и направлены в одну сторону, то абсолютная угловая скорость по величине равна сумме их модулей $\omega = \omega_e + \omega_r$ и вектор ее направлен в ту же сторону. Мгновенная ось вращения P делит расстояние между осями на части обратно пропорциональные ω_e и ω_r :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

(Аналогично равнодействующей параллельных сил).

В этом частном случае тело A совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей C_v находится на оси P .

2. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны (рис.56).

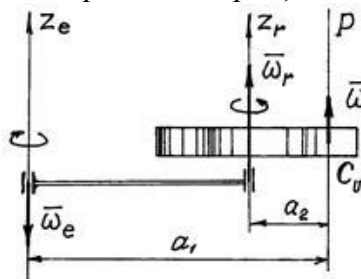


Рис.56

В этом случае $\omega = \omega_r - \omega_e$ (при $\omega_r > \omega_e$). Мгновенная ось вращения и мгновенный центр скоростей находятся за вектором большей угловой скорости на расстояниях та-

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

ких, что $\omega_r > \omega_e$ (опять по аналогии определения равнодействующей параллельных сил).

3. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны и угловые скорости равны.

Угловая скорость абсолютного движения $\omega = 0$ и, следовательно, тело совершает поступательное движение. Этот случай называется *парой вращений*, по

аналогии с парой сил.

Пример 16. Диск радиусом R вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω_1 , а эта ось вместе с рамкой вращается вокруг вертикальной неподвижной оси с угловой скоростью ω_2 (рис.57).

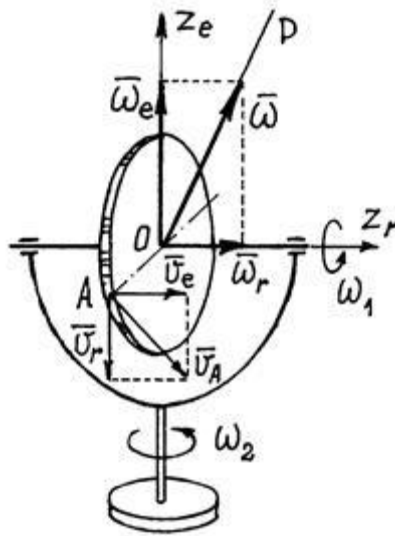


Рис.57

Горизонтальная ось – это ось относительного вращения z_r ; вертикальная ось – ось переносного вращения z_e . Соответственно угловые скорости $\omega_r = \omega_1$, $\omega_e = \omega_2$, векторы их направлены по осям z_r и z_e .

Абсолютная угловая скорость $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$, а величина ее, так как $\vec{\omega}_e \perp \vec{\omega}_r$,

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Скорость точки A , например, можно найти или как сумму переносной и относительной скоростей: $\vec{v}_A = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, где $v_e = R\omega_e = R\omega_2$,

$$v_r = R\omega_r = R\omega_1 \text{ и } v_A = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = R\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2},$$

или как при абсолютном движении, при вращении вокруг мгновенной оси P , $v_A = R\omega = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

Вектор скорости \vec{v}_A будет расположен в плоскости перпендикулярной вектору $\vec{\omega}$ и оси P .

Пример 17. Водило OA с укрепленными на нем двумя колесами 2 и 3 вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_0 . Колесо 2 при этом будет обкатываться по неподвижному колесу 1 и заставит вращаться колесо 3. Найдём угловую скорость ω_3 , этого колеса. Радиусы колес R_1, R_2, R_3 (рис. 58).

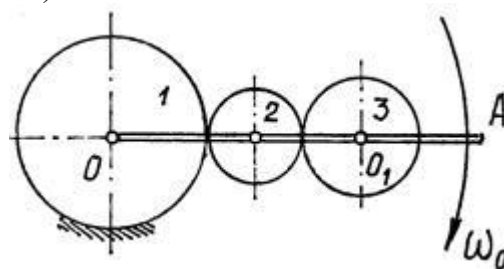


Рис.58

Колесо 3 участвует в двух движениях. Вращаться вместе с водилом вокруг оси O относительно оси O_1 . Ось O будет переносной осью, ось O_1 – относительной. Переносная угловая скорость колеса 3 – это угловая скорость водила $\omega_e = \omega_0$, направленная по часовой стрелке, как ω_0 .

Чтобы определить угловую скорость относительного движения, наблюдателю нужно находиться на водиле. Он увидит водило неподвижным, колесо 1 вращающимся против часовой стрелки со скоростью ω_0 (рис. 59), а колесо 3 – вращающимся с относительной угловой скоростью ω_r , против часовой стрелки. Так

как $\frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$; $\frac{\omega_r}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$, то $\omega_r = \frac{R_1}{R_3} \omega_0$. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны. Поэтому

$\omega_3 = \omega_r - \omega_e = \left(\frac{R_1}{R_3} - 1\right) \omega_0$ и направлена так же как ω_r , против часовой стрелки. В частности, если $R_3 = R_1$, то $\omega_r = \omega_e$ и $\omega_3 = 0$. Колесо 3 будет двигаться поступательно.

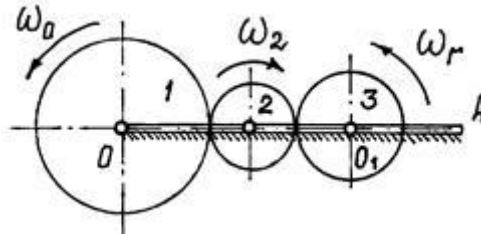


Рис.59

Исследование движения других подобных конструкций (планетарных и дифференциальных редукторов, передач) ведется аналогичным способом.

Переносной угловой скоростью является угловая скорость водила (рамки, крестовины и т.п.), а чтобы определить относительную скорость какого-либо колеса, нужно водило остановить, а неподвижное колесо заставить вращаться с угловой скоростью водила, но в противоположную сторону.

Угловые ускорения тела в абсолютном движении можно искать как производную

нужно $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, где $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$. Покажем (рис.60) единичные векторы \vec{k}_e и \vec{k}_r (орты осей z_e и z_r), а векторы угловых скоростей запишем так: $\vec{\omega}_e = \omega_e \cdot \vec{k}_e$, $\vec{\omega}_r = \omega_r \cdot \vec{k}_r$.

Тогда $\vec{\omega} = \omega_e \vec{k}_e + \omega_r \vec{k}_r$ и угловое ускорение, при $\vec{k}_e = \text{const}$,

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_e}{dt} \cdot \vec{k}_e + \frac{d\omega_r}{dt} \cdot \vec{k}_r + \omega_r \cdot \frac{d\vec{k}_r}{dt}$$

Здесь $\frac{d\omega_e}{dt} = \epsilon_e$, $\frac{d\omega_r}{dt} = \epsilon_r$ и $\frac{d\vec{k}_r}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_r$.

Поэтому $\vec{\epsilon} = \epsilon_e \vec{k}_e + \epsilon_r \vec{k}_r + \omega_r (\vec{\omega}_e \times \vec{k}_r)$ или $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_e + \vec{\epsilon}_r + \vec{\epsilon}_*$, и $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_e + \vec{\epsilon}_r + \vec{\epsilon}_*$,

где $\vec{\epsilon}_e$ – угловое ускорение переносного вращения; $\vec{\epsilon}_r$ – угловое ускорение относительного вращения; $\vec{\epsilon}_* = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$ – добавочное угловое ускорение, которое определяет изменение относительной угловой скорости $\vec{\omega}_r$ при переносном движении

нии. Направлен этот вектор перпендикулярно осям z_e и z_r , как скорость конца вектора $\vec{\omega}_r$. Модуль добавочного углового ускорения $\varepsilon_* = \omega_e \cdot \omega_r \sin \alpha$, где α - угол между осями.

Конечно, если оси вращения параллельны, это угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_*$ будет равно нулю, так как $\alpha = 0$.

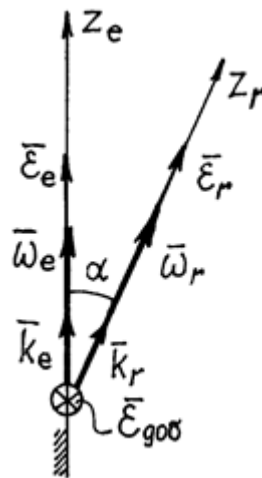


Рис.60

2. Общий случай движения тела

Произвольное движение тела – это общий случай движения. Его можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного вместе с произвольно выбранным полюсом C и вращения вокруг этого полюса. Первое движение определяется уравнениями движения полюса, точки C :

$$x_C = x_C(t),$$

$$y_C = y_C(t),$$

$$z_C = z_C(t).$$

А второе движение – уравнениями вращения вокруг точки C с помощью углов Эйлера:

$$\psi = \psi(t),$$

$$\theta = \theta(t),$$

$$\varphi = \varphi(t).$$

Скорости и ускорения точек тела в общем случае, при произвольном движении, определяются такими же методами, как при сложном движении точки (см. раздел выше).

3. Цилиндрические зубчатые передачи.

Рассмотрим основные виды этих передач.

1. Рядовой назовем передачу, в которой все оси колес, находящихся в последовательном зацеплении, неподвижны. При этом одно из колес (например, колесо 1 на рис.61) является ведущим, а остальные ведомыми.

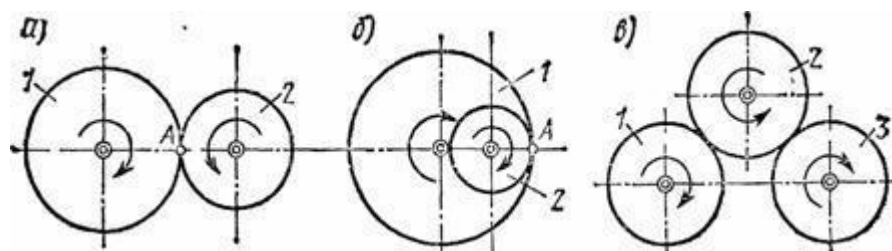


Рис.61

В случае внешнего (рис. 61, а) или внутреннего (рис. 61, б) зацепления двух колес имеем $|\omega_1 r_1| = |\omega_2 r_2|$, так как скорость точки сцепления A у обоих колес одинакова. Учитывая, что число зубцов сцепленных колес пропорционально их радиусам, а вращения колес происходят при внутреннем зацеплении в одну сторону, а при внешнем в разные, получаем

$$(\omega_1 / \omega_2)_{\text{внеш}} = -r_2 / r_1 = -z_2 / z_1; \quad (\omega_1 / \omega_2)_{\text{внут}} = r_2 / r_1 = z_2 / z_1.$$

При внешнем зацеплении трех колес (рис. 61, в) найдем, что

$$\omega_1 / \omega_2 = -r_2 / r_1, \quad \omega_2 / \omega_3 = -r_3 / r_2 \quad \text{и} \quad \omega_1 / \omega_3 = r_3 / r_1 = z_3 / z_1.$$

Следовательно, отношение угловых скоростей крайних шестерен в этой передаче обратно пропорционально их радиусам (числу зубцов) и не зависит от радиусов промежуточных (паразитных) шестерен.

Из полученных результатов следует, что при рядовом сцеплении шестерен

$$\omega_1 / \omega_n = (-1)^k r_n / r_1 = (-1)^k z_n / z_1.$$

где k - число внешних зацеплений (в случае, изображенном на рис.61,а имеется одно внешнее зацепление; на рис.61, в - два внешних зацепления, на рис.61, б внешних зацеплений нет).

Передачным числом данной зубчатой передачи называется величина i_{1n} , дающая отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого:

$$i_{1n} = \omega_1 / \omega_n.$$

2. Планетарной называется передача (рис.62), в которой шестерня 1 неподвижна, а оси остальных шестерен, находящихся в последовательном зацеплении, укреплены на кривошипе AB , вращающемся вокруг оси неподвижной шестерни.

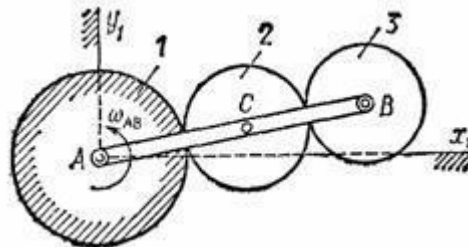


Рис.62

3. Дифференциальной называется передача, изображенная на рис. 62, если в ней шестерня 1 не является неподвижной и может вращаться вокруг своей оси A независимо от кривошипа AB .

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно производить, сообщив мысленно всей неподвижной плоскости Ax_1y_1 вращение с угловой скоростью $-\omega_{AB}$, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа AB (метод остановки или метод Виллиса).

Тогда кривошип в этом сложном движении будет неподвижен, а любая шестерня радиуса r^k будет иметь угловую скорость

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB},$$

где ω_k - абсолютная угловая скорость этой шестерни по отношению к осям Ax_1y_1 (рис.62). При этом оси всех шестерен будут неподвижны и зависимость между $\tilde{\omega}_k$ можно будет определить, приравняв скорости точек сцепления.

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно также производить с помощью мгновенных центров скоростей.

4. Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение.

Если сложное движение тела складывается из вращательного вокруг оси Aa с угловой скоростью $\bar{\omega}$ и поступательного со скоростью \bar{v} , направленной параллельно оси Aa (рис.63), то такое движение тела называется винтовым. Ось Aa называют осью винта. Когда векторы \bar{v} и $\bar{\omega}$ направлены в одну сторону, то при принятом нами правиле изображения $\bar{\omega}$ винт будет правым; если в разные стороны, - левым.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется шагом h винта. Если величины \bar{v} и $\bar{\omega}$ постоянны, то шаг винта также будет постоянным. Обозначая время одного оборота через T , получаем в этом случае $vT = h$ и $\omega T = 2\pi$, откуда $h = 2\pi v / \omega$.

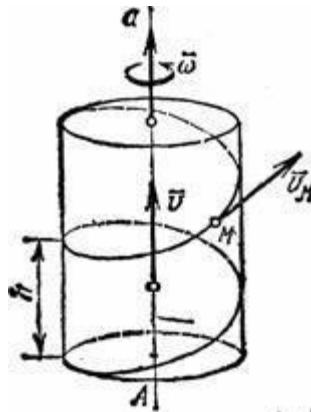


Рис.63

При постоянном шаге любая точка M тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию. Скорость точки M , находящейся от оси винта на расстоянии r , складывается из поступательной скорости \bar{v} и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном движении, которая численно равна ωr . Следовательно,

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}$$

Направлена скорость \bar{v}_M по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка M , разрезать вдоль образующей и развернуть, то винтовые линии, обратятся в прямые, наклоненные к основанию цилиндра под углом α ($\operatorname{tg} \alpha = h / 2\pi r$).

ДИНАМИКА

Лекция 1. Динамика точки.

Динамика точки. Основные понятия и определения.

В разделе кинематики исследовалось движение тел без учета причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В разделе динамики решается более сложная и важная задача. Определяется движение тела под действием сил приложенных к нему, с учетом внешних и внутренних условий, влияющих на это движение, включая самих материальных тел.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Понятие о силе, как о величине, характеризующей меру механического взаимодей-

ствия материальных тел, было введено в статике. Но при этом в статике мы, по существу, считали все силы постоянными. Между тем, на движущееся тело наряду с постоянными силами (постоянной, например, можно считать силу тяжести) действуют обычно силы переменные, модули и направления которых при движении тела изменяются.

Как показывает опыт, переменные силы могут определенным образом зависеть *от времени, от положения тела и от его скорости*. В частности, от времени зависит сила тяги электровоза при постепенном выключении или включении реостата; от положения тела зависит сила упругости пружины; от скорости движения зависят силы сопротивления среды (воды, воздуха).

К понятию об инертности тел мы приходим, сравнивая результаты действия одной и той же силы на разные материальные тела. Опыт показывает, что если одну и ту же силу приложить к двум разным, свободным от других воздействий покоящимся телам, то в общем случае по истечении одного и того же промежутка времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости.

Инертность и представляет собой *свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил*. Если, например, при действии одинаковых сил изменение скорости первого тела происходит медленнее, чем второго, то говорят, что первое тело является более инертным, и наоборот.

Количественной мерой инертности данного тела является физическая величина, называемая массой тела. В механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

В общем случае движение тела зависит не только от его суммарной массы и приложенных сил; характер движения может еще зависеть от формы тела, точнее от взаимного расположения образующих его частиц (т. е. от распределения масс).

Чтобы при первоначальном изучении динамики иметь возможность отвлечься от учета влияния формы тел (распределения масс), вводится понятие о материальной точке.

Материальной точкой называют материальное тело (тело, имеющее массу), размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

Практически данное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда расстояния, проходимые точками тела при его движении, очень велики по сравнению с размерами самого тела. Кроме того, как будет показано в динамике системы *поступательно* движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Наконец, материальными точками можно считать частицы, на которые мы будем мысленно разбивать любое тело при определении тех или иных его динамических характеристик.

Точку будем называть *изолированной*, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

Законы динамики

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверенные обширной общественно-исторической практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном.

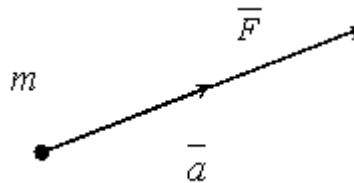
Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем, гласит: *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерно-прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние*. Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением

ем по инерции.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи - пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояний покоя и движения по инерции. Из него следует, что если $F=0$, то точка покоится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью ($\vec{v} = \text{const}$); ускорение точки при этом равно нулю: $\vec{a} = 0$); если же движение точки не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной системой отсчета* (иногда ее условно называют неподвижной). По данным опыта для нашей Солнечной системы инерциальной является система отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые неподвижные звезды. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Второй закон (основной закон динамики) гласит: *произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*



Математически этот закон выражается векторным равенством $m\vec{a} = \vec{F}$.

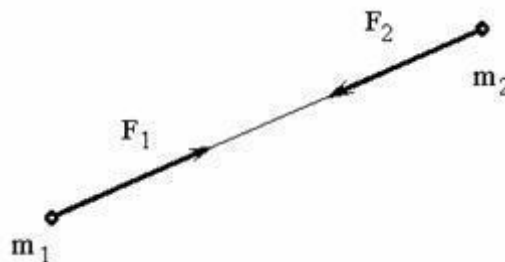
При этом между модулями ускорения и силы имеет место зависимость $ma = F$.

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчета. Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса, так как две разные точки при действии одной и той же силы получают одинаковые ускорения только тогда, когда будут равны их массы; если же массы будут разные, то точка, масса которой больше (т. е. более инертная), получит меньшее ускорение, и наоборот.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они, как известно, будут эквивалентны одной силе, т.е. равнодействующей \vec{R} , равной геометрической сумме этих сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$$m\vec{a} = \vec{R} \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \sum \vec{F}_K.$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*



Заметим, что силы взаимодействия между свободными материальными точками (или телами), как приложенные к разным объектам, не образуют уравновешенной системы.

Проведём небольшой эксперимент. Попробуем перемещать тяжёлое тело по некото-

рой криволинейной траектории. Сразу обнаружим, что тело сопротивляется изменению направления движения, изменению скорости. Возникает сила со стороны тела, противодействующая силе \vec{F} , той, которую мы прикладываем к нему.

Эту силу, с которой материальная точка сопротивляется изменению своего движения, будем называть *силой инерции* этой точки - $\vec{F}^{\text{ин}}$. По третьему закону она равна и противоположна действующей на точку силе \vec{F} , $\vec{F}^{\text{ин}} = -\vec{F}$. Но на основании второй аксиомы $\vec{F} = m\vec{a}$. Поэтому $\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{a}$.

Итак, сила инерции материальной точки по величине равна произведению её массы на ускорение

$$F^{\text{ин}} = ma.$$

И направлена эта сила инерции в сторону противоположную вектору ускорения.

Например, при движении точки по кривой линии ускорение $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Поэтому сила инерции

$$\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{a} = -m\vec{a}_n - m\vec{a}_\tau = \vec{F}_n^{\text{ин}} + \vec{F}_\tau^{\text{ин}}.$$

То есть её можно находить как сумму двух сил: нормальной силы инерции и касательной силы инерции.

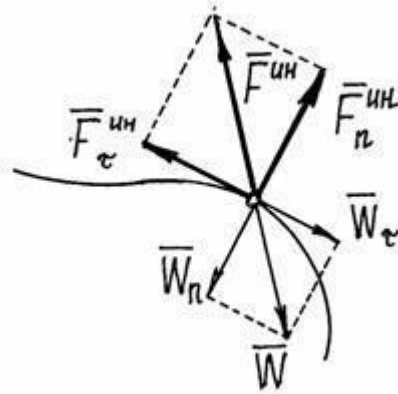


Рис.1

Причём

$$F_n^{\text{ин}} = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_\tau^{\text{ин}} = m \frac{dv}{dt}.$$

Необходимо заметить, что сила инерции материальной точки, как сила противодействия, приложена не к точке, а к тому телу, которое изменяет её движение. Это очень важно помнить.

Третий закон динамики, как устанавливающий характер взаимодействия материальных частиц, играет большую роль в динамике системы.

Четвертый закон (закон независимого действия сил). При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

$$m \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i, \quad \vec{a} = \sum_i \vec{a}_i$$

Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки.

Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие: 1) зная закон движения точки, определить действующую на нее силу (*первая задача динамики*); 2)

зная действующие на точку силы, определить закон движения точки (*вторая или основная задача динамики*).

Решаются обе эти задачи с помощью уравнений, выражающих основной закон динамики, так как эти уравнения связывают ускорение \vec{a} т.е. величину, характеризующую движение точки, и действующие на нее силы.

В технике часто приходится сталкиваться с изучением *несвободного* движения точки, т.е. со случаями, когда точка, благодаря наложенным на нее связям, вынуждена двигаться по заданной неподвижной поверхности или кривой.

Несвободной материальной точкой называется точка, свобода движения которой ограничена.

Тела, ограничивающие свободу движения точки, называются *связями*.

Пусть связь представляет собой поверхность какого-либо тела, по которой движется точка. Тогда координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, которое называется уравнением связи.

$$f(x, y, z) = 0$$

Если точка вынуждена двигаться по некоторой линии, то уравнениями связи являются уравнения этой линии.

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0$$

Таким образом, движение несвободной материальной точки зависит не только от приложенных к ней активных сил и начальных условий, но так же от имеющихся связей. При этом значения начальных параметров должны удовлетворять уравнениям связей.

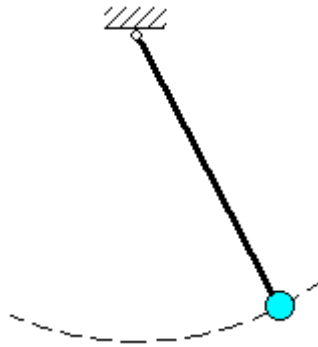
Связи бывают двухсторонние или удерживающие и односторонние или неудерживающие.

Связь называется двухсторонней если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме равенств, определяющих кривые или поверхности в пространстве на которых должна находиться точка.

Пример. Материальная точка подвешена на стержне длины l .

Уравнение связи имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

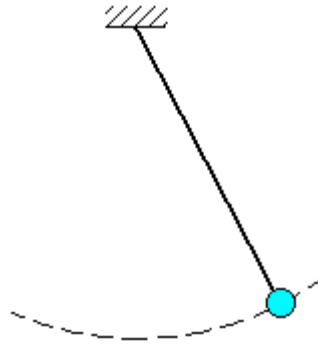


Связь называется односторонней если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме неравенств. Односторонняя связь препятствует перемещению точки лишь в одном направлении и допускает ее перемещение в других направлениях.

Пример. Материальная точка подвешена на нити длины l .

Уравнение связи имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$$



В случаях несвободного движения точки, как и в статике, будем при решении задач исходить из *аксиомы связей (принцип освобожденности от связей)*, согласно которой *всякую несвободную материальную точку можно рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее действие реакцией этой связи \vec{N}* . Тогда основной закон динамики для несвободного движения точки примет вид:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k^a + \vec{N},$$

где \vec{F}_k^a - действующие на точку активные силы.

Пусть на точку действует несколько сил. Составим для неё основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$. Перенесём все члены в одну сторону уравнения и запишем так: $\sum \vec{F}_i - m\vec{a} = 0$ или $\sum \vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{ин}} = 0$.

Это уравнение напоминает условие равновесия сходящихся сил. Поэтому можно сделать вывод, что, если к движущейся материальной точке приложить её силу инерции, то точка будет находиться в равновесии. (Вспомним, что на самом деле сила инерции не приложена к материальной точке и точка не находится в равновесии.) Отсюда следует метод решения таких задач, который называется методом кинестатики:

Если к силам, действующим на точку, добавить её силу инерции, то задачу можно решать методами статики, составлением уравнений равновесия.

Первая задача динамики для несвободного движения будет обычно сводиться к тому, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи.

Пример 1. При движении автомобиля с постоянным ускорением \vec{a} , маятник (материальная точка подвешенная на нити) отклоняется от вертикали на угол α (рис.2). Определим с каким ускорением движется автомобиль и натяжение нити.

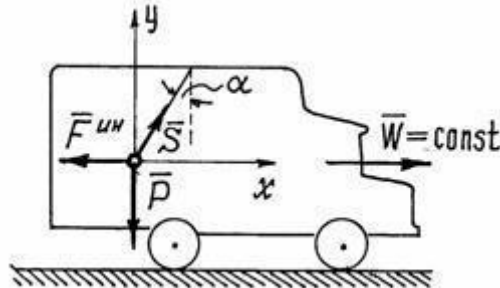


Рис.2

Рассмотрим «динамическое равновесие» точки. Его так называют потому, что на самом деле точка не находится в равновесии, она движется с ускорением.

На точку действуют силы: вес \vec{P} и натяжение нити \vec{S}_i , реакция нити. Приложим к

точке ее силу инерции $F^{ин} = ma = \frac{P}{g} a$, направленную в сторону противоположную ускорению точки и автомобиля, и составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad -F^{ин} + S \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S \cos \alpha - P = 0.$$

Из второго уравнения следует $S = \frac{P}{\cos \alpha}$.

Из первого $-\frac{P}{g} a + S \sin \alpha = 0$ и $W = \frac{g}{P} S \sin \alpha = \frac{g}{P} \frac{P}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = g \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Пример 2. Лифт весом P (рис.3) начинает подниматься с ускорением a . Определить натяжение троса.

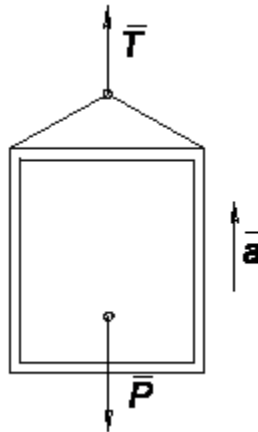


Рис. 3

Рассматривая лифт как свободный, заменяем действие связи (троса) реакцией T и, составляя уравнение $m\bar{a} = \sum F_k^a + \bar{N}$ в проекции на вертикаль, получаем:

$$\frac{P}{g} a = T - P$$

$$T = P \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

Отсюда находим:

Если лифт начнёт опускаться с таким же ускорением, то натяжение троса будет равно:

$$T = P \left(1 - \frac{a}{g} \right)$$

Дифференциальные уравнения движения точки

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

1) *Определение движения точки координатным способом.*

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Проведем неподвижные координатные оси $Oxuz$ (рис.4). Проектируя обе ча-

сти равенства $m\bar{a} = \sum \vec{F}_k$ на эти оси и учитывая, что $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$ и т.д., получим дифференциальные уравнения криволинейного движения точки в проекциях на оси прямоугольной де-

картовой системы координат:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz}$$

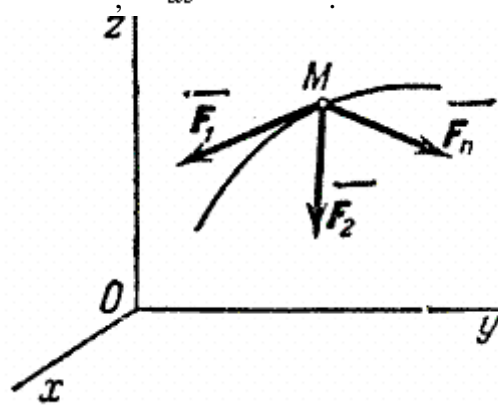


Рис.4

Так как действующие на точку силы могут зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости, то правые части уравнений могут содержать время t , координаты точки x ,

y , z и проекции ее скорости $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. При этом в правую часть каждого из уравнений могут входить все эти переменные.

Чтобы с помощью этих уравнений решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще начальные условия, т.е. положение и скорость точки в начальный момент. В координатных осях $Oxyz$ начальные условия задаются в виде: при $t = 0$

$$\begin{cases} x = x_0, & y = y_0, & z = z_0 \\ v_x = v_{x0}, & v_y = v_{y0}, & v_z = v_{z0} \end{cases}$$

Зная действующие силы, после интегрирования уравнений найдем координаты x , y , z движущейся точки, как функции времени t , т.е. найдем закон движения точки.

Пример 3. Изучим движение тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, рассматривая его как материальную точку массы m . При этом сопротивлением воздуха пренебрежём, а поле тяжести будем считать однородным ($P = \text{const}$), полагая, что дальность полёта и высота траектории малы по сравнению с радиусом Земли.

Поместим начало координат O в начальном положении точки. Направим ось Oy вертикально вверх; горизонтальную ось Ox расположим в плоскости, проходящей через Oy и вектор V_0 , а ось Oz проведём перпендикулярно первым двум осям (рис.5). Тогда угол между вектором V_0 и осью Ox будет равен α .

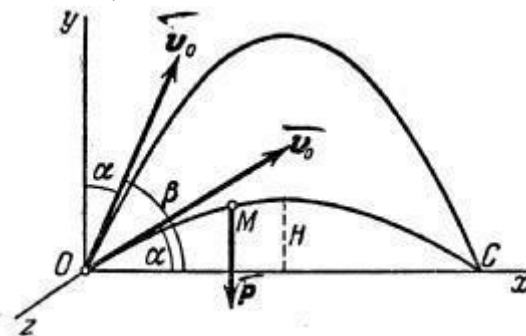


Рис.5

Изобразим движущуюся точку M где-нибудь на траектории. На точку действует одна

только сила тяжести \vec{P} , проекции которой на оси координат равны: $P_x = 0$, $P_y = -P = -mg$, $P_z = 0$.

Подставляя эти величины в дифференциальные уравнения и замечая, что $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt}$ и т.д. мы после сокращения на m получим:

$$\frac{dV_x}{dt} = 0, \quad \frac{dV_y}{dt} = 0, \quad \frac{dV_z}{dt} = 0.$$

Умножая обе части этих уравнений на dt и интегрируя, находим:

$$V_x = C_1, \quad V_y = -dt + C_2, \quad V_z = C_3$$

Начальные условия в нашей задаче имеют вид:

при $t=0$:

$$x = 0, \quad V_x = V_0 \cos \alpha$$

$$y = 0, \quad V_y = V_0 \sin \alpha$$

$$z = 0, \quad V_z = 0.$$

Удовлетворяя начальным условиям, будем иметь:

$$C_1 = V_0 \cos \alpha, \quad C_2 = V_0 \sin \alpha, \quad C_3 = 0.$$

Подставляя эти значения C_1 , C_2 и C_3 в найденное выше решение и замечая V_x, V_y, V_z на $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, придём к уравнениям:

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = V_0 \sin \alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$x = V_0 t \cos \alpha + C_4, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + C_5, \quad z = 0.$$

Подстановка начальных данных даёт $C_4=C_5=C_6=0$, и мы окончательно находим уравнения движения точки M в виде:

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0 \quad (1)$$

Из последнего уравнения следует, что движение происходит в плоскости Oxy .

Имея уравнение движения точки, можно методами кинематики определить все характеристики данного движения.

1. Траектория точки. Исключая из первых двух уравнений (1) время t , получим уравнение траектории точки:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

Это - уравнение параболы с осью, параллельной оси Oy . Таким образом, брошенная под углом к горизонту тяжёлая точка движется в безвоздушном пространстве по параболе (Галилей).

2. Горизонтальная дальность. Определим горизонтальную дальность, т.е. измеренное вдоль оси Ox расстояние $OC=X$. Полагая в равенстве (2) $y=0$, найдём точки пересечения траектории с осью Ox . Из уравнения:

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2V_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g}$$

получаем

Первое решение дает точку O , второе точку C . Следовательно, $X=X_2$ и окончательно

$$X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (3)$$

Из формулы (3) видно, что такая же горизонтальная дальность X будет получена при угле β , для которого $2\beta = 180^\circ - 2\alpha$, т.е. если угол $\beta = 90^\circ - \alpha$. Следовательно, при данной начальной скорости V_0 в одну и ту же точку C можно попасть двумя траекториями: настильной ($\alpha < 45^\circ$) и навесной ($\beta = 90^\circ - \alpha > 45^\circ$).

При заданной начальной скорости V_0 наибольшая горизонтальная дальность в безвоздушном пространстве получается, когда $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при угле $\alpha = 45^\circ$.

3. Высота траектории. Если положить в уравнении (2)

$$x = \frac{1}{2} X = \frac{V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha, \quad \text{то найдется высота траектории } H:$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (4)$$

4. Время полета. Из первого уравнения системы (1) следует, что полное время полета T определяется равенством $X = V_0 T \cos \alpha$. Заменяя здесь X его значением, получим

$$T = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha$$

При угле наибольшей дальности $\alpha = 45^\circ$ все найденные величины равны:

$$x^* = \frac{V_0^2}{g}, \quad H^* = \frac{V_0^2}{4g} = \frac{1}{4} x^*, \quad T^* = \frac{V_0}{g} \sqrt{2}.$$

Полученные результаты практически вполне приложимы для ориентировочного определения характеристик полета снарядов (ракет), имеющих дальности порядка 200...600 км, так как при этих дальностях (и при $\alpha \approx 45^\circ$) снаряд основную часть своего пути проходит в стратосфере, где сопротивлением воздуха можно пренебречь. При меньших дальностях на результат будет сильно влиять сопротивление воздуха, а при дальностях свыше 600 км силу тяжести уже нельзя считать постоянной.

Пример 4. Из пушки, установленной на высоте h , произвели выстрел под углом α к горизонту (рис. 6). Ядро вылетело из ствола орудия со скоростью u . Определим уравнения движения ядра.

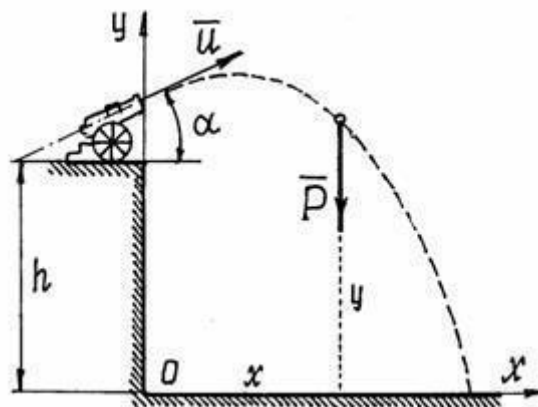


Рис.6

Чтобы правильно составить дифференциальные уравнения движения, надо решать подобные задачи по определённой схеме.

а) Назначить систему координат (количество осей, их направление и начало координат). Удачно выбранные оси упрощают решение.

б) Показать точку в промежуточном положении. При этом надо проследить за тем, чтобы координаты такого положения обязательно были положительными (рис.6).

в) Показать силы, действующие на точку в этом промежуточном положении (силы инерции не показывать!).

В этом примере – это только сила \vec{F} , вес ядра. Сопротивление воздуха учитывать не будем.

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = 0, \quad \frac{P}{g} \ddot{y} = -P$$

г) Составить дифференциальные уравнения по формулам: $\ddot{x} = 0$ и $\ddot{y} = -g$. Отсюда получим два уравнения: $\ddot{x} = 0$ и $\ddot{y} = -g$.

д) Решить дифференциальные уравнения.

Полученные здесь уравнения – линейные уравнения второго порядка, в правой части – постоянные. Решение этих уравнений элементарно.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = -gt + D_1, \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} x = C_1 t + C_2, \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + D_1 t + D_2. \end{array} \right\}$$

Осталось найти постоянные интегрирования. Подставляем начальные условия (при $t = 0$ $x = 0$, $y = h$, $\dot{x} = v_x = u \cos \alpha$, $\dot{y} = v_y = u \sin \alpha$) в эти четыре уравнения: $u \cos \alpha = C_1$, $u \sin \alpha = D_1$, $0 = C_2$, $h = D_2$.

Подставляем в уравнения значения постоянных и записываем уравнения движения точки в окончательном виде

$$\left. \begin{array}{l} x = ut \cos \alpha, \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + ut \sin \alpha + h. \end{array} \right\}$$

Имея эти уравнения, как известно из раздела кинематики, можно определить и траекторию движения ядра, и скорость, и ускорение, и положение ядра в любой момент времени.

Как видно из этого примера, схема решения задач довольно проста. Сложности могут возникнуть только при решении дифференциальных уравнений, которые могут оказаться непростыми.

2) Определение движения точки естественным способом.

Координатным способом обычно определяют движение точки, не ограниченные какими-либо условиями, связями. Если на движение точки наложены ограничения, на скорость или координаты, то определить такое движение координатным способом совсем не просто. Удобнее использовать естественный способ задания движения.

Определим, например, движение точки по заданной неподвижной линии, по заданной траектории (рис. 7).

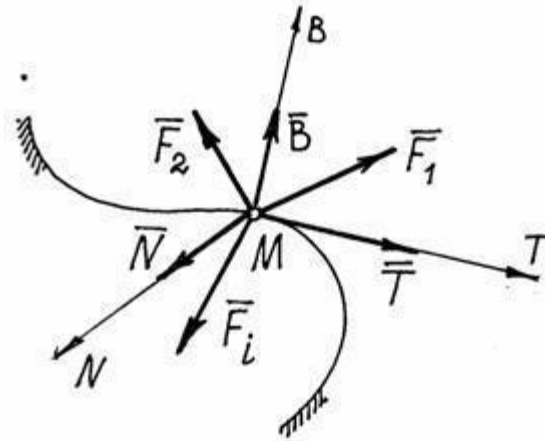


Рис.7

На точку M кроме заданных активных сил \vec{F}_i , действует реакция линии. Показываем составляющие реакции \vec{R} по естественным осям $\vec{N}, \vec{T}, \vec{B}$.

Составим основное уравнение динамики $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B}$ и спроектируем его на естественные оси

$$\left. \begin{aligned} ma_n &= \sum F_{in} + N, \\ ma_\tau &= \sum F_{i\tau} + T, \\ ma_B &= \sum F_{iB} + B. \end{aligned} \right\}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}, \quad a_B = 0,$$

Так как то получим дифференциальные уравнения движения, такие

$$\left. \begin{aligned} m \frac{v^2}{\rho} &= \sum F_{in} + N, \\ m\ddot{s} &= \sum F_{i\tau} + T, \\ 0 &= \sum F_{iB} + B. \end{aligned} \right\}$$

(5)

Здесь сила \vec{T} - сила трения. Если линия, по которой движется точка, гладкая, то $T = 0$ и тогда второе уравнение будет содержать только одну неизвестную – координату s :

$$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}.$$

Решив это уравнение, получим закон движения точки $s = s(t)$, а значит, при необходимости, и скорость и ускорение. Первое и третье уравнения (5) позволят найти реакции \vec{N} и \vec{B} .

Пример 5. Лыжник спускается по цилиндрической поверхности радиуса r . Определим его движение, пренебрегая сопротивлениями движению (рис. 8).

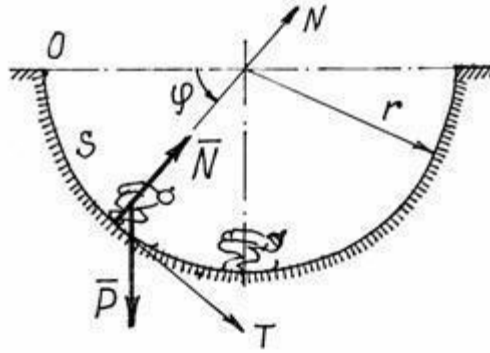


Рис.8

Схема решения задачи та же, что и при координатном способе (пример 4). Отличие лишь в выборе осей. Здесь оси N и T движутся вместе с лыжником. Так как траектория – плоская линия, то ось B , направленную по бинормали, показывать не нужно (проекции на ось B действующих на лыжника сил будут равны нулю).

Дифференциальные уравнения по (5) получим такие

$$\frac{P}{g} \ddot{s} = P \cos \varphi, \quad \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = N - P \sin \varphi \quad (6)$$

Первое уравнение получилось нелинейным: $\ddot{s} = g \cos \varphi$. Так как $s = r\varphi$, то его можно

переписать так: $\ddot{\varphi} - \frac{g}{r} \cos \varphi = 0$. Такое уравнение можно один раз проинтегрировать. Запи-

шем $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$. Тогда в дифференциальном уравнении переменные разде-

лятся: $d\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \cos \varphi \cdot d\varphi$. Интегрирование дает решение $\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \sin \varphi + C_1$. Так как при $t =$

0: $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и $\dot{\varphi} = \sqrt{2 \frac{g}{r} \sin \varphi}$, а $\dot{s} = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr \sin \varphi}$.

К сожалению, в элементарных функциях второй интеграл найти невозможно. Но и полученное решение позволяет сделать некоторые выводы. Можно найти скорость лыжника в любом положении как функцию угла φ . Так в нижнем положении,

при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $v = \dot{s} = \sqrt{2gr}$. А из второго уравнения (6) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ можно определить давле-

ние: $N = P + \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = P + \frac{P}{g} \frac{2gr}{r} = 3P$. То есть давление на лыжника в нижнем положении равно его трехкратному весу.

Пример 6: Точка, имеющая массу m , движется из состояния покоя по окружности радиуса R с постоянным касательным ускорением a_τ . Определить действующую на точку силу в момент, когда она пройдет по траектории расстояние $s_1 = R\sqrt{2}$.

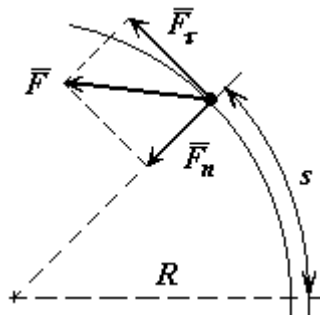


Рис.9

Решение: Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:

$$F_r = m \cdot a_r, \quad F_n = m \cdot \frac{v^2}{R}, \quad F_b = 0;$$

Так как $a_r = \text{const}$, то $v_r = a_r \cdot t$, $s = \frac{a_r \cdot t^2}{2}$

$$F_r = m \cdot a_r, \quad F_n = m \cdot \frac{(a_r \cdot t)^2}{R};$$

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_n^2} = m \cdot a_r \cdot \sqrt{1 + \frac{a_r^2 \cdot t^4}{R^2}}$$

$$s_1 = \frac{a_r \cdot t_1^2}{2} = R\sqrt{2}; \quad \text{следовательно} \quad t_1^2 = \frac{2R\sqrt{2}}{a_r};$$

$$\frac{a_r^2 \cdot t_1^4}{R^2} = a_r^2 \cdot \frac{8 \cdot R^2}{a_r^2 \cdot R^2} = 8; \quad \text{следовательно}$$

$$F(t_1) = m \cdot a_r \cdot \sqrt{1+8} = 3 \cdot m \cdot a_r$$

$$F(t_1) = 3 \cdot m \cdot a_r$$

Относительное движение материальной точки

В предыдущем параграфе показано было как определяется движение точки относительно неподвижной системы отсчета, абсолютное движение. Нередко приходится исследовать движение материальной точки относительно системы, которая сама движется и довольно сложным образом.

Точка M (рис.10) под действием некоторых сил \vec{F}_i совершает сложное движение. Абсолютное определяется координатами x, y, z , относительное – координатами x_1, y_1, z_1 .

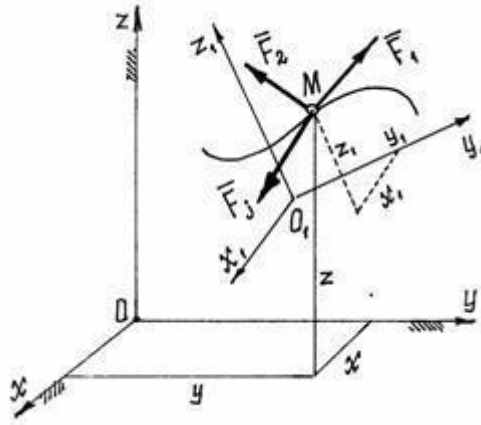


Рис.10

Составим основное уравнение динамики для точки $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$, где абсолютное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$. Поэтому уравнение будет таким $m(\vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c) = \sum \vec{F}_i$ или $m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_i - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$.

Но $(-m\vec{a}_e) = \vec{F}_e^{\text{ин}}$ - переносная сила инерции, $(-m\vec{a}_c) = \vec{F}_c^{\text{ин}}$ - кориолисова сила инерции. Поэтому основное уравнение динамики для относительного движения запишем так

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_e^{\text{ин}} + \vec{F}_c^{\text{ин}} \quad (7)$$

Спроектировав это векторное равенство на подвижные оси x_1, y_1, z_1 , имея в виду, что проекции вектора ускорения на оси – есть вторые производные от соответствующих координат по времени, получим дифференциальные уравнения относительного движения

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \sum X_i + X_e^{\text{ин}} + X_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{y}_1 &= \sum Y_i + Y_e^{\text{ин}} + Y_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{z}_1 &= \sum Z_i + Z_e^{\text{ин}} + Z_c^{\text{ин}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями абсолютного движения, замечаем, что *относительное движение материальной точки определяется такими же методами, что и абсолютное, надо лишь кроме обычных сил учесть переносную силу инерции и кориолисову силу инерции.*

Если переносное движение поступательное, равномерное и прямолинейное, т.е. подвижная система инерциальная, то ускорение $\vec{a}_e = 0$ и $\vec{a}_c = 0$. Значит $\vec{F}_e^{\text{ин}} = 0$, $\vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$ и дифференциальное уравнение (8) будет точно совпадать с дифференциальным уравнением абсолютного движения. Следовательно, движение точки во всех инерциальных системах описывается аналогичными законами (отличаются только постоянными интегрирования, зависящими от начальных условий).

Поэтому невозможно установить, наблюдая за движением точки, движется система поступательно, равномерно и прямолинейно или находится в покое. Этот вывод впервые был сделан Г.Галилеем и называется его именем – *принцип относительности Галилея.*

Пример 7. Вагон движется с постоянным ускорением \vec{a} . Определим траекторию движения предмета M , упавшего с полки высотой h , которую увидит наблюдатель, пассажир, сидящий в вагоне (рис.11).

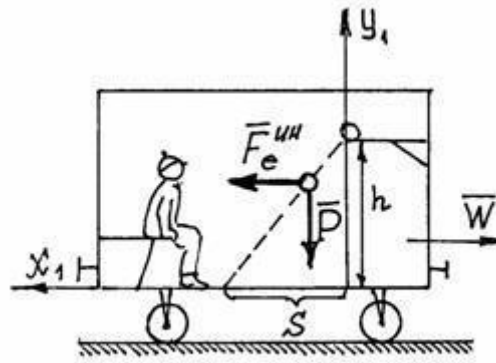


Рис.11

Порядок решения задачи тот же, что и при определении абсолютного движения. Только оси надо провести по вагону и учесть кроме веса предмета \vec{P} переносную силу инер-

ции $F_e^{\text{ин}} = m \cdot a_e = \frac{P}{g} a$ (кориолисова сила инерции $\vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$ – переносное движение поступательное).

Дифференциальные уравнения относительного движения получаются такими

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_1 &= F_e^{\text{ин}}, \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_1 &= -P, \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= a, \\ \ddot{y}_1 &= -g. \end{aligned} \right\}$$

Решение этих уравнений

$$\dot{x}_1 = at + C_1, \quad x_1 = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2,$$

$$\dot{y}_1 = -gt + D_1, \quad y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + D_1t + D_2.$$

Используя начальные условия (при $t = 0$: $x_1 = 0$, $y_1 = h$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = 0$, т.к. $v_y = 0$), найдем постоянные интегрирования: $C_1 = C_2 = D_1 = 0$, $D_2 = h$. Поэтому уравнения движе-

ния: $x_1 = \frac{1}{2}at^2$, $y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2$. Траекторию движения получим, исключив пара-

метр t : $y_1 = h - \frac{g}{a}x_1$. Это уравнение прямой (рис. 11). Предмет M упадет на пол вагона на

расстоянии $s = h \frac{a}{g}$ от края полки (при $y_1 = 0$ $x_1 = s$).

Если вагон будет двигаться равномерно ($W = 0$), то $s = 0$. Наблюдатель увидит траекторию – вертикальную прямую, такую же, как и при неподвижном вагоне.

Пример 8. Внутри трубки, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$ вокруг вертикальной оси, находится шарик M , привязанный нитью длиной a к оси вращения (рис. 12). Определим движение шарика в трубке после того, как нить оборвется. Сопротивление воздуха учитывать не будем.

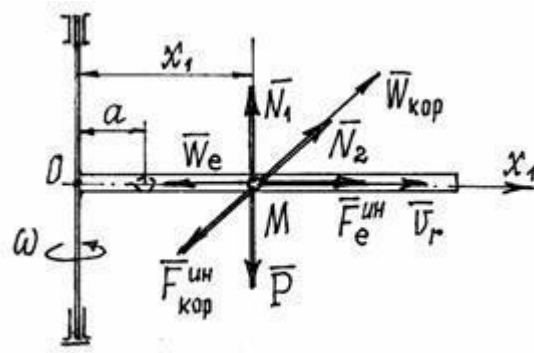


Рис.12

Траектория движения шарика в трубке – прямая. Поэтому для определения этого движения достаточно одной координаты x_1 . Начало координат, точка O , - на оси вращения. В промежуточном положении на шарик действуют силы: вес \vec{P} , две составляющие реакции

трубки \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . Добавляем переносную силу инерции $F_e^{\text{ин}}$ кориолисову силу инерции $F_c^{\text{ин}}$ и составляем дифференциальное уравнение движения:

$$F_e^{\text{ин}} = \frac{P}{g} a_c = \frac{P}{g} \cdot 2\omega_s v_r \sin 90^\circ = 2 \frac{P}{g} \omega \dot{x}_1$$

Или, после подстановки значения силы инерции и преобразований: $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$.

Решение такого дифференциального уравнения, как известно, имеет вид: $x_1 = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ и $\dot{x}_1 = \omega(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t})$. Так как при $t = 0$ $x_1 = 0$, $v_r = \dot{x}_1 = 0$, то $C_1 + C_2 = a$, $C_1 - C_2 = 0$. Значит $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$ и уравнение движения станет та-

ким $x_1 = \frac{1}{2} a(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \cdot \text{ch } \omega t$.

Относительная скорость $v_r = \dot{x}_1 = a \omega \cdot \text{sh } \omega t$. А т.к. $\text{ch}^2 \omega t - \text{sh}^2 \omega t = 1$, то

$$v_r = a \omega \sqrt{\text{ch}^2 \omega t - 1} = a \omega \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1} = \omega \sqrt{x_1^2 - a^2}.$$

Можно теперь определить относительную скорость шарика в любом положении. Так шарик вылетит из трубки длиной l со скоростью $v_r = \omega \sqrt{l^2 - a^2}$.

Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел.

При решении большинства технических задач мы считаем систему отсчета, связанную с Землей, неподвижной (инерциальной). Тем самым мы не учитываем суточное вращение Земли и ее движение по орбите вокруг Солнца. Таким образом, считая систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной, мы по существу пренебрегаем ее суточным вращением вместе с Землей по отношению к звездам. Это вращение происходит со скоростью: 1 оборот за 23 часа 56 минут 4 секунды, т. е. с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \sim 0,0000729 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Исследуем, как сказывается такое довольно медленное вращение на равновесии и движении тел.

1. Относительный покой на поверхности Земли. Сила тяжести. Рассмотрим матери-

альную точку, лежащую на неподвижной относительно Земли гладкой «горизонтальной» плоскости (рис.13). Условие ее равновесия по отношению к Земле состоит в том, что $\vec{F}_{np} + \vec{N} + \vec{F}_{nep}^u = 0$, где \vec{F}_{np} - сила притяжения Земли, \vec{N} - реакция плоскости, \vec{F}_{nep}^u - переносная сила инерции. Так как $\omega = const$, то сила \vec{F}_{nep}^u имеет только нормальную составляющую, направленную перпендикулярно к оси вращения Земли. Сложим силы \vec{F}_{np} , \vec{F}_{nep}^u и введем обозначение

$$\vec{F}_{np} + \vec{F}_{nep}^u = \vec{P}$$

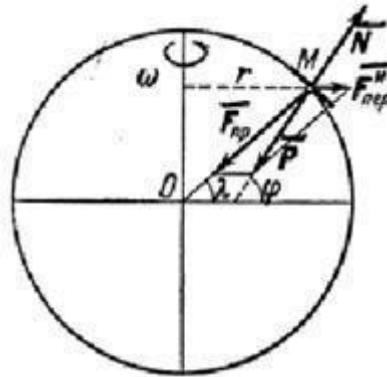


Рис.13

Тогда на точку M будут действовать две силы \vec{P} и \vec{N} , уравновешивающие друг друга. Сила \vec{P} и представляет собою ту силу, которую мы называем *силой тяжести*.

Направление силы \vec{P} будет направлением вертикали в данном пункте поверхности, а плоскость, перпендикулярная к \vec{P} и будет горизонтальной плоскостью. По модулю $F_{nep}^u = mr\omega^2$ (r - расстояние точки M от земной оси) и величина малая по сравнению с \vec{F}_{np} , так как величина ω^2 очень мала. Направление силы \vec{P} мало отличается от направления \vec{F}_{np} .

При взвешивании тел мы определяем силу \vec{P} , т.к. именно с такой силой тело давит на тело весов. То есть, вводя в уравнения равновесия силу тяжести \vec{P} , мы вводим в них и силу \vec{F}_{nep}^u , т.е. фактически учитываем влияние вращения Земли.

Поэтому при составлении уравнений равновесия тел по отношению к Земле никаких поправок на вращение Земли вводить не надо. В этом смысле равновесие по отношению к Земле можно считать абсолютным.

а) Движение по земной поверхности. При движении точки по меридиану в северном полушарии с севера на юг кориолисово ускорение $\vec{a}_{кор}$ направлено на восток, а сила $\vec{F}_{кор}^u$ - на запад. При движении с юга на север сила $\vec{F}_{кор}^u$ будет, очевидно, направлена на восток. В обоих случаях, как мы видим, эта сила будет отклонять точку *вправо* от направления ее движения. Если точка движется по параллели на восток, то ускорение $\vec{a}_{кор}$ будет направлено вдоль радиуса MC параллели (рис.14), а сила $\vec{F}_{кор}^u$ в противоположную сторону. Вертикальная составляющая этой силы (вдоль OM) будет несколько изменять вес тела, а горизонтальная составляющая будет направлена к югу и будет отклонять точку тоже *вправо* от направления движения. Аналогичный результат получим при движении по параллели на запад.

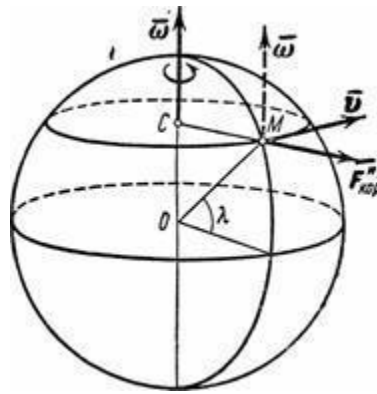


Рис.14

Отсюда заключаем, что в северном полушарии тело, движущееся вдоль земной поверхности по любому направлению будет вследствие вращения Земли отклоняться вправо от направления движения. В южном полушарии отклонение будет происходить влево.

Этим обстоятельством объясняется то, что реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег (закон Бэра). В этом же причина отклонений ветров постоянного направления (пассаты) и морских течений.

Общие теоремы динамики точки

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться так называемыми *общими теоремами*, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движений механических систем, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, общие теоремы позволяют изучать отдельные, практически важные стороны данного явления, не изучая явление в целом. Наконец, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения. Сейчас мы рассмотрим, как выглядят эти теоремы для одной материальной точки.

Количество движения точки

Основными динамическими характеристиками движения точки являются *количество движения* и *кинетическая энергия*.

Количеством движения точки называется векторная величина $m\vec{v}$ равная произведению массы точки на вектор ее скорости. Направлен вектор $m\vec{v}$ так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Кинетической энергией (или живой силой) точки называется *скалярная величина $mv^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.*

Необходимость введения двух динамических характеристик объясняется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особенности движения точки.

Например, зная количество движения автомобиля (т.е. величину $Q = mv$) а не величины m и v в отдельности) и действующую на него при торможении силу, можно определить, через сколько секунд автомобиль остановится, но по этим данным нельзя найти пройденный за время торможения путь. Наоборот, зная начальную кинетическую энергию автомобиля и тормозящую силу, можно определить тормозной путь, но по этим данным нельзя найти время торможения.

Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Введем сначала понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за бесконечно малый промежуток времени dt . *Элементарным импульсом силы называйся векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению вектора силы \vec{F} на элементарный промежуток времени dt*

$$d\vec{S} = \vec{F}dt.$$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы.

Импульс \vec{S} любой силы \vec{F} за конечный промежуток времени t_1 вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}dt.$$

Следовательно, импульс силы за любой промежуток времени, t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от 0 до t_1 .

В частном случае, если сила \vec{F} и по модулю, и по направлению постоянна ($\vec{F} = \text{const}$), будем иметь $\vec{S} = \vec{F}t_1$. Причем, в этом случае и модуль $S = Ft_1$. В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции.

Проекции импульса силы на прямоугольные декартовы оси координат равны:

$$\bar{S}_x = \int_0^{t_1} \bar{F}_x dt \quad \bar{S}_y = \int_0^{t_1} \bar{F}_y dt \quad \bar{S}_z = \int_0^{t_1} \bar{F}_z dt.$$

Единицей измерения импульса в СИ является – 1 Н · с

Теорема об изменении количества движения точки

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k.$$

Уравнение выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил.*

Проинтегрируем это уравнение. Пусть точка массы m , движущаяся под действием силы $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ (рис.15), имеет в момент $t=0$ скорость \vec{v}_0 , а в момент t_1 -скорость \vec{v}_1 .

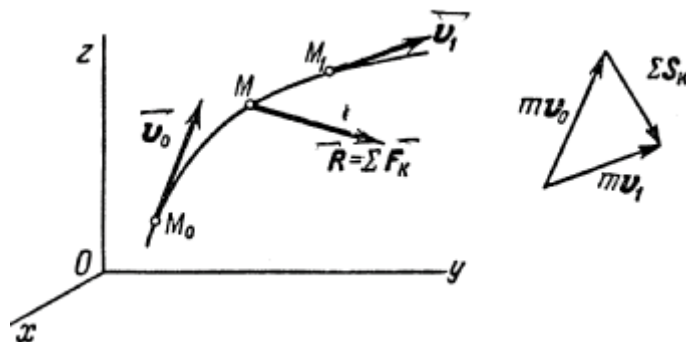


Рис.15

Умножим тогда обе части равенства на dt и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интегралов будут 0 и t_1 , а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости v_0 и v_1 . Так как интеграл от $d(mv)$ равен mv , то в результате получим:

$$m\bar{v}_1 \cdot m\bar{v}_0 = \sum \int \bar{F}_K dt.$$

Стоящие справа интегралы представляют собою импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будем иметь:

$$m\bar{v}_1 \cdot m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_K.$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени* (рис. 15).

При решении задач вместо векторного уравнения часто пользуются уравнениями в проекциях.

$$\begin{cases} mv_{1X} - mv_{0X} = \sum S_{KX}; \\ mv_{1Y} - mv_{0Y} = \sum S_{KY}; \\ mv_{1Z} - mv_{0Z} = \sum S_{KZ}. \end{cases}$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси Ox теорема выражается первым из этих уравнений.

Вопросы для самопроверки

- Сформулируйте основные законы механики.
- Какое уравнение называется основным уравнением динамики?
- Какова мера инертности твердых тел при поступательном движении?
- Зависит ли вес тела от местонахождения тела на Земле?
- Какую систему отсчета называют инерциальной?
- К какому телу приложена сила инерции материальной точки и каковы ее модуль и направление?
- Объясните разницу между понятиями «инертность» и «сила инерции»?
- К каким телам приложена сила инерции, как направлена и по какой формуле может быть рассчитана?
- В чем заключается принцип кинетостатики?
- Каковы модули и направления касательной и нормальной сил инерции материальной точки?
- Что называют массой тела? Назовите единицу измерения массы в системе СИ?
- Что является мерой инертности тела?
- Запишите основной закон динамики в векторной и дифференциальной форме?
- На материальную точку действует постоянная сила. Как движется точка?
- Какое ускорение получит точка, если на нее действует сила, равная удвоенной силе тяжести?

Лекция 2. Работа. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Работа силы. Мощность.

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы.

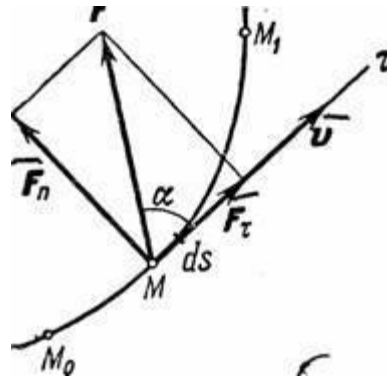


Рис.16

При этом работа характеризует то действие силы, которым определяется изменение модуля скорости движущейся точки.

Введём сначала понятие об элементарной работе силы на бесконечно малом перемещении ds . Элементарной работой силы \vec{F} (рис.16) называется скалярная величина:

$$dA = F_{\tau} ds,$$

где F_{τ} - проекция силы \vec{F} на касательную к траектории, направленную в сторону перемещения точки, а ds - бесконечно малое перемещение точки, направленное вдоль этой касательной.

Данное определение соответствует понятию о работе, как о характеристике того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки. В самом деле, если разложить силу \vec{F} на составляющие \vec{F}_{τ} и \vec{F}_n , то изменять модуль скорости точки будет только составляющая \vec{F}_{τ} , сообщая точке касательное ускорение. Составляющая же \vec{F}_n или изменяет направление вектора скорости v (сообщает точке нормальное ускорение), или, при несвободном движении изменяет давление на связь. На модуль скорости составляющая \vec{F}_n влиять не будет, т.е., как говорят, сила \vec{F}_n «не будет производить работу».

Замечая, что $F_{\tau} = F \cos \alpha$, получаем:

$$dA = F ds \cos \alpha. \quad (1)$$

Таким образом, элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения точки, умноженной на элементарное перемещение ds или элементарная работа силы равна произведению модуля силы на элементарное перемещение ds и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения.

Если угол α острый, то работа положительна. В частности, при $\alpha = 0$ элементарная работа $dA = F ds$.

Если угол α тупой, то работа отрицательна. В частности, при $\alpha = 180^\circ$ элементарная работа $dA = -F ds$.

Если угол $\alpha = 90^\circ$, т.е. если сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.

Найдем аналитическое выражение элементарной работы. Для этого разложим силу \vec{F} на составляющие \vec{F}_x , \vec{F}_y , \vec{F}_z по направлениям координатных осей (рис.17; сама сила \vec{F} на чертеже не показана).

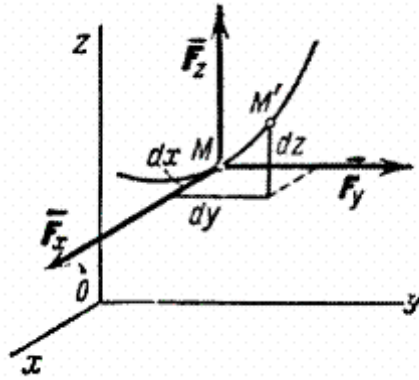


Рис.17

Элементарное перемещение $MM' = ds$ складывается из перемещений dx , dy , dz вдоль координатных осей, где x , y , z - координаты точки M . Тогда работу силы \vec{F} на перемещении ds можно вычислить как сумму работ её составляющих \vec{F}_x , \vec{F}_y , \vec{F}_z на перемещениях dx , dy , dz .

Но на перемещении dx совершает работу только составляющая \vec{F}_x , причем её работа равна $F_x dx$. Работа на перемещениях dy и dz вычисляется аналогично. Окончательно находим: $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

Формула даёт аналитическое выражение элементарной работы силы.

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных работ и будет равна:

$$A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

или

$$A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Следовательно, работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы. Пределы интеграла соответствуют значениям переменных интегрирования в точках M_0 и M_1 .

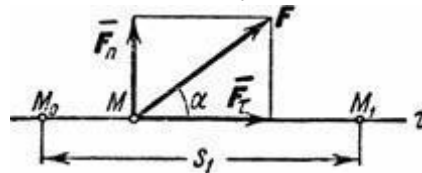


Рис.18

Если величина F_τ постоянна ($F_\tau = \text{const}$), то и обозначая перемещение M_0M_1 через s_1 получим: $A_{(M_0M_1)} = F_\tau s_1$.

Такой случай может иметь место, когда действующая сила постоянна по модулю и направлению ($F = \text{const}$), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно (рис.18). В этом случае $F_\tau = F \cos \alpha = \text{const}$ и работа силы $A_{(M_0M_1)} = F s_1 \cos \alpha$.

Единицей измерения работы в системе СИ является джоуль (1 Дж = 1 Нм).

Мощность.

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность

$$W = \frac{A}{t},$$

где t - время, в течение которого произведена работа A . В общем случае

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_{\tau} ds}{dt} = F_{\tau} V.$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость движения.

Единицей измерения мощности в системе СИ является *ватт* ($1 \text{ вт} = 1 \text{ дж/сек}$). В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила, равная 75 кгМ/сек или 736 вт .

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт-час ($1 \text{ квт-ч} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ дж} \approx 367100 \text{ кгМ}$).

Из равенства $W = F_{\tau} V$ видно, что у двигателя, имеющего данную мощность W , сила тяги F_{τ} будет тем больше, чем меньше скорость движения V . Поэтому, например, на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигаться с меньшей скоростью и развивать большую силу тяги.

Примеры вычисления работы.

Рассмотренные ниже примеры дают результаты, которыми можно непосредственно пользоваться при решении задач.

1) *Работа силы тяжести.* Пусть точка M , на которую действует сила тяжести \vec{P} , перемещается из положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх (рис.19).

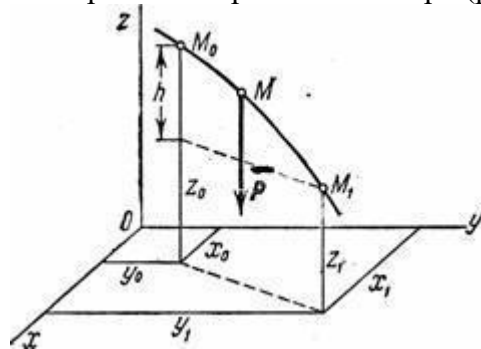


Рис.19

Тогда $P_x=0$, $P_y=0$, $P_z=-P$. Подставляя эти значения и учитывая переменную интегрирования z :

$$A(M_0 M_1) = \int_{M_0}^{M_1} (-P) dz = -P \int_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1)$$

Если точка M_0 выше M_1 , то $z_0 - z_1 = h$, где h -величина вертикального перемещения точки;

Если же точка M_0 ниже точки M_1 то $z_0 - z_1 = -(z_1 - z_0) = -h$.

Окончательно получаем: $A_{(M_0 M_1)} = \pm Ph$.

Следовательно, работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произ-

ведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной. Из полученного результата следует, что работа силы тяжести не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка ее приложения.

Силы, обладающие таким свойством, называются потенциальными.

2) *Работа силы упругости.* Рассмотрим груз M , лежащий на горизонтальной плоскости и прикрепленный к свободному концу некоторой пружины (рис.20,а). Отметим на плоскости точкой O положение, занимаемое концом пружины, когда она не напряжена ($AO = l_0$ - длина ненапряженной пружины), и примем эту точку за начало координат. Если теперь оттянуть груз от равновесного положения O , удлинив пружину до величины l , то на груз будет действовать сила упругости пружины F , направленная к точке O .

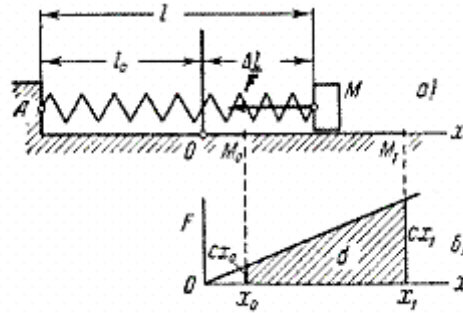


Рис.20

По закону Гука величина этой силы пропорциональна удлинению пружины $\Delta l = l - l_1$. Так как в нашем случае $\Delta l = x$, то по модулю $F = c|\Delta l| = c|x|$.

Коэффициент c называется *коэффициентом жесткости* пружины. В технике обычно измеряют величину c в H/cm , полагая коэффициент c численно равным силе, которую надо приложить к пружине, чтобы растянуть ее на 1 см.

Найдем работу, совершаемую силой упругости при перемещении груза из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$. Так как в данном случае $F_x = -F = -cx$, $F_y = F_z = 0$, то получим:

$$A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} (-cx) dx = -c \int_{x_0}^{x_1} x dx = \frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2)$$

(Этот же результат можно получить по графику зависимости F от x (рис.20, б), вычисляя площадь S заштрихованной на чертеже трапеции и учитывая знак работы.) В полученной формуле x_0 представляет собою начальное удлинение пружины $\Delta l_{нач}$, а x_1 конечное удлинение пружины $\Delta l_{кон}$. Следовательно,

$$A(M_0M_1) = \frac{c}{2} [(\Delta l_{нач})^2 - (\Delta l_{кон})^2]$$

т.е. *работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.*

Работа будет положительной, когда $|\Delta l_{нач}| > |\Delta l_{кон}|$, т. е. когда конец пружины перемещается к равновесному положению, и отрицательной, когда $|\Delta l_{нач}| < |\Delta l_{кон}|$, т.е. конец пружины удаляется от равновесия положения. Можно доказать, что формула остается справедливой и в случае, когда перемещение точки M не является прямолинейным.

Таким образом, оказывается, что работа силы F зависит только от значе-

ний $\Delta l_{\text{горч}}$ и $\Delta l_{\text{хочн}}$ и не зависит от вида траектории точки M . Следовательно, сила упругости также является потенциальной.

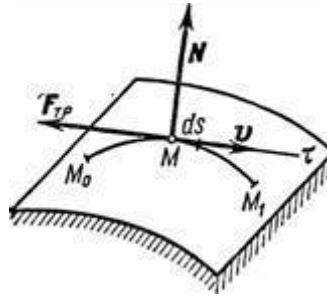


Рис.21

3) *Работа силы трения.* Рассмотрим точку, движущуюся по какой-нибудь шероховатой поверхности (рис. 21) или кривой. Действующая на точку сила трения равна по модулю fN , где f -коэффициент трения, а \vec{N} -нормальная реакция поверхности. Направлена сила трения противоположно перемещению точки. Следовательно, $F_{\text{тр}} = -fN$ и по формуле

$$A(M_0 M_1) = - \int_{M_0}^{M_1} F_{\text{тр}} ds = - \int_{M_0}^{M_1} fN dx$$

Если величина силы трения постоянна, то $A(M_0 M_1) = -F_{\text{тр}} s$, где s -длина дуги кривой $M_0 M_1$ по которой перемещается точка.

Таким образом, *работа силы трения при скольжении всегда отрицательна.* Величина этой работы зависит от длины дуги $M_0 M_1$. Следовательно, сила трения является силой *непотенциальной*.

4) *Работа силы, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.*

В этом случае (рис.22) точка приложения силы \vec{F} движется по окружности радиуса r . Элементарная работа, по (1), $dA = F ds \cdot \cos \alpha$, где $ds = r \cdot d\varphi$.

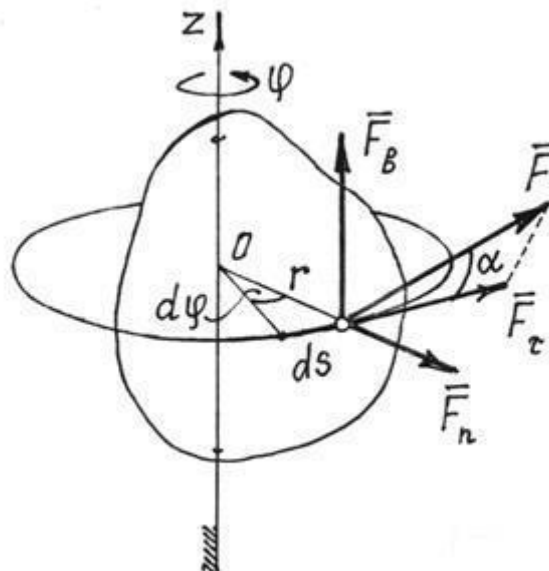


Рис.22

Поэтому $dA = Fr \cdot d\varphi \cdot \cos \alpha$.

Но $F \cdot r \cdot \cos \alpha = F_\tau \cdot r = M_x(\vec{F})$.

Это нетрудно установить, разложив силу на три составляющие (рис. 22). (Моменты

сил \vec{F}_b и \vec{F}_n равны нулю). Значит,

$$dA = M_z(\vec{F}) \cdot d\varphi \quad (2)$$

В частности, если момент силы относительно оси $M_z(\vec{F}) = \text{const}$, работа силы при повороте тела на угол φ равна

$$A = \pm M_z(\vec{F}) \cdot \varphi. \quad (3)$$

Знак работы определяется знаками момента силы и угла поворота. Если они одинаковы, работа положительная.

Из формулы (3) следует и правило определения работы пары сил. Если пара с моментом m расположена в плоскости перпендикулярной оси вращения тела, то ее работа при повороте тела на угол φ

$$A = \pm m\varphi. \quad (4)$$

Если же пара сил действует в плоскости не перпендикулярной оси вращения, то ее надо заменить двумя парами. Одну расположить в плоскости перпендикулярной оси, другую – в плоскости параллельной оси. Моменты их определяются разложением вектора момента \vec{m} по соответствующим направлениям: $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$. Конечно работу будет совершать только первая пара с моментом $m_1 = m \cdot \cos \gamma$, где γ – угол между вектором \vec{m} и осью вращения z ,

$$A = \pm m\varphi \cdot \cos \gamma. \quad (5)$$

Потенциальная энергия

Часть пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от места положения точки, называется силовым полем.

Причем, эта сила определяется с помощью силовой функции $u = u(x, y, z)$. Если она не зависит от времени, то такое поле называется стационарным. Если во всех точках она одинакова, то поле – однородное.

Если же проекции силы на декартовы оси есть частные производные от силовой функции по соответствующим координатам

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (6)$$

то такое поле называется потенциальным.

Вычислим работу силы потенциального поля при перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 . (рис. 23).

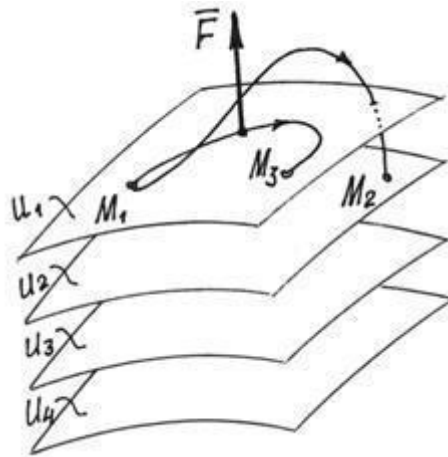


Рис.23

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = du$$

Элементарная работа,

Это есть полный дифференциал силовой функции.

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1, \quad (7)$$

где u_2 и u_1 – значения силовой функции в точках M_2 и M_1 .

Следовательно, работа силы потенциального поля не зависит от траектории движения точки, а определяется лишь значениями силовой функции в начальном и конечном положениях точки.

Естественно, если точка вернется в начальное положение, работа силы \vec{F} будет равна нулю. Работа окажется равной нулю и при переходе в другую точку M_3 , если там значение силовой функции будет такое же, как и в начальном положении.

Нетрудно догадаться, что точки с одинаковыми значениями силовой функции будут образовывать целую поверхность. И что силовое поле – это слоеное пространство, состоящее из таких поверхностей (рис. 23). Эти поверхности называются *поверхностями уровня* или *эквипотенциальными поверхностями*. Уравнения их: $u(x, y, z) = C$ (C – постоянная, равная значению u в точках этой поверхности). А силовую функцию называют, соответственно, *потенциалом поля*.

Конечно, эквипотенциальные поверхности не пересекаются. Иначе существовали бы точки поля с неопределенным потенциалом.

Поскольку, при перемещении точки по эквипотенциальной поверхности работа силы \vec{F} равна нулю, то вектор силы перпендикулярен поверхности.

Выберем среди этих поверхностей какую-нибудь одну и назовем ее нулевой поверхностью (положим у нее $u = u_0$).

Работа, которую совершит сила \vec{F} при переходе точки из определенного места M на нулевую поверхность, называют *потенциальной энергией точки в этом определенном месте M* :

$$\Pi = A = u_0 - u \quad (8)$$

Заметим, что потенциальная энергия в одной и той же точке поля зависит от выбора нулевой поверхности.

По (8) силовая функция $u = u_0 - \Pi$. Поэтому проекции силы на декартовы оси, по (6), так как $u_0 = \text{const}$,

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (9)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) = -\text{grad } \Pi$$

и вектор силы

Рассмотрим несколько потенциальных полей.

1) *Поле силы тяжести.*

Вблизи поверхности Земли сила тяжести во всех точках одинакова $\vec{F} = \vec{P}$, равна весу тела. Значит, это силовое поле однородное. Так как при перемещении точки в горизонтальной плоскости работа силы равна нулю, то эквипотенциальными поверхностями будут горизонтальные плоскости (рис. 24), а уравнения их: $u = z = C$.

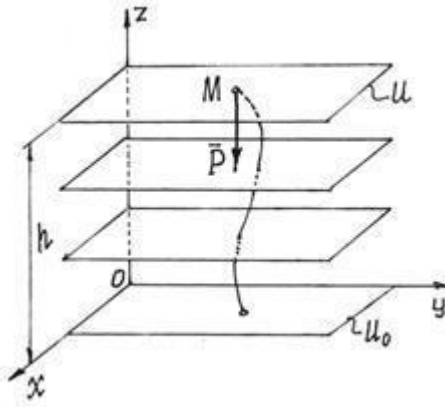


Рис.24

Если нулевой поверхностью назначить плоскость xOy , то потенциальная энергия точки в положении M будет равна работе силы тяжести:

$$\Pi = A = P h.$$

2) Поле упругой силы.

При деформации упругого тела, например пружины, появляется сила. То есть около этого тела возникает силовое поле, силы которого пропорциональны деформации тела и направлены в сторону недеформированного состояния. У пружины – в точку M_0 , где находится конец недеформированной пружины (рис. 25).

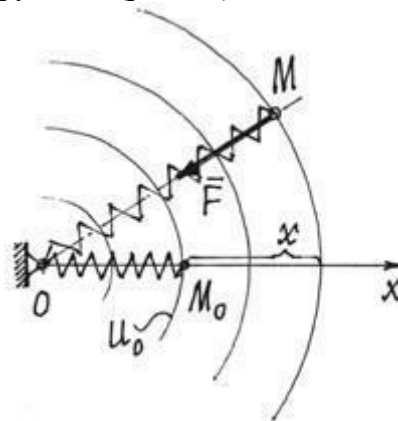


Рис.25

Если перемещать конец пружины так, чтобы длина ее не изменялась, то работа упругой силы \vec{F} будет равна нулю. Значит эквипотенциальными поверхностями являются сферические поверхности с центром в точке O .

Назначим нулевой поверхностью сферу, проходящую через точку M_0 , через конец недеформированной пружины. Тогда потенциальная энергия пружины в положении M :

$$\Pi = A = \frac{1}{2} c x^2.$$

При таком выборе нулевой поверхности потенциальная энергия всегда будет положительной ($\Pi > 0$), и в растянутом, и в сжатом состоянии.

Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Рассмотрим точку с массой m , перемещающуюся под действием приложенных к ней сил из положения M_0 , где она имеет скорость \vec{v}_0 , в положение M_1 , где ее скорость равна \vec{v}_1 .

Для получения искомой зависимости обратимся к уравнению $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$ выражающе-

му основной закон динамики. Проектируя обе части этого равенства на касательную M_{τ} к траектории точки M , направленную в сторону движения, получим:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{k\tau}$$

Стоящую слева величину касательного ускорения можно представить в виде

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dV}{ds} V$$

В результате будем иметь:

$$mV \frac{dV}{ds} = \sum F_{k\tau}$$

Умножив обе части этого равенства на ds , внесем m под знак дифференциала. Тогда, замечая, что $\sum F_{k\tau} ds = dA_k$ где dA_k - элементарная работа силы F_k получим выражение теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum dA_k$$

Проинтегрировав теперь обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 и M_1 , найдем окончательно:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A(M_0M_1)$$

Уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде: *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.*

Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов).

Из двух основных динамических характеристик, величина $m\vec{v}$ является векторной. Иногда при изучении движения точки вместо изменения самого вектора $m\vec{v}$ оказывается необходимым рассматривать изменение его момента. Момент вектора $m\vec{v}$ относительно данного центра O или оси z обозначается $m_0(m\vec{v})$ или $m_z(m\vec{v})$ и называется соответственно *моментом количества движения* или *кинетическим моментом* точки относительно этого центра (оси). Вычисляется момент вектора $m\vec{v}$ так же, как и момент силы. При этом вектор $m\vec{v}$ считается приложенным к движущейся точке. По модулю $m_0|m\vec{v}| = mvh$, где h - длина перпендикуляра, опущенного из центра O на направление вектора $m\vec{v}$ (рис.11).

Теорема моментов относительно центра. Найдем для материальной точки, движущейся под действием силы F (рис.26), зависимость между моментами векторов $m\vec{v}$ и \vec{F} относительно какой-нибудь неподвижного центра O . В конце было показано, что $m_0(F) = \vec{r} \times \vec{F}$.

$$\text{Аналогично } m_0(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$$

— При этом вектор $m_0(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и вектор \vec{F} , а вектор $m_0(m\vec{v})$ - перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и вектор $m\vec{v}$.

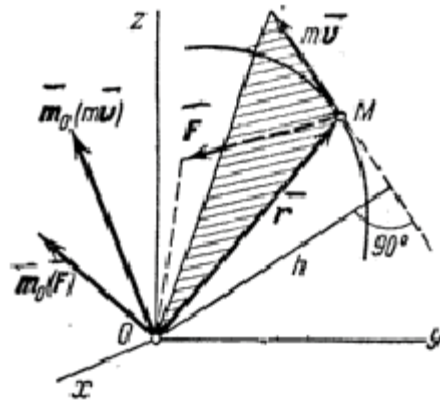


Рис.26

Дифференцируя выражение $m_0(m\vec{v})$ по времени, получаем:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + (\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

Но $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$, как векторное произведение двух параллельных векторов, а $m\vec{a} = \vec{F}$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\text{или } \frac{d}{dt}[\bar{m}_0(m\vec{v})] = \bar{m}_0(\vec{F})$$

В результате мы доказали следующую теорему моментов относительно центра: *производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.* Аналогичная теорема имеет место для моментов вектора $m\vec{v}$ силы \vec{F} относительно какой-нибудь оси z , в чем можно убедиться, проектируя обе ча-

сти равенства $\frac{d}{dt}[\bar{m}_0(m\vec{v})] = \bar{m}_0(\vec{F})$ на эту ось. Математическое выражение теоремы момен-

тов относительно оси дается формулой $\frac{d}{dt}[m_z(m\vec{v})] = m_z(\vec{F})$.

Лекция 3. Прямолинейные колебания точки

Свободные колебания без учета сил сопротивления.

Учение о колебаниях составляет основу ряда областей физики и техники. Хотя колебания, рассматриваемые в различных областях, например в механике, радиотехнике, акустике и др., отличаются друг от друга по своей физической природе, основные законы этих колебаний во всех случаях остаются одними и теми же. Поэтому изучение механических колебаний является важным не только по той причине, что такие колебания очень часто имеют место в технике, но и вследствие того, что результаты, полученные при изучении механических колебаний, могут быть использованы для изучения и уяснения колебательных явлений в других областях.

Начнем с изучения свободных колебаний точки без учета сил сопротивления. Рассмотрим точку M , движущуюся прямолинейно под действием одной только *восстанавливающей силы* \vec{F} , направленной к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы \vec{F} на ось Ox (рис.27) будет равна

$$F_x = -cx.$$

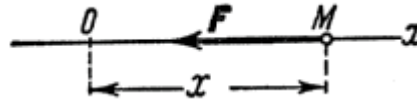


Рис.27

Сила \vec{F} , как видим, стремится вернуть точку в равновесное положение O , где $F = 0$; отсюда и наименование «восстанавливающая» сила. Примером такой силы является сила упругости. Коэффициент пропорциональности называется *жесткостью упругого элемента*.

Найдем закон движения точки M . Составляя дифференциальное уравнение движения получим

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$$

Деля обе части равенства на m и вводя обозначение

$$\frac{c}{m} = k^2,$$

приведем уравнение к виду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$$

Уравнение представляет собою *дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления*. Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка ищут в виде $x = e^{nt}$. Полагая $x = e^{nt}$, получим для определения n так называемое характеристическое уравнение, имеющее в данном случае вид $n^2 + k^2 = 0$. Поскольку корни этого характеристического уравнения являются чисто мнимыми ($n_{1,2} = \pm ik$), то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Если вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные a и α , такие, что $C_1 = a \cos \alpha$, $C_2 = a \sin \alpha$, то мы получим $x = a(\sin kt \cos \alpha + \cos kt \sin \alpha)$ или $x = a \sin(kt + \alpha)$.

Это другой вид решения, в котором постоянными интегрирования являются a и α . Им удобнее пользоваться для общих исследований.

Скорость точки в рассматриваемом движении равна

$$V_x = \dot{x} = ak \cos(kt + \alpha).$$

Колебания, совершаемые точкой по закону $x = a \sin(kt + \alpha)$ называются *гармоническими колебаниями*.

Всем характеристикам этого движения можно дать наглядную кинематическую интерпретацию. Рассмотрим точку B , движущуюся равномерно по окружности радиуса a из положения B_0 определяемого углом $\angle DOB = \alpha$ (рис.28).

Пусть постоянная угловая скорость вращения радиуса OB равна k . Тогда в произвольный момент времени t угол $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$ и проекция M точки B на диаметр, перпендикулярный к DE , движется по закону $x = a \sin(kt + \alpha)$, где $x = OM$, т.е. совершает гармонические колебания.

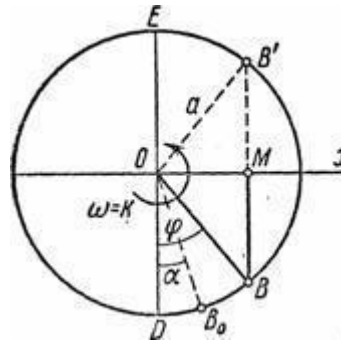


Рис.28

Величина a , равная наибольшему отклонению точки M от центра колебаний, называется *амплитудой колебаний*. Величина $\varphi = \alpha + kt$ называется *фазой колебаний*.

Величина k , совпадающая с угловой скоростью вращения радиуса OB , показанного на рис.15 называется *круговой частотой колебаний*.

Промежуток времени T (или τ), в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний*.

По истечении периода фаза изменяется на 2π . Следовательно, должно $kT = 2\pi$ откуда период

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

Величина ν , обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за одну секунду, называется *частотой колебаний*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$$

Отсюда видно, что величина k отличается от T только постоянным множителем 2π . В дальнейшем мы обычно для краткости частотой колебаний будем называть величину k .

Значения a и α определяются по начальным условиям. Считая при $t=0$ $x = x_0$, $V_x = V_0$ получим $x_0 = a \sin \alpha$ и $\frac{V_0}{k} = a \cos \alpha$. Отсюда, складывая сначала квадраты этих равенств, а затем деля их почленно, найдем:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{V_0}$$

Отметим, что свободные колебания при отсутствии сопротивления обладают следующими свойствами: 1) амплитуда и начальная фаза колебаний *зависят* от начальных условий; 2) частота k , а следовательно, и период T колебаний от начальных условий *не зависят*.

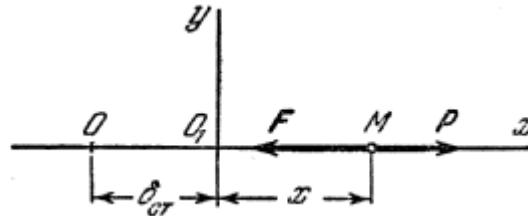


Рис.29

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки. Пусть на точку M , кроме восстанавливающей силы F , направленной к центру O , действует еще постоянная по модулю и направлению сила P (рис.29). Величина силы F по прежнему пропорциональна расстоянию

от центра O , т.е. $F = c \cdot OM$.

Очевидно, что в этом случае положением равновесия точки M будет центр O_1 отстоящий от O на расстоянии $OO_1 = \delta_{см}$, которое определяется равенством $c \cdot \delta_{см} = P$ или

$$\delta_{см} = \frac{P}{c}.$$

Величину $\delta_{см}$ назовем *статическим отклонением* точки. Примем центр O_1 за начало отсчета и направим координатную ось O_1x в сторону действия силы \vec{F} . Тогда $F_x = -c(x + \delta_{см})$, $P_x = P$. В результате, составляя дифференциальное уравнение движения и учитывая, что согласно равенству $c \cdot \delta_{см} = P$, будем иметь:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0.$$

Отсюда заключаем, что *постоянная сила P не изменяет характера колебаний, совершаемых точкой под действием восстанавливающей силы F , а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы P на величину статического отклонения $\delta_{см}$.*

Понятие о фазовой плоскости

Обычное описание движения системы с одной степенью свободы в виде зависимости координаты от времени $x = x(t)$ не является единственно возможным. В ряде случаев, особенно при изучении нелинейных механических колебаний, определенными достоинствами обладает представление движения на фазовой плоскости.

Состояние системы в любой фиксированный момент времени t определяется парой соответствующих значений x и $v = \dot{x}$ и может быть представлено изображающей (фазовой) точкой в плоской декартовой системе координат x , v , если откладывать по оси абсцисс координату x , а по оси ординат – скорость v . Такая плоскость называется *фазовой*.

В процессе движения рассматриваемой системы величины x и v изменяются и, соответственно, меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. *Геометрическое место изображающих точек для данного движения называется фазовой траекторией.*

Для построения фазовой траектории при заданном законе движения $x = x(t)$ нужно путем дифференцирования образовать выражение скорости $v = \dot{x}(t)$, а затем исключить время из двух уравнений: $x = x(t)$, $v = \dot{x}(t)$.

Функция $v = v(x)$ и описывает фазовую траекторию данного движения.

Фазовая плоскость особенно удобна для представления колебательных процессов, когда координата и скорость не выходят за известные пределы; поэтому вся картина движения даже в течение неограниченного времени занимает ограниченную часть фазовой плоскости.

Совокупность фазовых траекторий, которая описывает все возможные движения данной системы, называется фазовой диаграммой (фазовым портретом) данной системы.

Для свободных гармонических колебаний $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$, а $v(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$. Исключая из этих выражений время t получаем

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega \cdot A}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса (рис.30). Его полуоси зависят от амплитуды и круговой частоты.

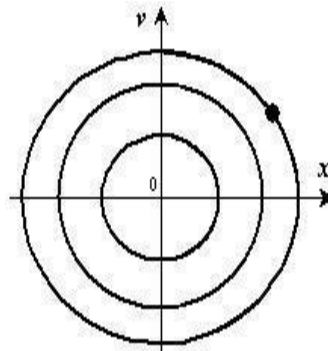


Рис.30

Свободные колебания в поле постоянной силы.

На материальную точку кроме упругой силы, действует сила постоянная по величине и направлению.

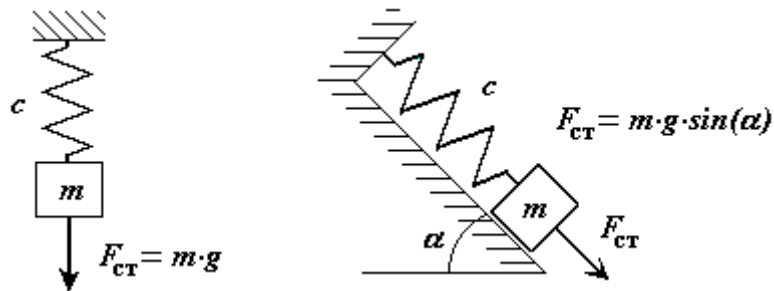


Рис.31

Обозначим ее F_{cm} (рис.31), тогда дифференциальное уравнение движения точки примет вид:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = F_{cm} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{F_{cm}}{m}, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

Начальные условия имеют вид:

$$\text{при } t = 0: \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0.$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение складывается из решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$x_{\text{частн.}}(t) = x_{cm} = \frac{F_{cm}}{c}.$$

Решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{F_{cm}}{c}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega \cdot C_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot C_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$C_1 = x_0 - \frac{F_{cm}}{c} \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_{cm}}{c} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{F_{cm}}{c},$$

Если начало отсчета координаты сдвинуть на $x_{cm} = \frac{F_{cm}}{c}$, $x_1 = x - x_{cm}$ (рис.32), тогда в новой системе отсчета решение будет иметь вид:

$$x_1(t) = x_{10} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad x_1(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{x_{10}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad - \text{ амплитуда колебаний;}$$

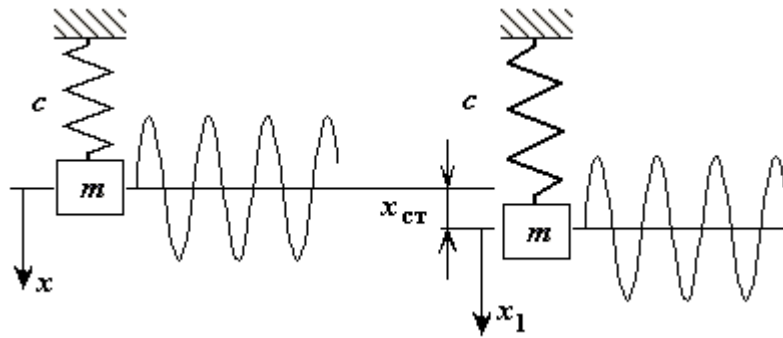


Рис.32

Параллельное включение упругих элементов.

Масса закреплена с помощью двух упругих элементов расположенных параллельно (рис.33).

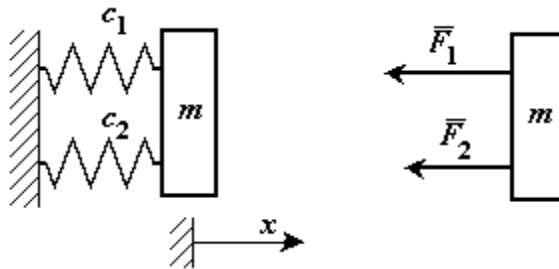


Рис.33

Сместим массу на расстояние x .

$$F_1 = -c_1 \cdot x, \quad F_2 = -c_2 \cdot x,$$

$$F = F_1 + F_2 = -(c_1 + c_2) \cdot x = -c_{\Sigma} \cdot x$$

Результирующая жесткость упругих элементов расположенных параллельно равна сумме жесткостей этих элементов.

Последовательное включение упругих элементов.

Масса закреплена с помощью двух упругих элементов расположенных последовательно (рис.34).

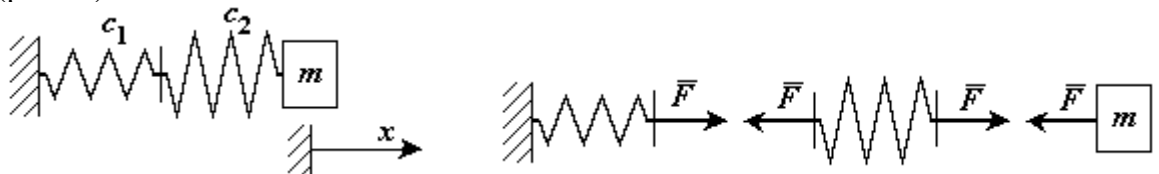


Рис.34

Сместим массу на расстояние x . В упругих элементах возникает восстанавливающая (упругая) сила F , одинаковая для обоих элементов (рис.34). Первый упругий элемент изменит длину на x_1 , второй - на x_2 .

$$x = x_1 + x_2, \quad F = -c_1 \cdot x_1, \quad F = -c_2 \cdot x_2, \quad F = -c_{\Sigma} \cdot x.$$

$$x = x_1 + x_2 = -\frac{F}{c_1} - \frac{F}{c_2} = -\frac{F}{c_{\Sigma}}, \quad \text{следовательно} \quad \frac{1}{c_{\Sigma}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Обратная величина результирующей жесткости упругих элементов расположенных последовательно равна сумме обратных величин жесткостей этих элементов.

Обратная величина жесткости упругого элемента называется податливостью этого элемента.

$$u = \frac{1}{c}, \quad u_1 = \frac{1}{c_1}, \quad u_2 = \frac{1}{c_2}, \quad u = u_1 + u_2$$

Результирующая податливость упругих элементов расположенных последовательно равна сумме податливостей этих элементов.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих, когда на точку, кроме восстанавливающей силы \bar{F} , действует еще периодически изменяющаяся со временем сила \bar{Q} , проекция которой на ось Ox равна

$$Q = Q_0 \sin pt$$

Эта сила называется *возмущающей силой*, а колебания, происходящие при действии такой силы, называются *вынужденными*. Величина P является *частотой возмущающей силы*.

Возмущающей силой может быть сила, изменяющаяся со временем и по другому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда Q_x определяется указанным равенством. Такая возмущающая сила называется *гармонической*.

Рассмотрим движение точки, на которую, кроме восстанавливающей силы \bar{F} , действует только возмущающая сила \bar{Q} . Дифференциальное уравнение движения в этом случае

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + Q_0 \sin pt$$

Разделим обе части этого уравнения на m и положим

$$\frac{Q_0}{m} = P_0$$

Тогда, учитывая обозначение, приведем уравнение движения к виду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = P_0 \sin pt$$

Уравнение является *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления*. Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 - общее решение уравнения без правой части, а x_2 - какое-нибудь частное решение полного уравнения.

Полагая, что $p = k$, будем искать решение x_2 в виде

$$x_2 = A \sin pt,$$

где A - постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство обратилось в тождество. Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение будем иметь:

$$-pA \sin pt + k^2 A \sin pt = P_0 \sin pt$$

Это равенство будет выполняться при любом t , если $A(k^2 - p^2) = P_0$ или

$$A = \frac{P_0}{k^2 - p^2}$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt$$

Так как $x = x_1 + x_2$, а общее решение имеет окончательно вид

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{F_0}{k^2 - p^2} \sin pt$$

где a и α - постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Решение показывает, что колебания точки складываются в этом случае из: 1) колебаний с амплитудой a (зависящей от начальных условий) и частотой k , называемых *собственными колебаниями*, и 2) колебаний с амплитудой A (не зависящей от начальных условий) и частотой p , которые называются *вынужденными колебаниями*.

Частота p вынужденных колебаний, как видно, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2 , можно представить в виде:

$$A = \frac{F_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{\delta_0}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|},$$

где $\delta_0 = \frac{F_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c}$, т. е. δ_0 есть величина статического отклонения точки под действием силы Q_0 . Как видим, A зависит от отношения частоты p возмущающей силы к частоте k собственных колебаний.

Подбирая различные соотношения между p и k , можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами. При $p = 0$ амплитуда равна δ_0 (или близка к этой величине). Если величина p близка к k , амплитуда A становится очень большой. Когда $p \gg k$, амплитуда A становится очень малой (практически близка к нулю).

Резонанс. В случае, когда $p = k$, т. е. когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место так называемое явление резонанса. Размахи вынужденных колебаний при резонансе будут со временем неограниченно возрастать так, как показано на рис.35.

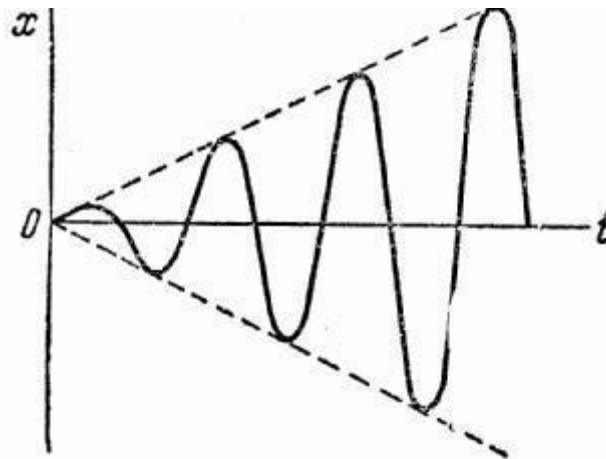


Рис.35

Свободные колебания с вязким сопротивлением.

Существуют устройства (демпферы), которые создают силу пропорциональную относительной скорости $F_{\text{д}} = -b \cdot \dot{x}$ (рис.36). Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом демпфирования или коэффициентом вязкого сопротивления.

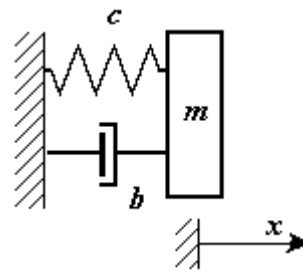


Рис.36

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m , закрепленной на упругом элементе и демпфере имеет вид:

$$m \cdot \ddot{x} = F_y + F_D$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2 \cdot n \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad 2 \cdot n = \frac{b}{m}.$$

Начальные условия имеют вид: $t = 0, \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0.$

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + 2 \cdot n \cdot \lambda + \omega^2 = 0.$

Корни характеристического уравнения равны: $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$

Рассмотрим возможные решения:

1-й случай $n < \omega, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}, \quad \lambda_{1,2} = -n \pm i \cdot \omega_1$

Решение имеет вид:

$$x(t) = A \cdot e^{-nt} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + n \cdot x_0)^2}{\omega_1^2}}, \quad A \cdot e^{-nt} - \text{условная амплитуда затухающих колебаний};$$

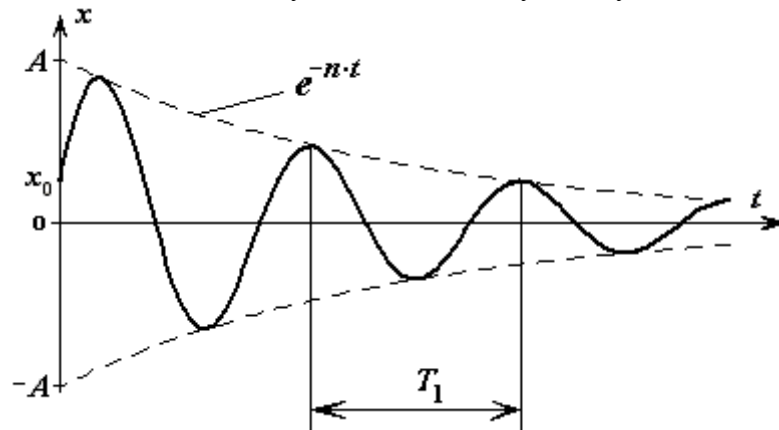


Рис.37

ω_1 - круговая или циклическая частота затухающих колебаний. Измеряется в рад/сек.

α - фазовый угол (или просто фаза).

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x_0 \cdot \omega_1}{v_0 + n \cdot x_0}$$

$$T_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} > T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad - \text{период затухающих колебаний (рис.37).}$$

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2 \cdot \pi} \quad - \text{частота колебаний (1 колеб/сек=1 Гц)}$$

$$D = \frac{x_i^{\max}}{x_{i+1}^{\max}} = e^{n \cdot T_1} \quad - \text{ декремент колебаний.}$$

$$\eta = \ln(D) = n \cdot T_1 \quad - \text{ логарифмический декремент колебаний.}$$

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой ω_1 и амплитудой, величина которой все время убывает.

Движение изображающей точки на фазовой плоскости показано на рис. 38.

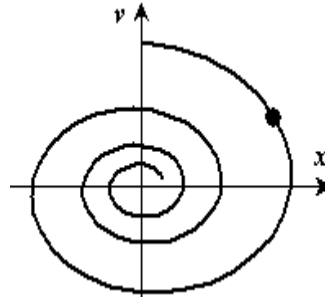


Рис.38

2-й случай $n > \omega$, $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$, $\lambda_{1,2} = -n \pm \omega_2$

Решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-nt} \cdot (C_1 \cdot e^{\omega_2 t} + C_2 \cdot e^{-\omega_2 t})$$

Материальная точка совершает затухающее неколебательное движение (рис.39).



Рис.39

3-й случай $n = \omega$, $\lambda_{1,2} = -n$ (два одинаковых корня)

Решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-nt} \cdot (C_1 \cdot t + C_2)$$

Материальная точка так же совершает затухающее неколебательное движение (рис.39).

Вынужденные колебания с вязким сопротивлением.

Рассмотрим движение точки под действием трех сил: одна восстанавливающая сила, вторая - сила демпфирования (сила вязкого сопротивления), а третья зависит от времени. $F(t) = F_0 \cdot e^{i\omega t}$ - гармоническая возмущающая сила.

F_0 - амплитуда возмущающей силы.

ω - круговая частота возмущающей силы.

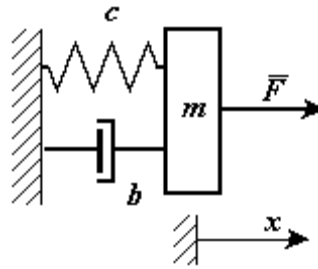


Рис.40

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m , закрепленной на упругом элементе и демпфере (рис.40), под действием возмущающей гармонической силы имеет вид:

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = F_0 \cdot e^{i\omega t}$$

Задавая решение уравнения в виде: $x(t) = x_0 \cdot e^{i\omega t}$ и подставляя его в дифференциальное уравнение получим алгебраическое уравнение для определения амплитуды вынужденных колебаний.

$$-m \cdot \omega^2 \cdot x_0 + i \cdot \omega \cdot b \cdot x_0 + c \cdot x_0 = F_0$$

Разделим его на массу и обозначим $\Omega^2 = \frac{c}{m}$, $2 \cdot n = \frac{b}{m}$, тогда $x_0 \cdot (\Omega^2 - \omega^2 + i \cdot \omega \cdot 2 \cdot n) = F_0 / m$ и окончательно

$$x_0 = \frac{F_0 / m}{\Omega^2 - \omega^2 + i \cdot \omega \cdot 2 \cdot n} - \text{амплитуда вынужденных колебаний.}$$

Ω - частота собственных колебаний

Материальная точка колеблется с амплитудой x_0 и частотой возмущающей силы ω .

Построим зависимость модуля амплитуды $|x_0|$ от частоты возмущающей силы ω (рис.41).

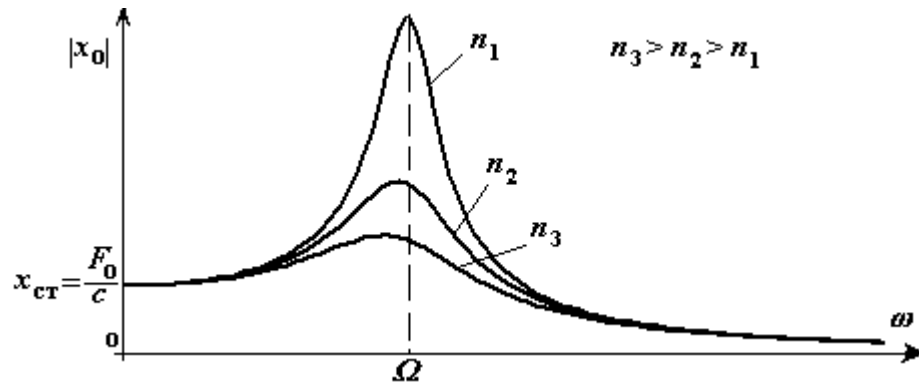


Рис.41

Модуль амплитуды вынужденных колебаний возрастает от $x_{ст} = \frac{F_{ст}}{c}$ (при $\omega = 0$) до некоторой величины, а затем убывает до нуля (при $\omega \rightarrow \infty$).

Лекция 4. Динамика системы и твердого тела.

Механическая система. Силы внешние и внутренние.

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных.

Материальное абсолютно твердое тело мы также будем рассматривать как систему материальных точек, образующих это тело и связанных между собой так, что расстояния между ними не изменяются, все время остаются постоянными.

Классическим примером механической системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения. Другим примером механической системы может служить любая машина или механизм, в которых все тела связаны шарнирами, стержнями, тросами, ремнями и т.п. (т.е. различными геометрическими связями). В этом случае на тела системы действуют силы взаимного давления или натяжения, передаваемые через связи.

Совокупность тел, между которыми нет никаких сил взаимодействия (например, группа летящих в воздухе самолетов), механическую систему не образует.

В соответствии со сказанным, силы, действующие на точки или тела системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.

Внутренними называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы. Будем обозначать внешние силы символом - \vec{F}^e , а внутренние - \vec{F}^i .

Как внешние, так и внутренние силы могут быть в свою очередь или *активными*, или *реакциями связей*.

Реакции связей или просто – *реакции*, это силы которые ограничивают движение точек системы (их координаты, скорость и др.). В статике это были силы заменяющие связи. В динамике для них вводится более общее определение.

Активными или задаваемыми силами называются все остальные силы, все кроме реакций.

Необходимость этой классификации сил выяснится в следующих главах.

Разделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем. Например, если рассматривать движение всей солнечной системы в целом, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; при изучении же движения Земли по её орбите вокруг Солнца та же сила будет рассматриваться как внешняя.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. *Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.* В самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис.31) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами \vec{F}_{12}^i и \vec{F}_{21}^i , сумма которых равна нулю. Так как аналогичный результат имеет место для любой пары точек системы, то

$$\sum \vec{F}_k^i = 0.$$



Рис.31

2. *Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.* Действительно, если взять произвольный центр O ,

то из рис.18 видно, что $\vec{m}_0(\vec{F}_{12}^i) + \vec{m}_0(\vec{F}_{21}^i) = 0$. Аналогичный результат получится при вычислении моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^i) = 0 \quad \text{или} \quad \sum m_k(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Из доказанных свойств не следует однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к *разным* материальным точкам или телам и могут вызывать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенными внутренние силы будут тогда, когда рассматриваемая система представляет собою абсолютно твердое тело.

Масса системы. Центр масс.

Движение системы, кроме действующих сил, зависит также от её суммарной массы и распределения масс. *Масса системы* равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему

$$M = \sum m_k.$$

В однородном поле тяжести, для которого $g = const$, вес любой частицы тела будет пропорционален ее массе. Поэтому о распределении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести. Преобразуем формулы, определяющие координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{\sum P_k x_k}{P}, \quad y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P}, \quad z_c = \frac{\sum P_k z_k}{P}. \quad (1)$$

В полученные равенства входят только массы m_k материальных точек (частиц), образующих тело, и координаты x_k, y_k, z_k этих точек. Следовательно, положение точки C (x_c, y_c, z_c) действительно характеризует распределение масс в теле или в любой механической системе, если под m_k, x_k, y_k, z_k понимать соответственно массы и координаты точек этой системы.

Геометрическая точка C , координаты которой определяются указанными формулами, называется *центром масс* или *центром инерции системы*.

Положение центра масс определяется его радиус-вектором \vec{r}_c

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M},$$

где \vec{r}_k - радиус-векторы точек, образующих систему.

Хотя положение центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, находящегося в однородном поле тяжести, понятия эти не являются тождественными. Понятие о центре тяжести, как о точке, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, по существу имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие же о центре масс, как о характеристике распределения масс в системе, имеет смысл для любой системы материальных точек или тел, причем, это понятие сохраняет свой смысл независимо от того, находится ли данная система под действием каких-нибудь сил или нет.

Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции.

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например (рис.32), если расстояния h от оси Oz каждого из одинаковых шаров A и B увеличить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это скажется на движении системы (вращение вокруг оси Oz при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

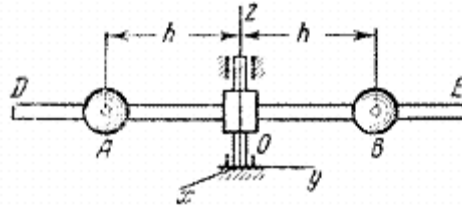


Рис.32

Поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс - момент инерции. *Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси*

$$I_Z = \sum m_k h_k^2$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Заметим также, что момент инерции тела – это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения.

Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т.е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении*.

Согласно формуле момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии h от оси, $I_Z = mh^2$.

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. *Радиусом инерции* тела относительно оси Oz называется линейная величина $\rho_{ин}$, определяемая равенством

$$I_Z = M \cdot \rho_{ин}^2,$$

где M - масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси Oz той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве $I_Z = \sum m_k h_k^2$, обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm = \rho dV$, где ρ - плотность, а V -объем, получим

$$I_Z = \int_{(V)} h^2 dm \quad \text{или} \quad I_Z = \int_{(V)} \rho h^2 dV$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела.

Моменты инерции некоторых однородных тел:

1. Тонкий однородный стержень длины l и массы M . Вычислим его момент инерции относительно оси Az , перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец A (рис. 33).

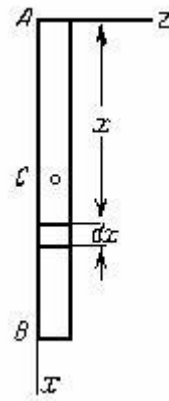


Рис.33

Направим вдоль AB координатную ось Ax . Тогда для любого элементарного отрезка длины dx величина $h=x$, а масса $dm = p_1 dx$, где $p_1 = M/l$ - масса единицы длины стержня. В результате

$$I_A = \int_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 \frac{l^3}{3}.$$

Заменяя здесь ρ_1 его значением, найдем окончательно:

$$I_A = \frac{1}{3} M l^3$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиуса R и массы M . Найдем его момент инерции относительно оси Cz , перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр (рис.34,а). Так как все точки кольца находятся от оси Cz на расстоянии $h_k=R$, то

$$I_C = \sum m_k R^2 = (\sum m_k) R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца $I_C = MR^2$.

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массы M и радиуса R относительно ее оси.

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиуса R и массы M . Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси Cz , перпендикулярной к пластине и проходящей через ее центр (см. рис.34,а). Для этого выделим элементарное кольцо радиуса r и ширины dr (рис.34,б).

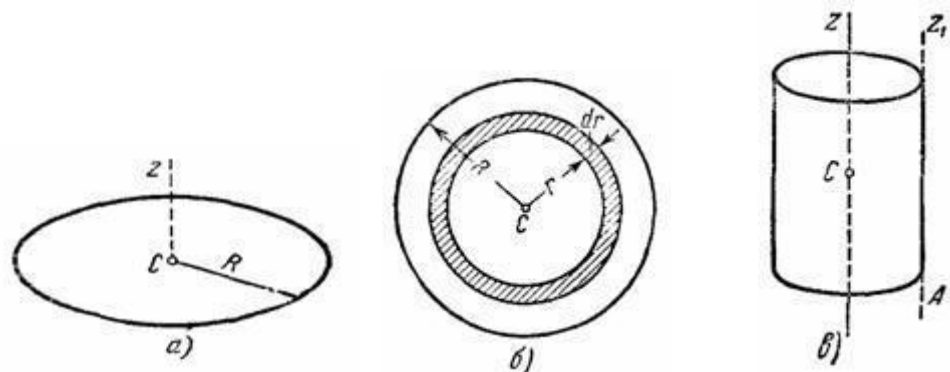


Рис.34

Площадь этого кольца равна $2\pi r dr$, а масса $dm = \rho_2 2\pi r dr$, где $\rho_2 = \frac{M}{\pi R^2}$ - масса единицы площади пластины. Тогда для выделенного элементарного кольца будет

$$dI_C = r^2 dm = 2\pi \rho_2 r^3 dr,$$

$$I_C = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho_2 R^4$$

а для всей пластины . Заменяя здесь ρ_2 его значением,

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2.$$

найдем окончательно

Такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции I_z однородного круглого цилиндра массы M и радиуса R относительно его оси Oz (рис.34,в).

4. Прямоугольная пластина, конус, шар. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел:

а) сплошная прямоугольная пластина массы M со сторонами $AB = a$ и $BD = b$ (ось x направлена вдоль стороны AB , ось y - вдоль BD):

$$I_x = \frac{1}{3}Mb^2, \quad I_y = \frac{1}{3}Ma^2,$$

б) прямой сплошной круглый конус массы M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса):

$$I_z = 0,3MR^2;$$

г) сплошной шар массы M и радиуса R (ось z направлена вдоль диаметра): $I_z = 0,4MR^2$.

Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса.

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, вообще говоря, разными. Покажем, как зная момент инерции относительно какой-нибудь одной оси, проведенной в теле, найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной.

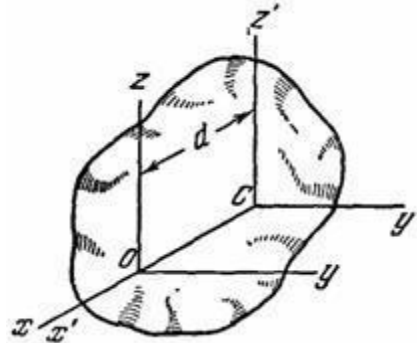


Рис.35

Проведем через центр масс C тела произвольные оси $Cx'y'z'$, а через любую точку O на оси Cx' - оси $Oxyz$, такие, что $Oy \parallel Cy'$, $Oz \parallel Cz'$ (рис. 35). Расстояние между осями Cz' и Oz обозначим через d . Тогда -

$$I_{Oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$I_{Cz'} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2),$$

но, как видно из рисунка, для любой точки тела $x_k = x_k' - d$ или $x_k^2 = x_k'^2 + d^2 - 2x_k' d$, а $y_k = y_k'$. Подставляя эти значения x_k, y_k , в выражение для I_{Oz} и вынося общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$I_{Oz} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + (\sum m_k) d^2 - 2d (\sum m_k x_k').$$

В правой части равенства первая сумма равна $I_{Cz'}$, а вторая - массе тела M . Найдем значение третьей суммы. На основании формул для координат центра масс $\sum m_k x_k' = Mx'_C$. Так как в нашем случае точка C является началом координат, то $x_C = 0$

и, следовательно, $\sum m_k x'_k = 0$. Окончательно получаем:

$$I_{OZ} = I_{CZ} + Md^2.$$

Формула выражает следующую теорему Гюйгенса:

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

Момент инерции тела относительно произвольной оси.

Найдем момент инерции тела относительно оси u , проходящей через некоторую точку O (рис. 36).

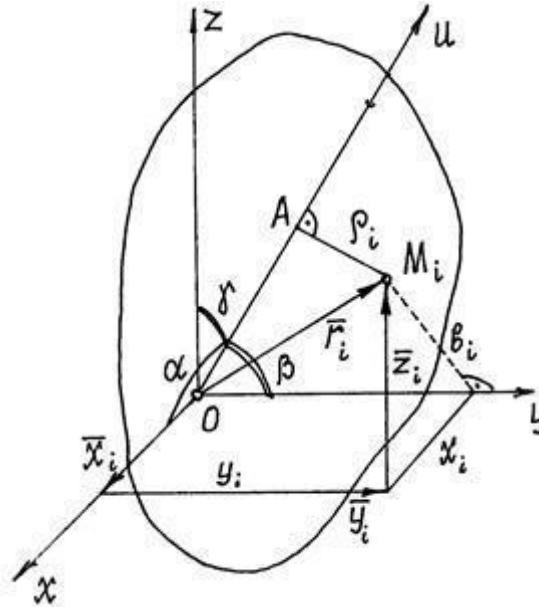


Рис.36

По определению момент инерции $I_u = \sum m_i \rho_i^2$.

Поместим в точку O начало координатных осей x, y, z . Из прямоугольного треугольника OAM_i следует $\rho_i^2 = r_i^2 - OA^2$, где $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. И так как радиус-вектор точки M_i : $\vec{r}_i = \vec{x}_i + \vec{y}_i + \vec{z}_i$, то, проектируя это равенство на ось u , получим $AO = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma$ (α, β, γ - углы между осью u и осями x, y, z).

Как известно из тригонометрии $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= r_i^2 - OA^2 = r_i^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 = \\ &= x_i^2 \cos^2 \alpha + x_i^2 \cos^2 \beta + x_i^2 \cos^2 \gamma + y_i^2 \cos^2 \alpha + y_i^2 \cos^2 \beta + y_i^2 \cos^2 \gamma + z_i^2 \cos^2 \alpha + \\ &+ z_i^2 \cos^2 \beta + z_i^2 \cos^2 \gamma - x_i^2 \cos^2 \alpha - y_i^2 \cos^2 \beta - z_i^2 \cos^2 \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - \\ &- 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned}$$

И, группируя подобные члены, содержащие косинусы одинаковых углов, получим:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= (y_i^2 + z_i^2) \cos^2 \alpha + (x_i^2 + z_i^2) \cos^2 \beta + (x_i^2 + y_i^2) \cos^2 \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - \\ &- 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned}$$

Но $y_i^2 + z_i^2 = a_i^2$; $x_i^2 + z_i^2 = b_i^2$; $x_i^2 + y_i^2 = c_i^2$; где a_i, b_i, c_i - расстояния от точки M_i до осей x, y, z , соответственно. Поэтому

$$I_u = \sum m_i \rho_i^2 = \left(\sum m_i a_i^2 \right) \cos^2 \alpha + \left(\sum m_i b_i^2 \right) \cos^2 \beta + \left(\sum m_i c_i^2 \right) \cos^2 \gamma -$$

$$- 2 \left(\sum m_i x_i y_i \right) \cos \alpha \cos \beta - 2 \left(\sum m_i y_i z_i \right) \cos \beta \cos \gamma - 2 \left(\sum m_i x_i z_i \right) \cos \alpha \cos \gamma$$

или

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cdot \cos \beta -$$

$$2I_{yz} \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cdot \cos \gamma, \quad (2)$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно осей координат; I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} – центробежные моменты инерции относительно осей отмеченных в индексах.

Если два центробежных момента инерции, оба содержащих в индексах названия какой-нибудь одной оси, равны нулю, то эта ось называется *главной осью инерции*. Например, если $I_{yz} = 0$ и $I_{xz} = 0$, то ось z – главная ось инерции.

Так как все моменты инерции зависят от того, где находится точка O , от выбора начала координат, то обязательно надо указать для какой точки определены эти моменты инерции. Если начало координат взято в центре масс C , то все главные оси инерции называются *главными центральными осями инерции*.

Если в данной точке координатные оси являются главными осями инерции (центробежные моменты инерции относительно их равны нулю), то формула (2) упрощается:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma. \quad (3)$$

Иногда по некоторым признакам нетрудно найти главные оси инерции тела.

1. Если у однородного тела имеется ось симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Действительно. Направим координатную ось z по оси симметрии. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно отыскать точку с координатами $(-x_i, -y_i, -z_i)$ и поэтому центробежные моменты инерции $I_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$ и $I_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$. Значит ось z – главная ось инерции, и центральная ось, т.к. центр масс, как известно, находится на оси симметрии. Причём, эта ось будет главной для любой точки расположенной на оси симметрии.

2. Если у однородного тела имеется плоскость симметрии, то любая ось перпендикулярная ей будет главной осью инерции для всех точек этой плоскости.

Направим ось z перпендикулярно плоскости симметрии из любой её точки O , назначив там начало координат. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно найти симметричную ей точку с координатами $(x_i, y_i, -z_i)$. Поэтому центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz} будут равны нулю. Значит ось z – главная ось инерции.

Пример 9. Определим момент инерции диска относительно оси u , расположенной под углом γ к оси симметрии диска z (рис.37).

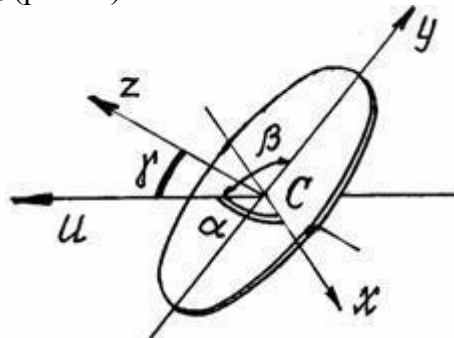


Рис.37

Оси x, y и z – главные центральные оси инерции, т.к. они являются осями симметрии.

Тогда $I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$, где γ – угол между осями u и z ; угол β – угол между осями u и y , равный $(90^\circ + \gamma)$; угол α – угол между осями u и x , равный 90° . По-

этому

$$\begin{aligned} I_{\omega} &= I_x \cos^2 90^\circ + I_y \cos^2 (90^\circ + \gamma) + I_z \cos^2 \gamma = I_y \sin^2 \gamma + I_z \cos^2 \gamma = \\ &= \frac{1}{4} Mr^2 \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} Mr^2 \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} Mr^2 (\sin^2 \gamma + 2 \cos^2 \gamma). \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения движения системы.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_k . Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных и реакций связей) через \vec{F}_k^e , а равнодействующую всех внутренних сил - через \vec{F}_k^i . Если точка имеет при этом ускорение \vec{a}_k , то по основному закону динамики

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения, из которых можно определить закон движения каждой точки системы, называются *дифференциальными уравнениями движения системы* в векторной форме. Урав-

нения являются дифференциальными, так как $\vec{a}_k = \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}$; входящие в правые части уравнений силы будут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проектируя на какие-нибудь координатные оси, мы можем получить дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы состояло бы в том, чтобы, зная заданные силы, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить таким путем закон движения каждой из точек системы в отдельности.

Однако такой путь решения обычно не применяется по двум причинам. Во-первых, этот путь слишком сложен и почти всегда связан с непреодолимыми математическими трудностями. Во-вторых, в большинстве случаев при решении задач механики бывает достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы в целом, а не движение каждой из ее точек в отдельности. Эти суммарные характеристики определяются с помощью *общих теорем* динамики системы, к изучению которых мы и перейдем.

Основная роль уравнений состоит в том, что они, или следствия из них, являются исходными для получения соответствующих общих теорем.

Общие теоремы динамики механической системы: теоремы о движении центра масс механической системы и об изменении количества движения, теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии, - являются следствием основного уравнения динамики. Данные теоремы рассматривают не движение отдельных точек и тел, входящих в механическую систему, а некоторые интегральные характеристики, такие как движение центра масс механической системы, ее количество движения, кинетический момент и кинетическую энергию. В результате из рассмотрения исключаются неизвестные внутренние силы, а в ряде случаев и реакции связей, что существенно упрощает решения задачи.

Теорема о движении центра масс.

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого те-

ла), достаточно знать закон движения ее центра масс. Например, если бросить камень в цель, совсем не нужно знать как он будет кувыркаться во время полета, важно установить попадет он в цель или нет. Для этого достаточно рассмотреть движение какой-нибудь точки этого тела.

Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим:

$$m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы для радиус-вектора центра масс имеем:

$$\sum m_k \vec{r}_k = M \vec{r}_c$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\sum m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2}$$

или

$$\sum m_k \vec{a}_k = M \vec{a}_c$$

где \vec{a}_c - ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\sum \vec{F}_k^i = 0$, то, подставляя все найденные значения, получим окончательно:

$$M \vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e \quad (4)$$

Уравнение и выражает теорему о движении центра масс системы: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*. Сравнивая с уравнением движения материальной точки, получаем другое выражение теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*.

Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum F_{kz}^e$$

Эти уравнения представляют собою *дифференциальные уравнения движения центра масс* в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1) Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений видно, что *решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела*, т.е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс.

2) Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.

Так движение автомобиля по горизонтальной плоскости может происходить только под действием внешних сил, сил трения, действующих на колеса со стороны дороги. И торможение автомобиля тоже возможно только этими силами, а не трением между тормозными колодками и тормозным барабаном. Если дорога гладкая, то как бы не затормаживали колеса, они будут скользить и не остановят автомобиль.

Или после взрыва летящего снаряда (под действием внутренних сил) части, осколки его, разлетятся так, что центр масс их будет двигаться по прежней траектории.

Теоремой о движении центра масс механической системы следует пользоваться для решения задач механики, в которых требуется:

- по силам, приложенным к механической системе (чаще всего к твердому телу), определить закон движения центра масс;
- по заданному закону движения тел, входящих в механическую систему, найти реакции внешних связей;
- по заданному взаимному движению тел, входящих в механическую систему, определить закон движения этих тел относительно некоторой неподвижной системы отсчета.

С помощью этой теоремы можно составить одно из уравнений движения механической системы с несколькими степенями свободы.

При решении задач часто используются следствия из теоремы о движении центра масс механической системы.

Следствие 1. Если главный вектор внешних сил, приложенных к механической системе, равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Так как ускорение центра масс равно нулю, $\vec{a}_C = 0$.

Следствие 2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то центр масс системы или не изменяет своего положения относительно данной оси, или движется относительно нее равномерно.

Например, если на тело начнут действовать две силы, образующие пару сил (рис.38), то центр масс C его будет двигаться по прежней траектории. А само тело будет вращаться вокруг центра масс. И неважно, где приложена пара сил.

Кстати, в статике мы доказывали, что действие пары на тело не зависит от того, где она приложена. Здесь мы показали, что вращение тела будет вокруг центральной оси C .

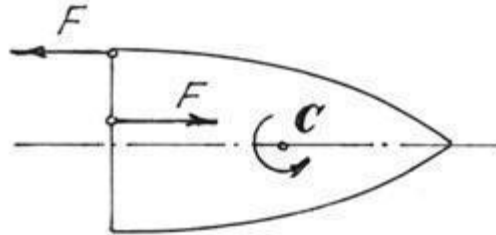


Рис.38

Пример 10. Человек перешел с кормы лодки на нос. Определим перемещение лодки s (рис.39). Вес лодки – P_1 , человека – P_2 , длина лодки – l . Сопротивление движению не учитываем.

Определим движение центра масс C системы, состоящей из человека и лодки.

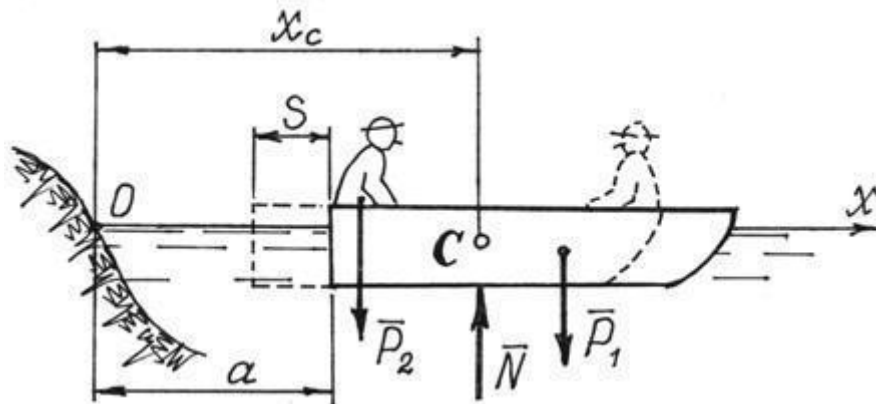


Рис.39

Составляем дифференциальное уравнение движения центра масс по оси x : $M\ddot{x}_C = \sum X_i^{(e)}$. Но так как проекции внешних сил \vec{P}_1 , \vec{P}_2 и \vec{N} на ось x равны нулю,

то $\ddot{x}_C = 0$. Проинтегрировав дважды это уравнение, получим $\dot{x}_C = C_1$ и $x_C = C_1 t + C_2$. Но в начале движения система была неподвижна $v_C = \dot{x}_C = 0$. Значит, $x_C = \text{const}$.

Найдем координату x_C в первом положении системы, когда человек находился на корме, как координату центра тяжести:

$$x_C = \frac{F_1(a + 0,5l) + F_2 a}{F_1 + F_2} = a + \frac{1}{2} \frac{F_1}{F_1 + F_2} l.$$

И во втором положении, когда человек перейдет на нос лодки:

$$x_C = \frac{F_1(a - s + 0,5l) + F_2(a - s + l)}{F_1 + F_2} = a - s + \frac{F_1 + 2F_2}{2(F_1 + F_2)} l.$$

Приравниваем координаты, т.к. $x_C = \text{const}$,

$$a + \frac{1}{2} \frac{F_1}{F_1 + F_2} l = a - s + \frac{F_1 + 2F_2}{2(F_1 + F_2)} l.$$

Из этого равенства находим перемещение лодки

$$s = \frac{F_1 + 2F_2}{2(F_1 + F_2)} l - \frac{1}{2} \frac{F_1}{F_1 + F_2} l = \frac{F_2}{F_1 + F_2} l.$$

Пример 11. Рассмотрим систему, которая состоит из однородного стержня OA и кольца M . Стержень длины L и массы m_1 вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O (рис.40). Кольцо массы m может без трения скользить по стержню. К нему прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой равен C . Положение кольца на стержне определяется координатой $x_1 = OM$. Определим проекции реакции опоры O на оси неподвижной декартовой системы координат Oxy .

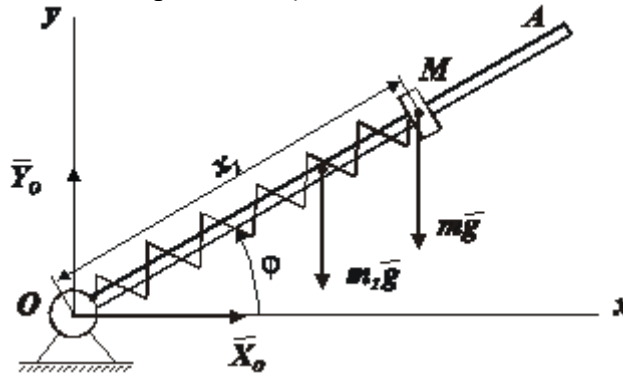


Рис.40

Запишем уравнение теоремы о движении центра масс для рассматриваемой механической системы в векторном виде.

$$(m_1 + m)\vec{a}_C = \vec{X}_O + \vec{Y}_O + m_1 \vec{g} + m \vec{g}. \quad (5)$$

Силы взаимодействия кольца со стержнем и пружиной есть внутренние силы системы, поэтому в уравнении они в явном виде не присутствуют. Проектируя уравнение (5) на оси системы координат Oxy , получаем

$$\begin{aligned} (m_1 + m)\ddot{x}_C &= X_O, \\ (m_1 + m)\ddot{y}_C &= Y_O - (m_1 + m)g. \end{aligned} \quad (6)$$

По формулам (1) находим координаты центра масс системы

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{0.5m_1 L \cos \varphi + m x_1 \cos \varphi}{m_1 + m}, \\y_c &= \frac{0.5m_1 L \sin \varphi + m x_1 \sin \varphi}{m_1 + m},\end{aligned}\quad (7)$$

затем, дифференцируя (7), запишем

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= \frac{-0.5m_1 L \dot{\varphi} \sin \varphi + m \dot{x}_1 \cos \varphi - m x_1 \dot{\varphi} \sin \varphi}{m_1 + m}, \\ \dot{y}_c &= \frac{0.5m_1 L \dot{\varphi} \cos \varphi + m \dot{x}_1 \sin \varphi + m x_1 \dot{\varphi} \cos \varphi}{m_1 + m},\end{aligned}$$

и, наконец, вычисляя вторые производные, получим

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= \frac{-0.5m_1 L \ddot{\varphi} \sin \varphi - 0.5m_1 L \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + m \ddot{x}_1 \cos \varphi - 2m \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + m x_1 \ddot{\varphi} \sin \varphi + m x_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi}{m_1 + m} \\ (8) \quad \ddot{y}_c &= \frac{0.5m_1 L \ddot{\varphi} \cos \varphi - 0.5m_1 L \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + m \ddot{x}_1 \sin \varphi + 2m \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + m x_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi - m x_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{m_1 + m}\end{aligned}$$

Подставляя (8) в уравнения (6), получаем проекции реакции в опоре O на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned}X_0 &= -\left(\frac{m_1 L}{2} + m x_1\right) \left(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi\right) \dot{\varphi} \sin \varphi + m \ddot{x}_1 \cos \varphi - 2m \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ Y_0 &= (m_1 + m)g + \left(\frac{m_1 L}{2} + m x_1\right) \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi\right) + m \ddot{x}_1 \sin \varphi + 2m \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Если в полученные уравнения подставить значения обобщенных координат и ускорений для какого-либо момента времени, можно найти величины искомых проекций.

Теорема об изменении кинетического момента.

Кинетический момент механической системы \bar{K}_O относительно неподвижного центра O является мерой движения системы вокруг этого центра. При решении задач обычно применяется не сам вектор \bar{K}_O , а его проекции на оси неподвижной системы координат, которые называются кинетическими моментами относительно оси. Например, K_z - кинетический момент системы относительно неподвижной оси Oz .

Кинетический момент механической системы складывается из кинетических моментов точек и тел, входящих в эту систему. Рассмотрим способы определения кинетического момента материальной точки и твердого тела при различных случаях их движения.

Для материальной точки с массой m_k , имеющей скорость \bar{v}_k , кинетический момент относительно некоторой оси Oz определяется как момент вектора количества движения этой точки относительно выбранной оси:

$$K_z = m_z (m_k \bar{v}_k) = \bar{r}_k \times (m_k \bar{v}_k).$$

Кинетический момент точки считается положительным, если со стороны положительного направления оси движение точки происходит против часовой стрелки.

Если точка совершает сложное движение, для определения ее кинетического момента следует вектор количества движения $m_k \bar{v}_k$ рассматривать как сумму количеств относительного и переносного движений (рис.41)

$$m_k \bar{V}_k = m_k \bar{V}_{kr} + m_k \bar{V}_{ke}.$$

Тогда

$$K_z = m_z (m_k \bar{V}_k) = m_z (m_k \bar{V}_{kr}) + m_z (m_k \bar{V}_{ke}).$$

Но $V_{ke} = \omega h_e$, где h_e - расстояние от точки до оси вращения, и

$$m_z (m_k \bar{V}_{ke}) = m_k \omega h_e \cdot h_e = m_k h_e^2 \omega.$$

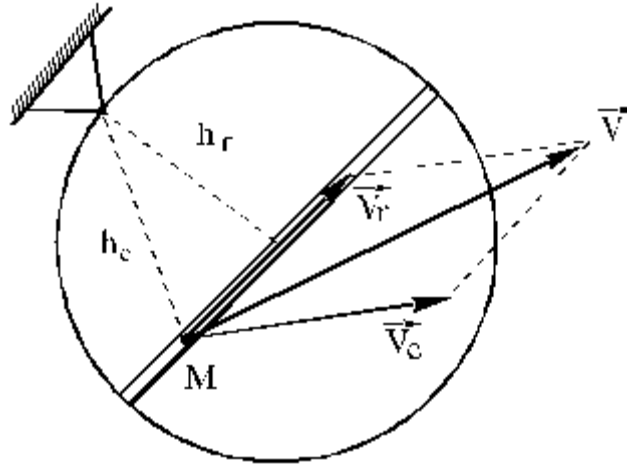


Рис. 41

Вторую составляющую вектора кинетического момента $m_z (m_k \bar{V}_{kr})$ можно определить так же, как и момент силы относительно оси. Как и для момента силы, величина $m_z (m_k \bar{V}_{kr})$ равна нулю, если вектор относительной скорости лежит в одной плоскости с осью переносного вращения.

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижного центра можно определить как сумму двух составляющих: первая из них характеризует поступательную часть движения тела вместе с его центром масс, вторая - движение системы вокруг центра масс:

$$\bar{K}_O = \bar{m}_O (M \bar{V}_C) + \bar{K}_{r,c}.$$

Если тело совершает поступательное движение, то вторая составляющая равна нулю

$$\bar{K}_{r,c} = 0.$$

Наиболее просто вычисляется кинетический момент твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси

$$K_z = I_z \omega,$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ее движении вокруг неподвижного центра формулируется следующим образом: полная производная по времени от вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра O по величине и направлению равна главному моменту внешних сил, приложенных к механической системе, определенному относительно того же центра

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e,$$

$$\bar{M}_O^e = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O (\bar{F}_k^e) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e$$

где \bar{M}_O^e - главный момент всех внешних сил относительно центра O .

При решении задач, в которых рассматриваются тела, вращающиеся вокруг неподвижной оси, используют теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = \sum_{k=1}^n m_k (\bar{F}_k^e).$$

Как и для теоремы о движении центра масс, теорема об изменении кинетического момента имеет следствия.

Следствие 1. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается неизменным.

Следствие 2. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается неизменным.

Теорема об изменении кинетического момента применяется для решения задач, в которых рассматривается движение механической системы, состоящей из центрального тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и одного или нескольких тел, движение которых связано с центральным. Связь может осуществляться при помощи нитей, тела могут перемещаться по поверхности центрального тела или в его каналах за счет внутренних сил. С помощью данной теоремы можно определить зависимость закона вращения центрального тела от положения или движения остальных тел.

Пример 12. Рассмотрим применение теоремы об изменении кинетического момента для определения внешнего момента, обеспечивающего равномерное движение ведущего звена механической системы. Механическая система (рис.42) состоит из однородной трубки CD длиной L , массы m_1 , образующей с осью вращения прямой угол и шарика массы m .

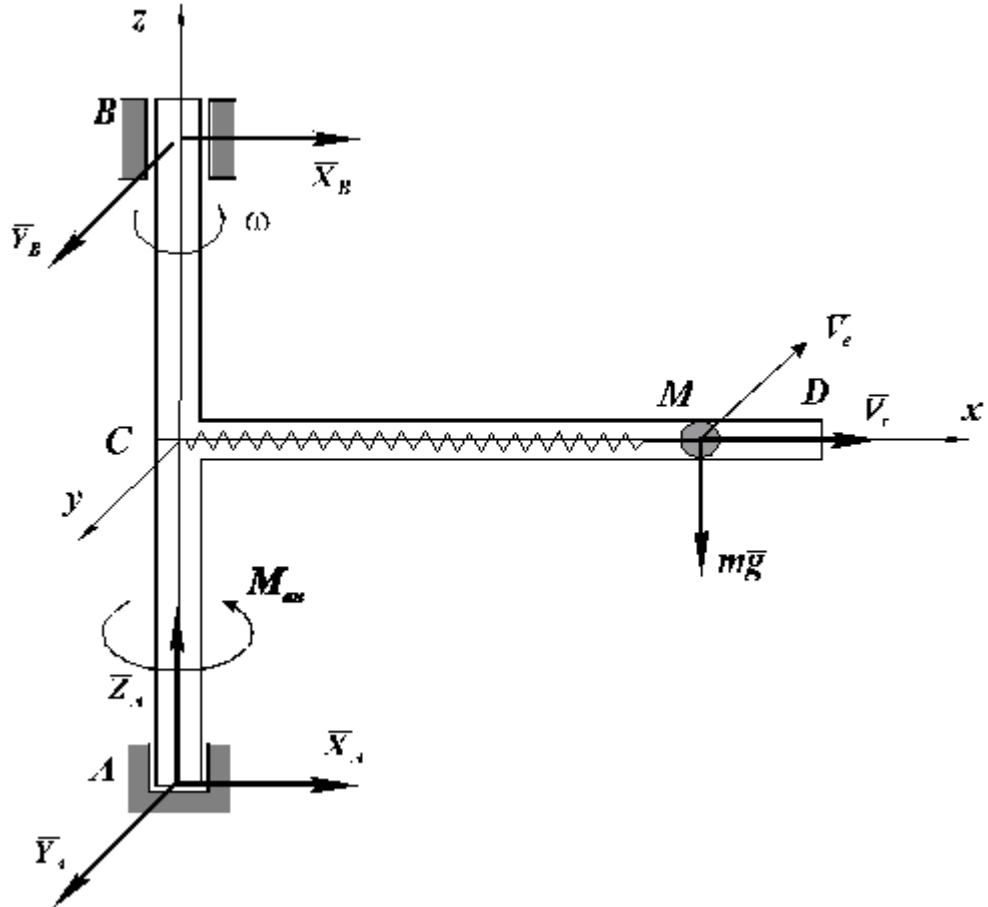


Рис.42

В момент времени $t=0$ под действием внешнего момента $M_{вп}$ трубка начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Необходимо определить, каким должен быть этот момент, чтобы сохранялась постоянная угловая скорость вращения трубки CD . При решении пренебречь трением, массой стержня AB и пружины.

Применим теорему об изменении кинетического момента, выбрав за ось z ось вращения AB ,

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \left(\bar{F}_k^e \right) \quad (9)$$

Определим кинетический момент рассматриваемой системы относительно оси Az . Трубка (однородный прямолинейный стержень) совершает вращение вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, имеет кинетический момент

$$K_{\text{тр}} = J_z \omega$$

$$J_z = \frac{m_1 L^2}{3}$$

где J_z - осевой момент инерции трубки,

ω - угловая скорость вращения.

Шарик M совершает сложное движение - относительно вдоль трубки со скоростью $V_r = \dot{x}$ и переносное вместе с трубкой. Переносная скорость \bar{V}^e перпендикулярна трубке и по модулю равна $V^e = x\omega$. При определении переносной скорости за начало отсчета координаты x принята точка C трубки, лежащая на оси вращения. Кинетический момент шарика относительно оси z равен $K_{\text{ш}} = m_2 x^2 \omega$, т.к. вектор $m_2 \bar{V}_r$ пересекает ось z и его момент относительно этой оси равен нулю.

Кинетический момент всей системы равен

$$K_z = \left[\frac{m_1 L^2}{3} + m_2 x^2 \right] \omega \quad (10)$$

Определим главный момент внешних сил относительно оси z . Силы тяжести трубки $m_1 g$ и шарика $m_2 g$ параллельны оси вращения и момента относительно этой оси не создают. Реакции опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ пересекают ось вращения и момент этих сил относительно оси z также равен нулю. Силы динамического взаимодействия между шариком и трубкой, включая упругую силу пружины $F_{\text{упр}}$, есть силы внутренние. Поэтому

$$M_z^e = M_{\text{вп}}, \quad (11)$$

где $M_{\text{вп}}$ - внешний момент, обеспечивающий равномерное вращение трубки.

Подставляя (8) и (9) в уравнение теоремы об изменении кинетического момента системы (7), получаем:

$$\left[\frac{m_1 L^2}{3} + m_2 x^2 \right] \frac{d\omega}{dt} + 2m_2 x \dot{x} \omega = M_{\text{вп}}$$

откуда следует, что искомый внешний момент, обеспечивающий равномерное вращение трубки должен быть равен

$$M_{\text{вп}} = 2m_2 x \dot{x} \omega$$

Если в полученное соотношение подставить численные значения координаты x и относительной скорости \dot{x} , которые были получены в первом разделе курсовой работы, можно найти значение вращающего момента для любого момента времени и построить график изменения $M_{\text{вп}}$ на исследуемом интервале времени.

Закон сохранения движения центра масс.

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^e = 0.$$

Тогда из уравнения $M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e$ следует, что $\vec{a}_c = 0$ или $\vec{V}_c = const$. Следовательно, если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. равномерно и прямолинейно. В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое. Действие внутренних сил, как мы видим, движение центра масс системы изменить не может.

2) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось Ox) равна нулю:

$$\sum F_{kx}^e = 0.$$

Тогда уравнение $M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e$, дает: $\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0$ или $\frac{dx_c}{dt} = V_{cx} = const$.

Следовательно, если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. В частности, если в начальный момент $V_{cx} = 0$, то и в любой последующий момент $V_{cx} = 0$, т.е. центр масс системы в этом случае вдоль оси Ox перемещаться не будет ($x_c = const$).

Все эти результаты выражают собою закон сохранения движения центра масс системы. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие его приложения.

а) Движение центра масс солнечной системы. Так как притяжением звезд можно практически пренебречь, то можно считать, что на солнечную систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно, в первом приближении ее центр масс движется в мировом пространстве равномерно и прямолинейно.

б) Действие пары сил на тело. Если на свободное твердое тело начнет действовать пара сил (\vec{F}, \vec{F}') , то геометрическая сумма этих внешних сил будет равна нулю ($\vec{F} + \vec{F}' = 0$). Следовательно, центр масс C тела, если он вначале был неподвижен, должен остаться неподвижным и при действии пары. Таким образом, где бы к свободному твердому телу ни была приложена пара сил, тело начнет вращаться вокруг своего центра масс.

в) Движение по горизонтальной плоскости. При отсутствии трения человек с помощью своих мускульных усилий (силы внутренние) не мог бы двигаться вдоль горизонтальной плоскости, так как в этом случае сумма проекций на любую горизонтальную ось Ox всех приложенных к человеку внешних сил (сила тяжести и реакция плоскости) будет равна нулю и центр масс человека вдоль плоскости перемещаться не будет ($x_c = const$).

Если, например, человек вынесет правую ногу вперед, то левая его нога скользнет назад, а общий центр масс останется на месте.

При наличии же трения скольжению левой ноги назад будет препятствовать сила трения, которая в этом случае будет направлена вперед. Эта сила и будет той внешней силой, которая позволяет человеку перемещаться в сторону ее действия (в данном случае вперед).

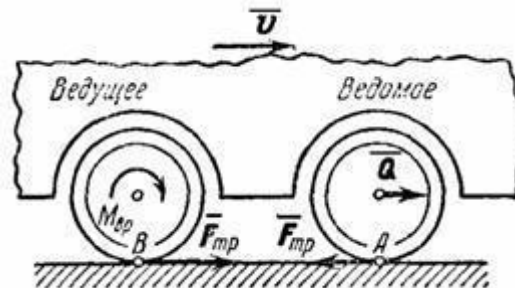


Рис.43

Аналогично происходит движение паровоза или автомобиля. Сила давления пара или газа в двигателе является силой внутренней и сама по себе не может переместить центр масс

системы. Движение происходит потому, что двигатель передает соответствующим колесам, называемыми ведущими, вращающий момент. При этом точка касания B ведущего колеса (рис.43) стремится скользить влево. Тогда на колесо будет действовать сила трения, направленная вправо. Эта внешняя сила и позволит центру тяжести паровоза или автомобиля двигаться вправо. Когда этой силы нет или когда она недостаточна для преодоления сопротивления, испытываемого ведомыми колесами, движения вправо не будет; ведущие колеса будут при этом вращаться на месте (буксовать).

Лекция 5. Количество движения системы.

В предыдущих лекциях излагались методы определения движения материальной системы, которые сводились к составлению дифференциальных уравнений, как правило, второго порядка. И решение их оказывалось не всегда простым.

Если ввести новые обобщенные понятия, характеризующие свойства и движение системы в целом, то эти трудности нередко можно обойти. К ним относятся понятия о центре масс и кинетической энергии, которые уже нам знакомы, понятия о количестве движения материальной системы и моменте количества движения.

Теоремы, определяющие изменение этих характеристик, позволяют получить более полное представление о движении материальной системы.

Количество движения системы.

Количеством движения системы будем называть векторную величину \vec{Q} , равную геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы (рис.44):

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k.$$

Из чертежа видно, что независимо от величин скоростей точек системы (если только эти скорости не параллельны) вектор \vec{Q} может принимать любые значения и даже оказаться равным нулю, когда многоугольник, построенный из векторов $m_k \vec{v}_k$, замкнется. Следовательно, по величине \vec{Q} нельзя полностью судить о характере движения системы.

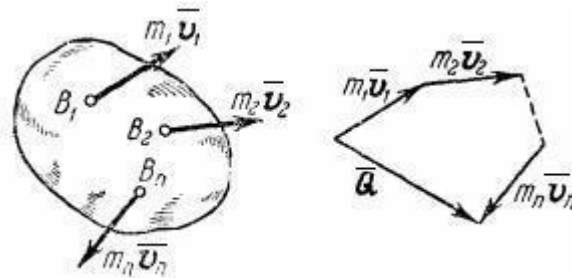


Рис.44

Найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину \vec{Q} , а также уяснить ее смысл.

Из равенства $\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$ следует, что $\sum m_k \vec{r}_k = M \vec{r}_C$.

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = M \frac{d\vec{r}_C}{dt} \quad \text{или} \quad \sum m_k \vec{v}_k = M \vec{v}_C.$$

Отсюда находим, что $\vec{Q} = M \vec{v}_C$,

т.е. количество движения системы равно произведению массы всей системы на ско-

рость ее центра масс. Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина \vec{Q} не будет характеризовать вращательную часть движения вокруг центра масс. Например, для катящегося колеса $\vec{Q} = M\vec{V}_C$, независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс C .

Таким образом, количество движения характеризует только поступательное движение системы. При сложном же движении величина \vec{Q} характеризует только поступательную часть движения системы вместе с центром масс.

Теорема об изменении количества движения.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения и сложим их почленно. Тогда получим:

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i.$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_k \vec{a}_k = \frac{d}{dt} (\sum m_k \vec{V}_k) = \frac{d\vec{Q}}{dt}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e.$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил. В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e.$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент $t = 0$ количество движения системы равно \vec{Q}_0 , а в момент t_1 становится равным \vec{Q}_1 . Тогда, умножая обе части равенства

на dt и интегрируя, получим:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e dt$$

или

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e,$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил.

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e.$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс.

Так как $\vec{Q} = M\vec{V}_C$, то, подставляя это значение в равенство и учитывая, что $\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{a}_C$, мы получим $M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$.

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм.

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

Закон сохранения количества движения.

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum F_k^e = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum F_k^e$ следует, что при этом $Q = const$. Таким образом, если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например Ox) равна нулю:

$$\sum F_{kx}^e = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e$ следует, что при этом $Q_x = const$. Таким образом, если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Эти результаты и выражают закон сохранения количества движения системы. Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут. Рассмотрим некоторые примеры:

а) Явление отдачи или отката. Если рассматривать винтовку и пулю как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет силой внутренней. Эта сила не может изменить суммарное количество движения системы. Но так как пороховые газы, действуя на пулю, сообщают ей некоторое количество движения, направленное вперед, то они одновременно должны сообщить винтовке такое же количество движения в обратном направлении. Это вызовет движение винтовки назад, т.е. так называемую отдачу. Аналогичное явление получается при стрельбе из орудия (откат).

б) Работа гребного винта (пропеллера). Винт сообщает некоторой массе воздуха (или воды) движение вдоль оси винта, отбрасывая эту массу назад. Если рассматривать отбрасываемую массу и самолет (или судно) как одну систему, то силы взаимодействия винта и среды как внутренние не могут изменить суммарное количество движения этой системы. Поэтому при отбрасывании массы воздуха (воды) назад самолет (или судно) получает соответствующую скорость движения вперед, такую, что общее количество движения рассматриваемой системы останется равным нулю, так как оно было нулем до начала движения.

Аналогичный эффект достигается действием весел или гребных колес.

в) Реактивное движение. В реактивном снаряде (ракете) газообразные продукты горения топлива с большой скоростью выбрасываются из отверстия в хвостовой части ракеты (из сопла реактивного двигателя). Действующие при этом силы давления будут силами внутренними, и они не могут изменить суммарное количество движения системы ракета - продукты

горения топлива. Но так как вырывающиеся газы имеют известное количество движения, направленное назад, то ракета получает при этом соответствующую скорость движения вперед.

Главный момент количеств движения системы.

Главным моментом количеств движения (или кинетическом моментом) системы относительно данного центра O называется величина \vec{K}_0 , равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра.

$$\vec{K}_0 = \sum m_k (m_k \vec{V}_k).$$

Аналогично определяются моменты количеств движения системы относительно координатных осей:

$$K_X = \sum m_k (m_k \vec{V}_k)_X, \quad K_Y = \sum m_k (m_k \vec{V}_k)_Y, \quad K_Z = \sum m_k (m_k \vec{V}_k)_Z.$$

При этом K_X, K_Y, K_Z представляют собою одновременно проекции вектора \vec{K}_0 на координатные оси.

Подобно тому, как количество движения системы является характеристикой ее поступательного движения, *главный момент количеств движения системы является характеристикой вращательного движения системы.*

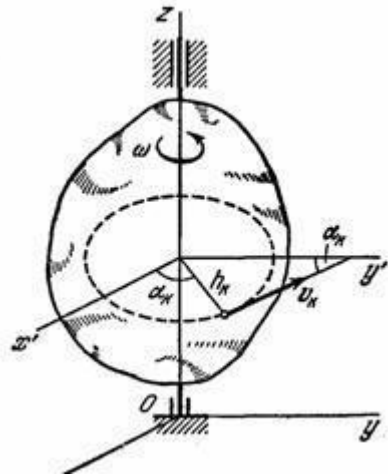


Рис.45

Чтобы уяснить механический смысл величины \vec{K}_0 и иметь необходимые формулы для решения задач, вычислим кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис.45). При этом, как обычно, определение вектора \vec{K}_0 сводится к определению его проекций K_X, K_Y, K_Z .

Найдем сначала наиболее важную для приложений формулу, определяющую величину K_Z , т.е. кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.

Для любой точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии h_k , скорость $v_k = \omega h_k$. Следовательно, для этой точки $m_k (m_k \vec{V}_k) = m_k V_k h_k = m_k \omega h_k^2$. Тогда для всего тела, вынося общий множитель ω за скобку, получим

$$K_Z = \sum m_k (m_k \vec{V}_k)_Z = (\sum m_k h_k^2) \omega.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z . Окончательно находим

$$K_Z = I_Z \omega.$$

Таким образом, *кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую ско-*

рость тела.

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то, очевидно, будет $K_Z = I_{1Z}\omega_1 + I_{2Z}\omega_2 + \dots + I_{nZ}\omega_n$

Легко видеть аналогию между формулами $\vec{Q} = M\vec{V}_c$ и $K_Z = I_Z\omega$: количество движения равно произведению массы (величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении) на скорость; кинетический момент равен произведению момента инерции (величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении) на угловую скорость.

Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов).

Теорема моментов для одной материальной точки будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k , имеющую скорость v_k , то для нее будет

$$\frac{d}{dt} [\overline{m_0(m_k \vec{V}_k)}] = \overline{m_0(\vec{F}_k^e)} + \overline{m_0(\vec{F}_k^i)}$$

где \vec{F}_k^e и \vec{F}_k^i - равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt} [\Sigma \overline{m_0(m_k \vec{V}_k)}] = \Sigma \overline{m_0(\vec{F}_k^e)} + \Sigma \overline{m_0(\vec{F}_k^i)}$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда найдем окончательно:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \Sigma \overline{m_0(\vec{F}_k^e)}$$

Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы: производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси Ox, Oy, Oz , получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \Sigma m_x(\overline{F_k^e}), \quad \frac{dK_y}{dt} = \Sigma m_y(\overline{F_k^e}), \quad \frac{dK_z}{dt} = \Sigma m_z(\overline{F_k^e}),$$

Уравнения выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

В кинематике было показано, что движение твердого тела в общем случае складывается из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения тела может быть изучена с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная - с помощью теоремы моментов.

Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позволяет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

Закон сохранения главного момента количества движения.

Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия.

1) Пусть сумма моментов относительно центра O всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\Sigma \overline{m_0(\vec{F}_k^e)} = 0$$

Тогда из уравнения $\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e)$ следует, что при этом $\vec{K}_0 = const$. Таким образом, если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный, момент количества движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен.

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси Oz равна нулю:

$$\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z(\vec{F}_k^e)$ следует, что при этом $K_Z = const$. Таким образом, если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

Эти результаты выражают собою закон сохранения главного момента количества движения системы. Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количества движения системы не могут.

Случай вращающейся системы.

Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси Oz . Тогда $K_Z = I_Z \omega$. Если в этом случае $\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $I_Z \omega = const$.

Отсюда приходим к следующим выводам.

а) Если система неизменяема (абсолютно твердое тело), то $I_Z = const$ и, следовательно, $\omega = const$, т. е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью.

б) Если система изменяема, то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что вызывает увеличение I_Z , или приближаться к оси, что приведет к уменьшению I_Z . Но поскольку $I_Z \omega = const$, то при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции - увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость вращения системы, так как постоянство K_Z не означает вообще постоянства ω .

Рассмотрим некоторые примеры:

а) *Опыты с платформой Жуковского.* Для демонстрации закона сохранения момента количества движения удобно пользоваться простым прибором, называемым «платформой Жуковского». Это круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси z . Для человека, стоящего на такой платформе,

$$\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0.$$

и, следовательно, $I_Z \omega = const$. Если человек, разведя руки в стороны, сообщит себе толчком вращение вокруг вертикальной оси, а затем опустит руки, то величина I_Z уменьшится и, следовательно, угловая скорость вращения возрастет. Таким способом увеличения угловой скорости вращения широко пользуются в балете, при прыжках в воздухе (сальто) и т. п.

Далее, человек, стоящий на платформе неподвижно ($K_Z = 0$), может повернуться в любую сторону, вращая вытянутую горизонтально руку в противоположном направлении. Угловая скорость вращения человека при этом будет такой, чтобы в сумме величина K_Z системы осталась равной нулю.

б) *Раскачивание качелей.* Давлением ног (сила внутренняя) человек, стоящий на качелях, раскачать их не может. Сделать это можно следующим образом. Когда качели находятся в левом верхнем положении A_0 , человек приседает. При прохождении через вертикаль он быстро выпрямляется. Тогда массы приближаются к оси вращения z , величина I_z уменьшается, и угловая скорость ω скачком возрастает. Это увеличение ω приводит в конечном счете к тому, что качели поднимутся выше начального уровня A_0 . В правом верхнем положении, когда $\omega = 0$, человек опять приседает (на величине ω это, очевидно, не скажется); при прохождении через вертикаль он снова выпрямляется и т.д. В результате размахи качелей будут возрастать.

в) *Реактивный момент винта.* Воздушный винт, установленный на вертолете, не только отбрасывает воздух вниз, но и сообщает отбрасываемой массе вращение. Суммарный момент количеств движения отбрасываемой массы воздуха и вертолета должен при этом остаться равным нулю, так как система вначале была неподвижна, а силы взаимодействия между винтом и средой внутренние. Поэтому вертолет начинает вращаться в сторону, противоположную направлению вращения винта. Действующий при этом на вертолет вращающий момент называют *реактивным моментом*.

Чтобы предотвратить реактивное вращение корпуса одновинтового вертолета, на его хвостовой части устанавливают соответствующий рулевой винт. У многовинтового вертолета винты делают вращающимися в разные стороны.

Лекция 6. Кинетическая энергия системы.

Кинетическая энергия системы.

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T , равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного и вращательного движения системы, поэтому теоремой об изменении кинетической энергии особенно часто пользуются при решении задач.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна, очевидно, сумме кинетических энергий этих тел:

$$T = \sum T_k.$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. *Поступательное движение.* В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения центра масс. То есть, для любой точки $V_k = V_C$

$$T_{\text{пост}} = \sum \frac{m_k V_C^2}{2} = \frac{1}{2} (\sum m_k) V_C^2$$

или

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} M V_C^2.$$

Таким образом, *кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.* От направления движения значение T не зависит.

2. *Вращательное движение.* Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси Oz (см. рис.46), то скорость любой его точки $V_k = \omega h_k$, где h_k - расстояние точки от оси вращения, а ω - угловая скорость тела. Подставляя это значение и вынося общие множители за скобку,

получим:

$$T_{BP} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2} (\sum m_k h_k^2) \omega^2.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z . Таким образом, окончательно найдем:

$$T_{BP} = \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

т. е. кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости. От направления вращения значение T не зависит.

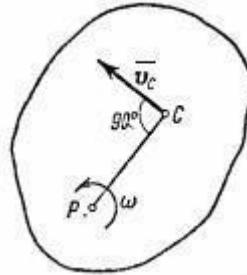


Рис.46

При вращении тела вокруг неподвижной точки кинетическая энергия определяется как (рис.47)

$$T = \frac{1}{2} [I_x (\omega \cos \alpha)^2 + I_y (\omega \cos \beta)^2 + I_z (\omega \cos \gamma)^2]$$

или, окончательно,

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2),$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно главных осей инерции x_1, y_1, z_1 в неподвижной точке O ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ на эти оси.

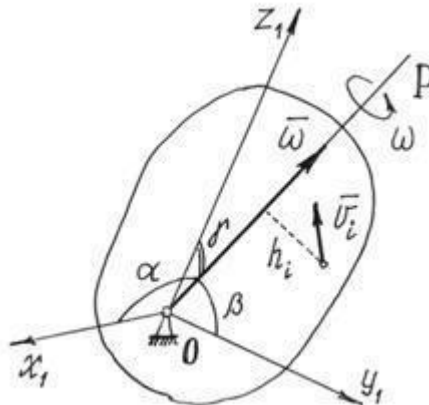


Рис.47

3. Плоскопараллельное движение. При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис.46). Следовательно

$$T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} I_P \omega^2,$$

где I_P – момент инерции тела относительно названной выше оси, ω – угловая скорость

тела. Величина I_P в формуле будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо I_P постоянный момент инерции I_C , относительно оси, проходящей через центр масс C тела. По теореме Гюйгенса $I_P = I_C + Md^2$, где $d=PC$. Подставим это выражение для I_P . Учитывая, что точка P - мгновенный центр скоростей, и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = V_C$, где V_C - скорость центра масс C , окончательно найдем:

$$T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Следовательно, при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

4) Для самого общего случая движения материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить теорема Кенига.

Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис.48). Переносного – поступательного движения вместе с центром масс C и относительного – движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей x_1, y_1, z_1 . Тогда скорость точек $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_n$. Но переносное движение – поступательное. Поэтому переносные скорости всех точек равны, равны \vec{v}_c . Значит, $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_n$ и кинетическая энергия будет

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_n)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_c^2 + 2\vec{v}_c \cdot \vec{v}_n + v_n^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i v_c^2 + \sum m_i \vec{v}_c \cdot \vec{v}_n + \frac{1}{2} \sum m_i v_n^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}_n + T_r. \end{aligned}$$

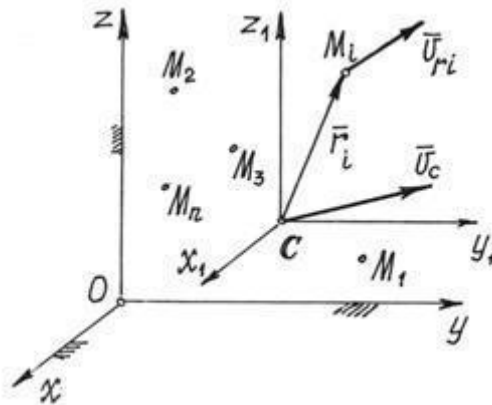


Рис.48

По определению центра масс его радиус-вектор в подвижной системе $\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = 0$ (центр масс находится в начале координат), значит, и $\sum m_i \vec{r}_i = 0$. Производная по времени от этой суммы также равна нулю:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum m_i \vec{v}_n = 0$$

Поэтому, окончательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + T_r.$$

(1)

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром

масс.

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс C и относительного – вращения вокруг точки C), по теореме Кенига (1) получим

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2),$$

где I_x, I_y, I_z – главные центральные оси инерции тела.

Некоторые случаи вычисления работы.

1) *Работа сил тяжести, действующих на систему.* Работа силы тяжести, действующей на частицу весом P_k , будет равна $P_k(z_{k0} - z_{k1})$, где z_{k0} и z_{k1} – координаты, определяющие начальное и конечное положение частицы. Тогда сумма работ всех сил тяжести, действующих на систему, будет равна

$$A = \sum P_k z_{k0} - \sum P_k z_{k1} = P(z_{c0} - z_{c1}) = \pm Ph_c,$$

где P – вес системы, h_c – вертикальное перемещение центра тяжести (или центра масс). Следовательно, *работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их равнодействующей P на перемещении центра тяжести (или центра масс) системы.*

2) *Работа сил, приложенных к вращающемуся телу.* Элементарная работа приложенной к телу силы F (рис.49) будет равна

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi,$$

так как $ds = h d\varphi$, где $d\varphi$ – угол поворота тела.

Но, как легко видеть, $F_\tau h = m_Z(\bar{F})$. Будем называть величину $M_Z = m_Z(\bar{F})$ *вращающим моментом*. Тогда получим: $dA = M_Z d\varphi$.

Следовательно, в рассматриваемом случае *элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота*. Формула справедлива и при действии нескольких сил, если считать $M_Z = m_Z(\bar{F}_k)$.

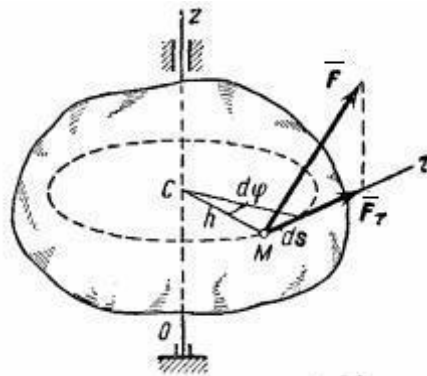


Рис.49

При повороте на конечный угол φ_1 работа будет равна

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_Z d\varphi,$$

а в случае постоянного момента ($M_Z = const$)

$$A = M_Z \varphi_1.$$

Если на тело действует пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси Oz , то M_Z будет, очевидно, означать момент этой пары.

Укажем еще, как в данном случае определяется мощность

$$W = \frac{dA}{dt} = M_Z \frac{d\phi}{dt} = M_Z \omega$$

Следовательно, при действии сил на вращающееся тело *мощность равна произведению вращающегося момента на угловую скорость тела*. При той же самой мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

3) *Работа сил трения, действующих на катящееся тело*. На колесо радиуса R (рис.50), катящееся по некоторой плоскости (поверхности) без скольжения, действует сила трения F , препятствующая скольжению точки касания B вдоль плоскости. Элементарная работа этой силы $dA = -F_{\text{тр}} ds_B$. Но точка B в данном случае является мгновенным центром скоростей и $V_B = 0$. Так как $ds_B = V_B dt$, то $ds_B = 0$ и для каждого элементарного перемещения $dA = 0$.

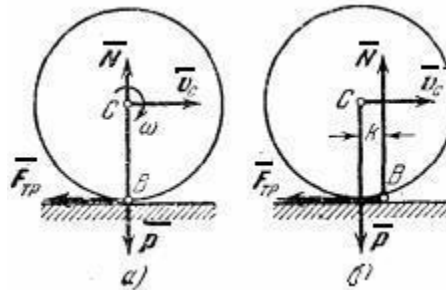


Рис.50

Следовательно, при качении без скольжения, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю. По той же причине в этом случае равна нулю и работа нормальной реакции N , если считать тела недеформируемыми и силу N приложенной в точке B (как на рис.50,а).

Соппротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей (рис.50,б), создает пару (\vec{N}, \vec{F}) , момент которой $M = kN$, где k - коэффициент трения каче-

ния. Тогда учитывая, что при качении угол поворота колеса $d\varphi = \frac{ds_R}{R}$, получим:

$$dA^{\text{КАЧ}} = -kNd\varphi = -\frac{k}{R} N ds_C,$$

где ds_C - элементарное перемещение центра C колеса.

Если $N = \text{const}$, то полная работа сил сопротивления качению будет равна

$$A^{\text{КАЧ}} = -kNd\varphi = -\frac{k}{R} N s_C$$

Так как величина k/R мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебрегать.

Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой m_k , имеющую скорость v_k , то для этой точки будет

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где dA_k^e и dA_k^i - элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим

$$d\left(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i,$$

или

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i. \quad (2)$$

Равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

Если полученное выражение отнести к элементарному промежутку времени, в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, можно получить вторую формулировку для дифференциальной формы теоремы: производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех внешних (N^e) и внутренних (N^i) сил, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i.$$

Дифференциальными формами теоремы об изменении кинетической энергии можно воспользоваться для составления дифференциальных уравнений движения, но это делается достаточно редко, потому что есть более удобные приемы.

Проинтегрировав обе части равенства (2) в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0 , в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1 , будем иметь

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечном виде: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.*

В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы в уравнениях не исключаются. В самом деле, если \vec{F}_{12}^i и \vec{F}_{21}^i - силы взаимодействия между точками B_1 и B_2 системы (см. рис.51), то $\vec{F}_{12}^i + \vec{F}_{21}^i = 0$. Но при этом точка B_1 , может перемещаться по направлению к B_2 , а точка B_2 - по направлению к B_1 . Работа каждой из сил будет тогда положительной и сумма работ нулем не будет. Примером может служить явление отката. Внутренние силы (силы давления), действующие и на снаряд и на откатывающиеся части, совершают здесь положительную работу. Сумма этих работ, не равная нулю, и изменяет кинетическую энергию системы от величины $T_0 = 0$ в начале выстрела до величины $T_1 = T_{\text{снар}} + T_{\text{отк}}$ конце.

Другой пример: две точки, соединенные пружиной. При изменении расстояния между точками упругие силы, приложенные к точкам, будут совершать работу. Но если система состоит из абсолютно твердых тел и связи между ними неизменяемые, не упругие, идеальные, то работа внутренних сил будет равна нулю и их можно не учитывать и вообще не показывать на расчетной схеме.

Рассмотрим два важных частных случая.

1) *Неизменяемая система.* *Неизменяемой* будем называть систему, в которой расстояния между точками приложения внутренних сил при движении системы не изменяются. В частности, такой системой является абсолютно твердое тело или нерастяжимая нить.

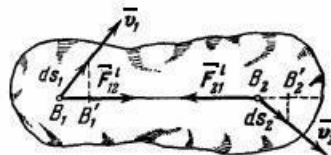


Рис.51

Пусть две точки B_1 и B_2 неизменяемой системы (рис.51), действующие друг на друга с силами \vec{F}_{12}^i и \vec{F}_{21}^i ($\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i$) имеют в данный момент скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Тогда за промежуток времени dt эти точки совершат элементарные перемещения $ds_1 = v_1 dt$ и $ds_2 = v_2 dt$, направленные вдоль векторов \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Но так как отрезок $B_1 B_2$ является неизменяемым, то по известной теореме кинематики проекции векторов \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , а, следовательно, и перемещений ds_1 и ds_2 на направление отрезка $B_1 B_2$ будут равны друг другу, т.е. $B_1 B'_1 = B_2 B'_2$. Тогда элементарные работы сил \vec{F}_{12}^i и \vec{F}_{21}^i будут одинаковы по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль. Этот результат справедлив для всех внутренних сил при любом перемещении системы.

Отсюда заключаем, что для неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю и уравнения принимают вид

$$dT = \sum dA_k^e \quad \text{или} \quad T_1 - T_0 = \sum A_k^e.$$

2) Система с идеальными связями. Рассмотрим систему, на которую наложены связи, не изменяющиеся со временем. Разделим все действующие на точки системы внешние и внутренние силы на активные и реакции связей. Тогда

$$dT = \sum dA_k^a + \sum dA_k^r,$$

где dA_k^a - элементарная работа действующих на k -ю точку системы внешних и внутренних активных сил, а dA_k^r - элементарная работа реакций наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Как видим, изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных сил и реакций связей. Однако можно ввести понятие о таких «идеальных» механических системах, у которых наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении. Для таких связей должно, очевидно, выполняться условие:

$$\sum dA_k^r = 0.$$

Если для связей, не изменяющихся со временем, сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют идеальными. Для механической системы, на которую наложены только не изменяющиеся со временем идеальные связи, будем, очевидно, иметь

$$dT = \sum dA_k^a \quad \text{или} \quad T_1 - T_0 = \sum A_k^a.$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении, приложенных к системе внешних и внутренних активных сил.

Механическая система называется консервативной (энергия ее как бы законсервирована, не изменяется), если для нее имеет место интеграл энергии

$$E = T + \Pi = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (3)$$

Это есть закон сохранения механической энергии: при движении системы в потенциальном поле механическая энергия ее (сумма потенциальной и кинетической) все время остается неизменной, постоянной.

Механическая система будет консервативной, если действующие на нее силы потенциальны, например сила тяжести, силы упругости. В консервативных механических системах с помощью интеграла энергии можно проводить проверку правильности составления дифференциальных уравнений движения. Если система консервативна, а условие (3) не выполняется, значит при составлении уравнений движения допущена ошибка.

Интегралом энергии можно воспользоваться для проверки правильности составления уравнений и другим способом, без вычисления производной. Для этого следует после проведения численного интегрирования уравнений движения вычислить значение полной механической энергии для двух различных моментов времени, например, начального и конечного. Если разница значений окажется сопоставимой с погрешностями вычислений, это будет свидетельствовать о правильности используемых уравнений.

Все предыдущие теоремы позволяли исключить из уравнений движения внутренние силы, но все внешние силы, в том числе и наперед неизвестные реакции внешних связей, в уравнениях сохранялись. Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при не изменяющихся со временем идеальных связях она позволит исключить из уравнений движения *все* наперед неизвестные реакции связей.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.

Пример 13. Какую скорость надо сообщить точке M стержня, прикрепленного верхним концом с помощью шарнира O к неподвижной поверхности (рис.52), чтобы стержень совершил четверть оборота?

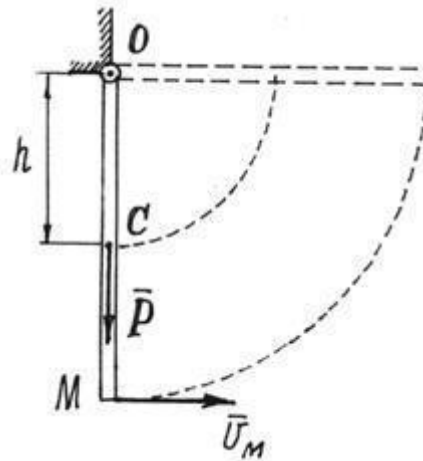


Рис.52

В первом, вертикальном, положении кинетическая энергия стержня, начавшего вращаться вокруг оси O ,

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \frac{V_M^2}{l^2} = \frac{1}{6} \frac{P}{g} V_M^2$$

Во втором положении, где стержень достигнет горизонтального положения и остановится на мгновение, $T_2 = 0$.

Работу совершит только вес стержня P : $A = -Ph = -P \frac{l}{2}$. По теореме получим уравнение $-\frac{1}{6} \frac{P}{g} V_M^2 = -P \frac{l}{2}$, из которого следует $V_M = \sqrt{3gl}$.

Пример 14. Механическая система состоит из двух шаров A и B , связанных с шарниром O и ползуном C невесомыми стержнями.

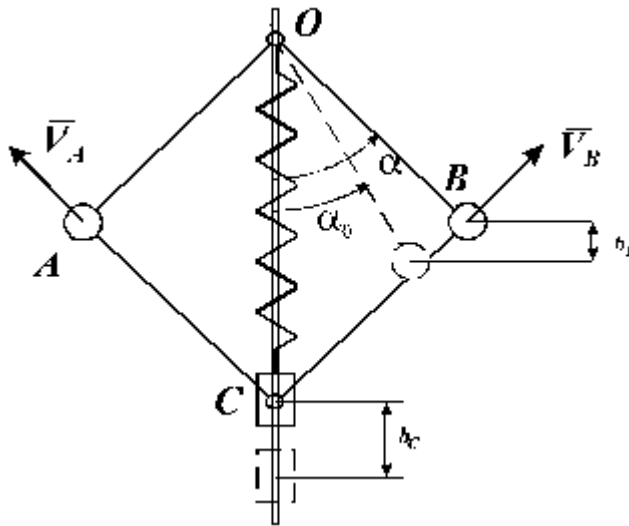


Рис.53

Массы шаров и ползуна одинаковы и равны $m = 0,2$ кг. Стержни имеют одинаковую длину $l = 0,3$ м. Между шарниром и ползуном установлена пружина жесткостью $c = 100$ Н/м, длина которой в недеформированном состоянии равна l (рис.53) Требуется определить зависимость скоростей движения шаров от угла отклонения стержней от вертикали α и найти максимальное отклонение, если в начальный момент времени система покоилась, а угол α составлял $\pi/6$.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий трех тел, которые по условию могут рассматриваться как материальные точки.

$$T = \frac{mV_A^2}{2} + \frac{mV_B^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2}. \quad (4)$$

Скорости шаров пропорциональны угловой скорости вращения стержней OA и OB

$$V_A = V_B = V = l\dot{\alpha}.$$

Скорость ползуна нетрудно определить, если учесть, что

$$OC = 2l \cos \alpha.$$

Тогда

$$V_C = \left| \frac{d(OC)}{dt} \right| = 2l \sin \alpha \dot{\alpha} = 2V \sin \alpha.$$

Подставляя выражения для скоростей в (4), получим зависимость кинетической энергии системы от скоростей шаров V и угла отклонения стержней α

$$T = mV^2 (1 + 2 \sin^2 \alpha). \quad (5)$$

Определим работу, которую совершат все силы, приложенные к системе при ее перемещении из начального положения в конечное. Работа сил тяжести определяется вертикальными перемещениями центров тяжести тел (см. рис.53):

$$\begin{aligned} A_{\text{ТЖ}} &= A(m_A \bar{g}) + A(m_B \bar{g}) + A(m_C \bar{g}) = \\ &= -mgh_A - mgh_B - mgh_C = -4mgl(\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Для вычисления работы силы упругости воспользуемся формулой:

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{2} (\Delta_1^2 - \Delta_2^2) = \frac{C}{2} [(l - 2l \cos \alpha_0)^2 - (l - 2l \cos \alpha)^2] = \\ &= 2Cl^2 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)(\cos \alpha + \cos \alpha_0 - 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя выражения (5), (6) и (7) в уравнение теоремы об изменении кинетической энергии, получаем зависимость скорости движения шаров от угла α

$$\begin{aligned}
mV^2(1+2\sin^2\alpha) &= -4mgl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + \\
&+ 2Cl^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\alpha_0 - 1) = \\
&= (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) \left[2Cl^2(\cos\alpha + \cos\alpha_0 - 1) - 4mgl \right] \\
\text{или в явном виде} \\
V &= \sqrt{\frac{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) \left[2Cl^2(\cos\alpha + \cos\alpha_0 - 1) - 4mgl \right]}{m(1+2\sin^2\alpha)}}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Если в уравнении 8 скорость V приравнять нулю, можно найти два предельных значения угла α , между которыми будет происходить движение системы при заданных начальных условиях:

$$\begin{aligned}
1. \cos\alpha_0 - \cos\alpha_1 &= 0 \quad \text{или} \quad \alpha_1 = \alpha_0 = \frac{\pi}{6} = 0.5236 \text{ рад} = 30^\circ \\
2. 2Cl^2(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_0 - 1) &= 4mgl \quad \text{или} \quad \cos\alpha_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2mg}{Cl} \\
\text{или} \quad \alpha_2 &= 1.3028 \text{ рад} = 75.64^\circ
\end{aligned}$$

Лекция 7. Приложение общих теорем к динамике твердого тела.

Принцип Даламбера.

Все методы решения задач динамики, которые мы до сих пор рассматривали, основываются на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов Ньютона, или же из общих теорем, являющихся следствиями этих законов. Однако, этот путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые принципами механики. В ряде случаев применение этих принципов позволяет, как мы увидим, найти более эффективные методы решения соответствующих задач. В этой главе будет рассмотрен один из общих принципов механики, называемый принципом Даламбера.

Пусть мы имеем систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь из точек системы с массой m_k . Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил \vec{F}_k^e и \vec{F}_k^i (в которые входят и активные силы, и реакции связи) точка получает по отношению к инерционной системе отсчета некоторое ускорение \vec{a}_k .

Введем в рассмотрение величину

$$\vec{F}_k^u = -m_k \vec{a}_k,$$

имеющую размерность силы. Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют силой инерции точки (иногда даламберовой силой инерции).

Тогда оказывается, что движение точки обладает следующим общим свойством: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам \vec{F}_k^e и \vec{F}_k^i прибавить силу инерции \vec{F}_k^u , то полученная система сил будет уравновешенной, т.е. будет

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^u = 0.$$

Это выражение выражает принцип Даламбера для одной материальной точки. Нетрудно убедиться, что оно эквивалентно второму закону Ньютона и наоборот. В самом деле, второй закон Ньютона для рассматриваемой точки дает $m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$. Перенося здесь

член $m_k \vec{a}_k$ в правую часть равенства и придем к последнему соотношению.

Повторяя проделанные высшее рассуждения по отношению к каждой из точек системы, придем к следующему результату, выражающему принцип Даламбера для системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на ней внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применять все уравнения статики.*

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия; что делает единообразный подход к решению задач и обычно намного упрощает соответствующие расчёты. Кроме того, в соединении с принципом возможных перемещений, который будет рассмотрен в следующей главе, принцип Даламбера позволяет получить новый общий метод решения задач динамики.

Применяя принцип Даламбера, следует иметь в виду, что на точку механической системы, движение которой изучается, действуют только внешние и внутренние силы \vec{F}_k^e и \vec{F}_k^i , возникающие в результате взаимодействия точек системы друг с другом и с телами, не входящими в систему; под действием этих сил точки системы и движутся с соответствующими ускорениями \vec{a}_k . Силы же инерции, о которых говорится в принципе Даламбера, на движущиеся точки не действуют (иначе, эти точки находились бы в покое или двигались без ускорений и тогда не было бы и самих сил инерции). Введение сил инерции - это лишь приём, позволяющий составлять уравнения динамики с помощью более простых методов статики.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра O равны нулю, причём по принципу отвердевания это справедливо для сил, действующих не только на твёрдое тело, но и на любую изменяемую систему. Тогда на основании принципа Даламбера должно быть:

$$\left. \begin{aligned} \sum (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^u) &= 0, \\ \sum [m_0(\vec{F}_k^e) + m_0(\vec{F}_k^u)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Введём обозначения:

$$\vec{R}^u = \sum \vec{F}_k^u \qquad \overline{M}_0^u = \sum m_0(\vec{F}_k^u).$$

Величины \vec{R}^u и \overline{M}_0^u представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра O системы сил инерции. В результате, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, получим из равенств:

$$\vec{R}^u + \sum \vec{F}_k^e = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_k^e) + \overline{M}_0^u = 0. \quad (1)$$

Применение уравнений (1), вытекающих из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, т.к. эти уравнения не содержат внутренних сил.

В проекциях на оси координат эти равенства дают уравнения, аналогичные соответствующим уравнениям статики. Чтобы пользоваться этими уравнениями при решении задач, надо знать выражение главного вектора и главного момента сил инерций.

Главный вектор и главный момент сил инерции твёрдого тела.

Система сил инерции твёрдого тела можно заменить одной силой, равной \vec{R}^u и приложенной в центре O , и парой с моментом, равным \overline{M}_0^u . Главный вектор системы сил, как известно, не зависит от центра приведения и может быть вычислен заранее.

Т.к. $\vec{F}_k^u = -m_k \cdot \vec{a}_k$, то

$$\vec{R}^u = -\sum m_k \cdot \vec{a}_k = -M \vec{a}_c \quad (2)$$

Следовательно, *главный вектор сил инерции тела*, совершающего любое движение, равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

Прикладывается главный вектор к точке приведения, которую можно назначить в любом месте, т.е. он не зависит от выбора этой точки.

Если ускорение \vec{a}_c разложить на касательное и нормальное, то вектор \vec{R}^u разложить на составляющие

$$\vec{R}^u = -M \cdot \vec{a}_{cT}, \quad \vec{R}^u = -M \cdot \vec{a}_{cн}.$$

С определением главного момента сил инерции возникает немало сложностей. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Поступательное движение. В этом случае тело никакого вращения вокруг центра масс C не имеет. Отсюда заключаем, что $\sum \vec{m}_c (\vec{F}_k^e) = 0$, и равенство (1) даёт $\vec{M}_c^u = 0$.

Следовательно, при поступательном движении силы инерции твёрдого тела приводят к одной равнодействующей, равной \vec{R}^u и проходящей через центр масс тела.

2. Плоскопараллельное движение. Пусть тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно ей. Вследствие симметрии главный вектор и результирующая пара сил инерции, так же как и центр масс C тела, лежат в плоскости симметрии.

Тогда, помещая центр приведения в точке C , получим из равенства (1) $M_c^u = -\sum m_c (\vec{F}_k^e)$. С другой стороны $\sum m_c (\vec{F}_k^e) = J_c \cdot \varepsilon$. Отсюда заключаем, что

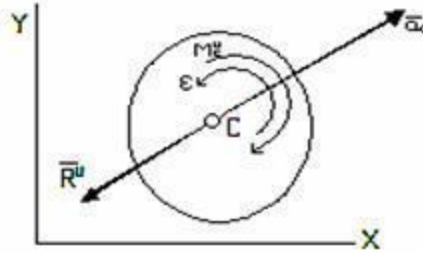


Рис.54

$$M_c^u = -I_c \cdot \varepsilon \quad (3)$$

Таким образом, в рассмотренном случае движение системы сил инерции приводится к результирующей силе, равной \vec{R}^u [формула (2)] и приложенной в центре масс C тела (рис.54), и к лежащей в плоскости симметрии тела паре, момент которой определяется формулой (3). Знак минус в формуле показывает, что направление момента M_c^u противоположно направлению углового ускорения тела.

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела. Пусть опять тело имеет плоскость симметрии, а ось вращения CZ перпендикулярна к этой плоскости и проходит через центр масс тела. Тогда данный случай будет частным случаем предыдущего. Но при этом $\vec{a}_c = 0$, а следовательно, и $\vec{R}^u = 0$.

Таким образом, в рассмотренном случае система сил инерции приводится к данной паре, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, и имеющей момент

$$M_x^u = -I_x \cdot \varepsilon.$$

При решении задач по формулам (1) и (3) вычисляются модули соответствующих величин, а направление их указывают на чертеже.

Приложение общих теорем к динамике твёрдого тела.

Вращательное движение твёрдого тела.

Рассмотрим приложения общих теорем динамики к некоторым задачам о движении абсолютно твёрдого тела. Так как изучение поступательного движения твёрдого тела сводит-

ся к задачам динамики точки, то мы начнём непосредственно с рассмотрения вращательного движения.

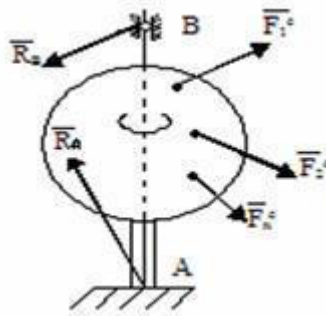


Рис. 55

Пусть на твёрдое тело, имеющее неподвижную ось вращения Z (рис.55), действует система заданных сил $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$. Одновременно на тело действуют реакции подшипников \vec{R}_A и \vec{R}_B . Чтобы исключить из уравнения движения эти наперед неизвестные силы, воспользуемся теоремой моментов относительно оси Z . Так как моменты сил \vec{R}_A и \vec{R}_B относительно оси Z равны нулю, то получим:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e;$$

$$M_z^e = \sum m_k (\vec{F}_k^e).$$

Будем в дальнейшем величину M_z^e называть вращающим моментом.

Подставляя в предыдущее равенство значение $K_z = I_z \omega$, найдём:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \quad \text{или} \quad I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e.$$

Уравнение представляет собой дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела. Из него следует, что произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающему моменту:

$$I_z \varepsilon = M_z^e.$$

Равенство показывает, что при данном M_z^e чем больше момент инерции тела, тем меньше угловое ускорение и наоборот. Следовательно, момент инерции тела действительно играет при вращательном движении такую же роль, как масса при поступательном, т.е. является мерой инертности тела при вращательном движении.

Отметим следующие частные случаи:

- 1) Если $M_z^e = 0$, то $\omega = const$, т.е. тело вращается равномерно.
- 2) Если $M_z^e = const$, то и $\varepsilon = const$, т.е. тело вращается равнопеременно.

Пример 15. Стержень весом P и длиной l качается как маятник в вертикальной плоскости, вращаясь вокруг горизонтальной оси O (рис.56).

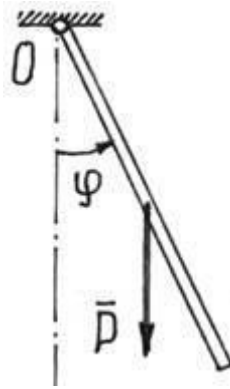


Рис.56

Составим уравнение качаний стержня.

$$I_o = \frac{1}{3} P l^2$$

Так как реакции оси не учитываются, то получим

$$\frac{1}{3} P l^2 \ddot{\varphi} = -P \frac{l}{2} \sin \varphi \quad \ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l} \sin \varphi = 0$$

или

Физический маятник

Физическим маятником называется твёрдое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.

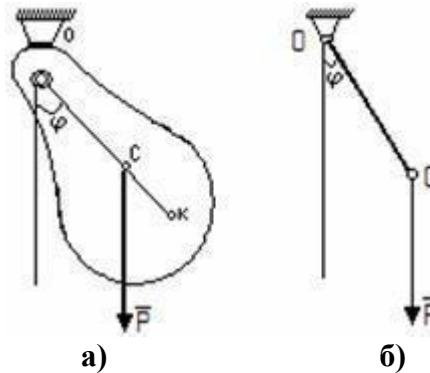


Рис.57

Изобразим сечение маятника плоскостью, перпендикулярной оси подвеса и проходящей через центр масс маятника C (рис.57, а).

Введём обозначения: P – вес маятника, a – расстояние OC от центра масс до оси подвеса, I_0 – момент инерции маятника относительно оси подвеса. Положения маятника будет определять угол φ отклонение линии OC от вертикали.

Для определения закона колебаний маятника воспользуемся дифференциальным уравнением вращательного движения. В данном случае $M_z = M_0 = -Pa \sin \varphi$ (знак минус взят потому, что при $\varphi > 0$ момент отрицателен, а при $\varphi < 0$ – положителен) и уравнение принимает вид:

$$I_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Pa \sin \varphi$$

Деля обе части равенства на I_0 и вводя обозначение

$$\frac{Pa}{I_0} = k^2$$

найдем дифференциальное уравнение колебаний маятника в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение в обычных функциях не интегрируется. Ограничимся рассмотрением малых колебаний маятника, считая приближенно $\sin \varphi \approx \varphi$ (это можно сделать, когда угол φ меньше одного радиана). Тогда будем иметь

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \varphi = 0.$$

Это дифференциальное уравнение совпадает по виду с дифференциальным уравнением свободных прямолинейных колебаний точки, и его общее решение по аналогии имеет вид:

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

Полагая, что начальный момент $t = 0$ маятник отклонён на малый угол $\varphi = \varphi_0$ и отпущен без начальной скорости ($\dot{\varphi}_0 = 0$), найдём для постоянных интегрирования значения: $C_1 = 0$, $C_2 = \varphi_0$. Тогда закон малых колебаний маятника при данных начальных условиях будет:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

Следовательно, малые колебания физического маятника являются гармоническими. Период малых колебаний физического маятника, если заменить k его значением, определяется формулой:

$$T_\phi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Pa}}.$$

Полученные результаты охватывают и случай так называемого математического маятника, т.е. груза малых размеров (которые будем рассматривать как материальную точку), подвешенного на нерастяжимой нити длиной l , массой которой, по сравнению с массой груза, можно пренебречь (рис.57, б). Для математического маятника, т.к. он представляет собой систему, состоящую из одной материальной точки, очевидно, будет

$$I_0 = ml^2 = \frac{P}{g} l^2, \quad a = OC = l.$$

Подставляя эти величины в равенство T_ϕ , найдём, что период малых колебаний математического маятника определяется формулой

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Из сравнения формул T_ϕ и T_M видно, что при длине

$$l_1 = \frac{I_0 g}{Pa} = \frac{I_0}{Ma}$$

период колебаний математического маятника совпадает с периодом колебаний соответствующего физического маятника.

Длина l_1 такого математического маятника, период колебания которого равен периоду колебаний данного физического маятника, называется приведенной длиной физического маятника. Точка K , отстоящая от оси подвеса на расстоянии $OK = l_1$, называется центром качания физического маятника (рис.57).

Замечая, что по теореме Гюйгенса $I_0 = I_C + Ma^2$, мы можем привести формулу к виду

$$l_1 = a + \frac{I_C}{Ma}$$

Отсюда следует, что расстояние OK всегда больше чем $OC = a$, т.е. что центр качаний физического маятника всегда расположен ниже его центра масс.

Плоскопараллельное движение твёрдого тела.

Положение тела, совершающего, плоскопараллельное движение, определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота тела вокруг полюса. Задачи динамики будут решаться проще всего, если за полюс взять центр масс C тела (рис.58) и определять положение тела координатами X_C, Y_C и углом φ .

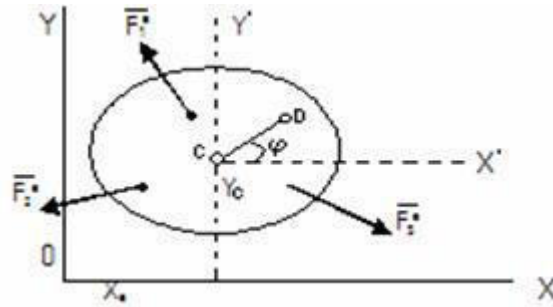


Рис.58

На рис.58 изображено сечение тела плоскостью, параллельной плоскости движения и проходящей через центр масс C . Пусть на тело действуют внешние силы $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$, лежащие в плоскости этого сечения. Тогда уравнения движения точки C найдём по теореме о движении центра масс

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e,$$

а вращательное движение вокруг центра C будет определяться уравнением

$$I_c \cdot \varepsilon = M_c^e,$$

т.к. теорема, из которой получено это уравнение, справедливо и для движения системы вокруг центра масс. В результате, проектируя обе части равенства $M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e$ на координатные оси, получим:

$$\begin{aligned} M a_{cx} &= \sum F_{kx}^e, & M a_{cy} &= \sum F_{ky}^e, & I_c \cdot \varepsilon &= \sum m_c (F_k^e), \\ M \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e, & M \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e, & I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \sum m_c (F_k^e). \end{aligned}$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела. С их помощью можно по заданным силам определить закон движения тела или, зная закон движения тела, найти главный вектор и главный момент действующих сил.

При несвободном движении, когда траектория центра масс известна, уравнения движения точки C удобно составлять в проекциях на касательную $\vec{\tau}$ и главную нормаль n к этой траектории. Тогда получим:

$$M \frac{dv_c}{dt} = \sum F_{k\tau}^e, \quad M \frac{v_c^2}{\rho_c} = \sum F_{kn}^e, \quad I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_c (F_k^e),$$

где ρ_c - радиус кривизны траектории центра масс.

Пример 16. Однородный круглый цилиндр скатывается по наклонной плоскости (рис.59). Цилиндр совершает плоскопараллельное движение.

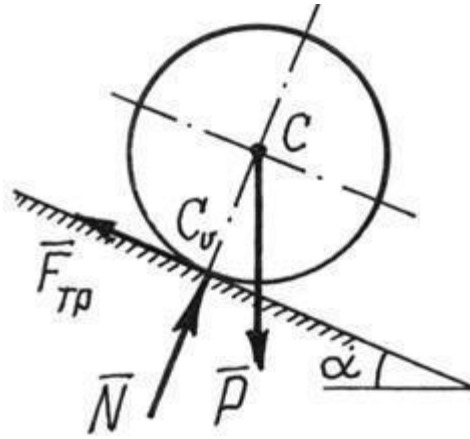


Рис.59

Так как $a = CC_v = r = \text{const}$ и, значит, $\dot{a} = 0$, составим дифференциальное уравнение вращения относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей.

Момент инерции цилиндра относительно оси C_v

$$J_{C_v} = J_C + Ma^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 + \frac{P}{g} r^2 = \frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2.$$

$$\frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi} = -Pr \sin \alpha \quad \text{или} \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha.$$

Поэтому уравнение получится таким

Знак (-) указывает на направление углового ускорения – по часовой стрелке.

Обратим внимание на то, что реакции не вошли в уравнение.

Чтобы определить реакцию $F_{\text{тр}}$, составим еще одно дифференциальное уравнение вращения, относительно центральной оси C :

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi} = -F_{\text{тр}} r.$$

$$F_{\text{тр}} = -\frac{1}{2} \frac{P}{g} r \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r \cdot \frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha = \frac{1}{3} P \sin \alpha.$$

Отсюда

Конечно, $N = P \cos \alpha$. Чтобы тело катилось без скольжения должно выполняться

условие $F_{\text{тр}} < fN$ или $\frac{1}{3} P \sin \alpha < fP \cos \alpha$.

Поэтому коэффициент трения скольжения должен

удовлетворять условию $f > \frac{1}{3} \text{tg} \alpha$.

Пример 17. Балочка AB длиной l и весом P падает, скользя концами по гладким поверхностям стены и пола (рис.60). Составим дифференциальное уравнение вращения.

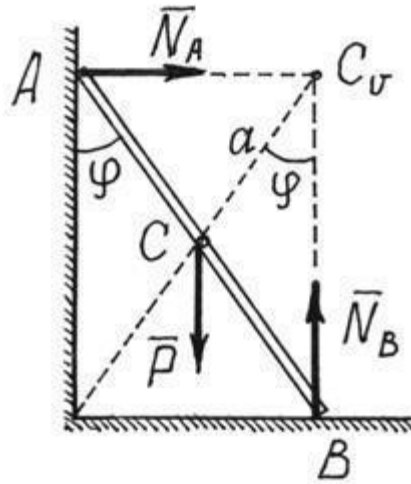


Рис.60

Здесь $\alpha = CC_v = \frac{l}{2} = \text{const.}$

Поэтому опять выгоднее составить дифференциальное уравнение вращения относительно оси C_v . Тем более, что неизвестные реакции \vec{N}_A и \vec{N}_B не войдут в это уравнение.

$$J_{C_v} = J_C + Ma^2 = \frac{1}{12} \frac{P}{g} l^2 + \frac{P}{g} \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2,$$

Так как $\frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi} = P \frac{l}{2} \sin \varphi$, то уравнение получится та-
ким:

$$\ddot{\varphi} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Отсюда

Пример 18. Тело, имеющее форму половины кругового цилиндра, катается по горизонтальной плоскости без скольжения. Вес его – P . Положение центра тяжести определяется

расстоянием $OC = e = \frac{4r}{3\pi}$, момент инерции относительно оси O : $I_O = \frac{1}{2} Mr^2$.

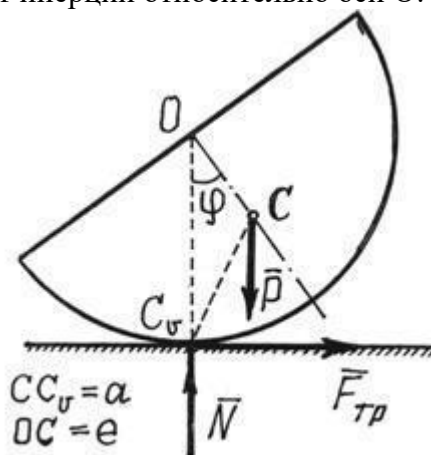


Рис.61

Поскольку неизвестны ни сила трения $F_{тр}$, ни нормальная реакция N , конечно следует составлять дифференциальное уравнение вращения относительно оси C_v .

Момент инерции тела относительно оси C_v , по теореме Гюйгенса-

Штейнера, $I_{C_v} = I_C + Ma^2$, а $I_O = I_C + Me^2$, поэтому $I_{C_v} = I_O + M(a^2 - e^2)$.

Расстояние $a = CC_v = \sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi}$, производ-
 $\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{2er \dot{\varphi} \sin \varphi}{2\sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi}} = \frac{er}{a} \dot{\varphi} \sin \varphi$
 ная

$$K = \frac{P}{g} v_C = \frac{P}{g} a \dot{\varphi}$$

Количество движения

Составляем дифференциальное уравнение:

$$[I_O + M(a^2 - e^2)] \ddot{\varphi} + \frac{P}{g} a \dot{\varphi}^2 \frac{er}{a} \sin \varphi = -Pe \sin \varphi$$

$$\text{или} \left[\frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 + \frac{P}{g} (a^2 - e^2) \right] \ddot{\varphi} + \frac{P}{g} er \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + Pe \sin \varphi = 0.$$

После подстановки значения a , получим

$$(3r - 4e \cos \varphi) \ddot{\varphi} + 2e \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{r} \right) \sin \varphi = 0,$$

и, окончательно, подставив значение $e = \frac{4r}{3\pi}$,

$$(9\pi - 16 \cos \varphi) r \ddot{\varphi} + 8(r \dot{\varphi}^2 + g) \sin \varphi = 0.$$

?

Лекция 8. Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики.

Возможные перемещения. Классификация связей.

При изучении равновесия системы тел методами так называемой геометрической статики приходится рассматривать равновесие каждого из тел в отдельности, заменяя наложенные связи соответствующими наперед неизвестными реакциями. Когда число тел в системе велико, этот путь становится весьма громоздким и связан с необходимостью решать большое число уравнений со многими неизвестными.

Отличительная особенность метода, вытекающего из принципа возможных перемещений, состоит в том, что при его применении эффект действия связей учитывается не путем введения неизвестных наперед реакций, а путем рассмотрения перемещений, которые можно сообщить точкам системы, если вывести систему из занимаемого ею положения. Эти перемещения называют в механике возможными перемещениями.

Рассмотрим возможные перемещения точки M на стержне, прикрепленном к неподвижной поверхности шарниром O (рис.64,а). Конечно, стержень позволяет точке двигаться по сферической поверхности в любом направлении и на любое расстояние. Все эти перемещения возможны. Возможно, кстати, перемещение и вниз. Но такое перемещение не стоит называть возможным, потому что нарушается связь, стержень.

Кроме того, возможным перемещением будем называть только малое перемещение, настолько малую часть траектории, что ее можно заменить прямой, отрезком касательной.

Теперь можно сформулировать определение возможного перемещения.

Возможным перемещением δx точки материальной системы будем называть ее бесконечно малое перемещение, допускаемое связями этой системы.

Возможные перемещения точек системы должны удовлетворять двум условиям:

1) они должны быть бесконечно малыми, так как при конечных перемещениях система перейдет в другое положение, где условия равновесия могут быть другими;

2) они должны быть такими, чтобы при этом все наложенные на систему связи сохранялись, так как иначе мы изменим, вид рассматриваемой механической системы (система станет другой).

Например, для кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис.63 перемещение точек кривошипа OA в положение OA_1 нельзя рассматривать как возможное, так как в этом положении условия равновесия механизма под действием сил \vec{F} и \vec{Q} будут уже другими. Точно так же нельзя считать возможным даже бесконечно малое перемещение точки B шатуна вдоль линии BD ; оно было бы возможным, если в точке B вместо ползуна была бы качающаяся муфта, т.е. когда механизм был бы другим.

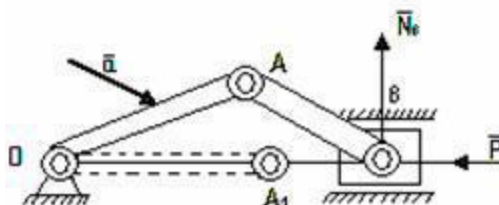


Рис. 63

Таким образом, возможным перемещением системы мы будем называть любую совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент всеми наложенными на систему связями. Возможное перемещение любой точки системы будем изображать элементарным вектором $\vec{\delta r}$, направленным в сторону перемещения.

В общем случае для точек и тел системы может существовать множество возможных различных перемещений (перемещения $\vec{\delta r}$ и $-\vec{\delta r}$ мы не считаем разными). Однако для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений, что всякое другое возможное перемещение будет получаться как геометрическая сумма. Например, шарик, лежащий на какой-нибудь плоскости (или поверхности), можно переместить вдоль этой плоскости по множеству направлений. Однако любое его возможное перемещение $\vec{\delta r}$ можно получить как сумму двух перемещений $\vec{\delta r}_1$ и $\vec{\delta r}_2$ вдоль лежащих в этой плоскости взаимно перпендикулярных осей ($\vec{\delta r} = \vec{\delta r}_1 + \vec{\delta r}_2$).

Число независимых между собою возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Так, рассмотренный выше шарик на плоскости (или на поверхности), если его считать материальной точкой, имеет 2 степени свободы. У кривошипно-шатунного механизма будет, очевидно, одна степень свободы.

У свободной материальной точки – 3 степени свободы (независимыми будут 3 перемещения вдоль взаимно перпендикулярных осей). Свободное твердое тело имеет 6 степеней свободы (независимыми перемещениями будут: 3 поступательных перемещения вдоль осей координат и 3 вращательных вокруг этих осей).

К этому следует добавить несколько замечаний.

Первое. Само название таких перемещений показывает, что они только возможны, но не обязательны; что этих перемещений из данного положения системы может быть много; что среди них только одно есть действительное (Если связи – не стационарные, изменяются с течением времени, то действительное перемещение может не быть одним из возможных); что эти перемещения происходят не под действием сил, приложенных к системе, а, так сказать, по нашему желанию.

Второе. За счет малости таких перемещений направляются они по касательной к траектории и имеют, таким образом, направление, совпадающее с вектором скорости. Эту скорость в данном случае также называют *возможной скоростью*, а не действительной.

Третье. При наличии связей между точками материальной системы, возможные перемещения этих точек связаны между собой определенными зависимостями, уравнениями связей.

На рис.64 дано несколько примеров возможных перемещений точек некоторых материальных систем.

Из этих примеров следует, что возможным перемещением всего тела, вращающегося вокруг оси, является малый угол поворота $\delta\varphi$. И возможные перемещения точек его можно определить с помощью этого угла. Так, например, $\delta\varepsilon_M = OM \cdot \delta\varphi$; $\delta\varepsilon_A = OA \cdot \delta\varphi$; $\delta\varepsilon_B = OB \cdot \delta\varphi$ (рис.64, а и 64, б).

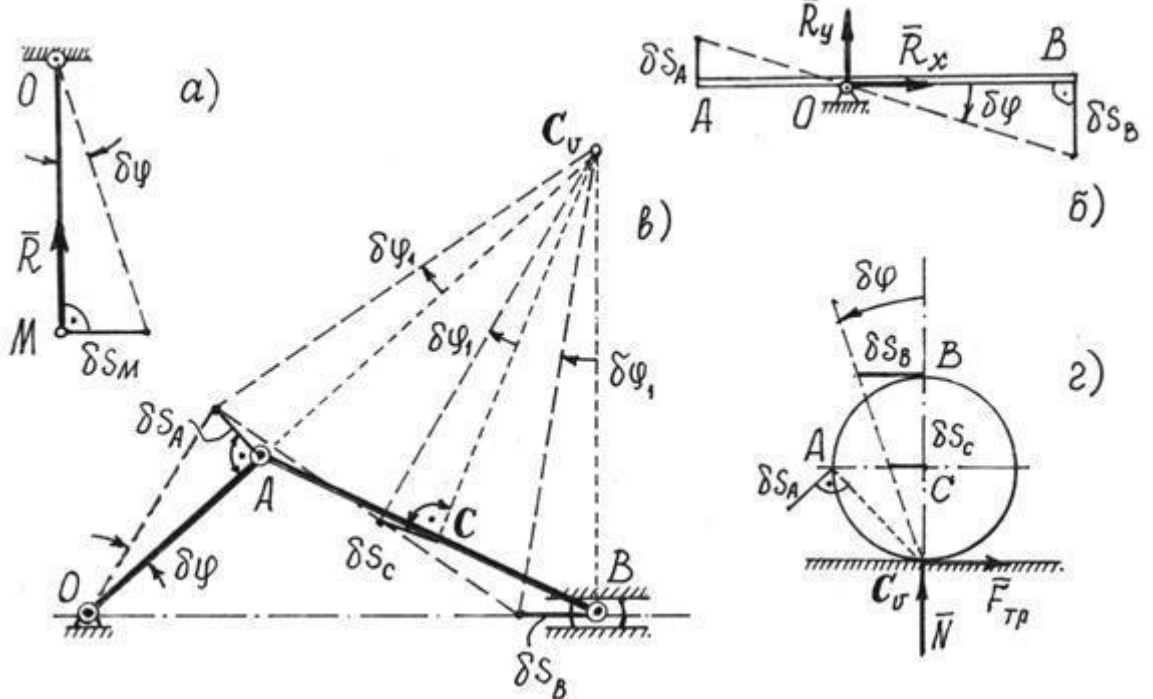


Рис.64

Так как направления возможных перемещений имеют направления скоростей, то перемещения точек звена AB (рис.64, в) определяются с помощью мгновенного центра скоростей C_v этого звена. А возможное перемещение всего тела при плоскопараллельном движении – есть поворот на малый угол $\delta\varphi_1$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Этот угол можно определить.

Так как $\delta\varepsilon_A = OA \cdot \delta\varphi$, то $\delta\varphi_1 = \frac{\delta\varepsilon_A}{AC_v} = \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$, а перемещение ползуна B : $\delta\varepsilon_B = BC_v \cdot \delta\varphi_1 = BC_v \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$ и точки C : $\delta\varepsilon_C = CC_v \delta\varphi_1 = CC_v \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$. То есть перемещения всех точек механизма можно определить через одно возможное перемещение, перемещение звена OA , через угол $\delta\varphi$.

Аналогично, поворотом на малый угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра скоростей C_v , определяются возможные перемещения точек колеса, которое может катиться без скольжения по неподвижной прямой (рис.64, г).

Работу сил, приложенных к материальной системе, на возможном перемещении будем называть *возможной работой*.

Если рассмотреть различные типы материальных систем, можно обнаружить, что элементарная работа реакций многих связей на возможном перемещении окажется равной нулю. Такие связи, сумма возможных работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю, называются *идеальными связями*. К таким связям относятся, например, все связи без трения.

Связи, которые не изменяются со временем, называются *стационарными*.

Есть связи, которые называют или *удерживающими*, или *односторонними*, в зависимости от того препятствуют они перемещению точки во взаимно противоположных направлениях или только в одном.

У некоторых материальных систем встречаются и довольно сложные связи, ограничивающие или только положение системы, координаты ее точек, или еще и скорость их, производные от координат по времени. Первые называют *голономными*, геометрическими, связями; вторые – *неголономными*, кинематическими, неинтегрируемыми. Мы в дальнейшем будем рассматривать системы только с голономными связями.

Принцип возможных перемещений при равновесии материальной системы. Общее уравнение статики.

Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравниваются. Если \vec{F}_i – равнодействующая всех активных сил, приложенных к i -той точке, а \vec{R}_i – реакция связей этой точки, то (рис.65)

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$$

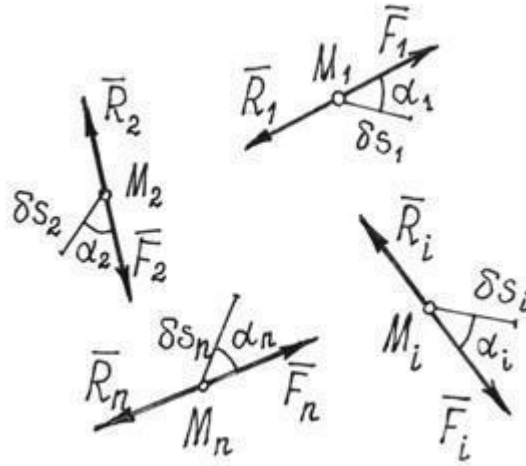


Рис.65

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получат перемещения $\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3, \dots, \delta s_n$.

Затем вычислим работу всех сил на этих перемещениях.

Так как силы, приложенные к каждой точке уравниваются и $\vec{F}_i = -\vec{R}_i$, то сумма работ этих сил на перемещении δs_i будет равна нулю: $F_i \delta s_i \cos \alpha_i - R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0$. Значит и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0$$

Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю. Значит,

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0. \quad (1)$$

Этот результат, *уравнение работ*, называют *общим уравнением статики*.

При равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых, сил на любом возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.

Конечно, если у системы есть неидеальные связи, например, с трением, или упругие, вроде пружины, то в уравнение работ надо добавить возможную работу реакций этих связей.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоро-

стей: $\delta s_i = v_i \delta t$, где время δt - произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (1) запишется так $\sum F_i v_i \delta t \cos \alpha_i = 0$, а, поделив его на δt получим

$$\sum F_i v_i \cos \alpha_i = 0, \tag{2}$$

где α_i – углы между направлениями сил и направлениями векторов возможных скоростей точек приложения сил.

Равенство (2) можно назвать *принципом возможных скоростей*, уравнением мощностей. Оно иногда бывает более удобным, так как используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

Этот принцип, общее уравнение статики, позволяет решать задачи на исследование равновесного состояния системы, в частности – находить неизвестные реакции связей. Естественно, при этом возникает вопрос: как же так, ведь реакции идеальных связей не входят в уравнение работ? Выход прост – надо сделать тело свободным, реакции отнести к разряду активных сил и затем назначать такие возможные перемещения, чтобы эти неизвестные силы совершали работу.

Общее уравнение статики – довольно эффективный метод и применять его, конечно, надо для исследования равновесия сложных систем; хотя и при решении обычных задач статики он оказывается тоже выгодным.

Пример 20. Какую силу F надо приложить к желобу с грузом весом P , чтобы удержать его в равновесии (рис.66)?

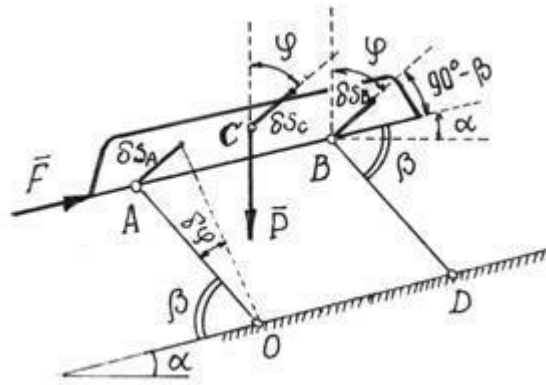


Рис.66

Эту задачу можно решить известными методами статики, составляя уравнения равновесия. Но при этом придется прежде отыскать усилия в стержнях. Принцип возможных перемещений позволяет найти силу F проще, с помощью общего уравнения статики.

Показываем активные силы \vec{F} и \vec{P} . Даем системе возможное перемещение, повернув стержень AO на угол $\delta\varphi$ (рис.66). Так как желоб совершит поступательное движение, то перемещения всех его точек будут одинаковы:

$$\delta s_A = \delta s_B = \delta s_C = AO \cdot \delta\varphi = a \cdot \delta\varphi,$$

$$\text{где } a = AO = BD.$$

Составляем уравнение работ: $F \delta s_A \cdot \cos(90^\circ - \beta) - P \delta s_C \cdot \cos \varphi = 0$.
Угол $\varphi = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - \beta) = \beta - \alpha$.

Поэтому получим $F a \delta\varphi \sin \beta - P a \delta\varphi \cos(\beta - \alpha) = 0$. Отсюда $F = P \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \beta}$.

Пример 21. На рис.67 изображена конструкция, состоящая из четырех одинаковых Т-образных рам, соединенных шарнирами K, M, Q . Опоры A и E – шарнирно-неподвижные, B и D – шарнирно-подвижные. Определим горизонтальную составляющую

щую \bar{X}_E реакции опоры E , вызванную силой \bar{F} , приложенной к левой раме.

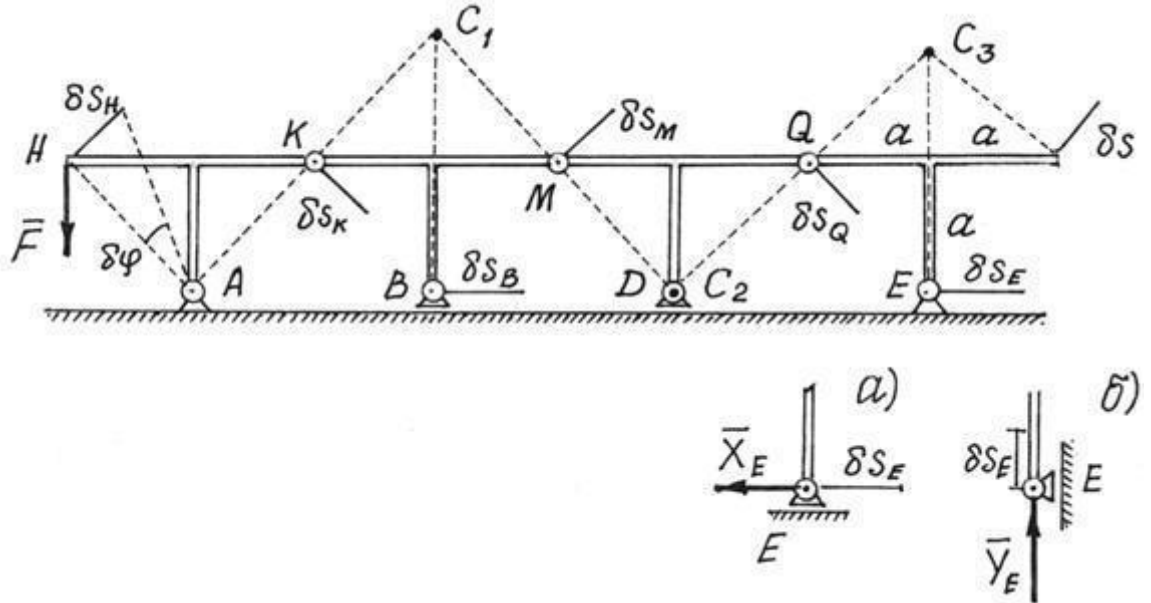


Рис.67

Методы статики дадут довольно сложное и длинное решение, так как придется рассматривать равновесие четырех рам и решать систему из 12 уравнений с 12-ю неизвестными.

Принцип возможных перемещений дает более простое и короткое решение.

Надо изменить конструкцию опоры E . Сделаем ее подвижной, а чтобы система осталась в равновесии, приложим к опоре силу \bar{X}_E , ту силу, которую нужно определить (рис.67,а).

Даем затем системе возможное перемещение, повернув левую раму вокруг опоры A на угол $\delta\varphi$. С помощью мгновенных центров скоростей C_1, C_2 и C_3 каждой рамы, обнаруживаем,

что $\delta s_H = \delta s_K = \delta s_M = \delta s_Q$, а $\frac{\delta s_E}{\delta s_Q} = \frac{EC_3}{QC_3}$ или $\delta s_E = \frac{EC_3}{QC_3} \delta s_Q = \frac{2a}{a\sqrt{2}} \delta s_Q = \delta s_Q \cdot \sqrt{2}$. Составляем уравнение работ, общее уравнение статики

$$-F \delta s_H \cos 45^\circ - X_E \delta s_E = 0 \quad \text{или} \quad -F \delta s_H \frac{\sqrt{2}}{2} - X_E \delta s_Q \sqrt{2} = 0 \quad \text{Отсюда} \quad X_E = -\frac{1}{2} F$$

Чтобы определить вертикальную составляющую \bar{Y}_E реакции опоры E , ее надо вновь переделать (рис. 67,б), дать системе соответствующее возможное перемещение и составить уравнение работ.

Принцип возможных перемещений при движении материальной системы. Общее уравнение динамики.

По принципу Даламбера материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил, можно рассматривать находящейся в равновесии, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. Значит можно воспользоваться и принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (1) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях:

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{ин} \delta s_i \cos \beta_i = 0. \quad (3)$$

Или по принципу возможных скоростей (2):

$$\sum F_i v_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{ин} v_i \cos \beta_i = 0. \quad (4)$$

Эти уравнения называют общим уравнением динамики. Оно позволяет решать боль-

шой класс задач на исследование движения довольно сложных материальных систем.

Уравнения (3) и (4) показывают, что в любой фиксированный момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю при условии, что на систему наложены идеальные и удерживающие связи.

Силы инерции точек и твердых тел, составляющих систему, определять уже умеем.

Стоит подчеркнуть еще одно важное достоинство этого метода, общего уравнения динамики, – реакции связей (идеальных) исключаются при исследовании движения системы.

Иногда это уравнение можно использовать для исследования движения механических систем и в тех случаях, когда не все связи являются идеальными, например, когда имеются связи с трением. Для этого следует к активным силам добавить те составляющие реакций, которые обусловлены наличием сил трения.

Рассмотрим процедуру использования уравнения (3) для составления дифференциальных уравнений движения систем с двумя степенями свободы:

1. Изобразить механическую систему в произвольный момент времени.
2. Показать на рисунке активные силы и моменты, а также силы и моменты, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения).
3. Определить главные векторы и главные моменты сил инерции.
4. Выбрать обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы системы.
5. Дать виртуальное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом виртуальные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю.
6. Вычислить сумму элементарных работ всех сил и моментов (см. п. 2 и 3) на соответствующих виртуальных перемещениях и приравнять эту сумму нулю.
7. Повторить п. 4 - 6 для каждого независимого движения системы.

При применении общего уравнения динамики к системам с двумя и большим числом степеней свободы, в связи с громоздкостью выкладок, можно использовать следующие рекомендации:

1. Сделать предположение о направлении ускорений точек системы.
2. Направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений.
3. Определить знаки элементарных работ сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями виртуальных перемещений точек системы.
4. Если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону.

Пример 22. Определим ускорение груза G (рис.68). Вес цилиндра – P , радиус – r . Цилиндр катится по плоскости без скольжения.

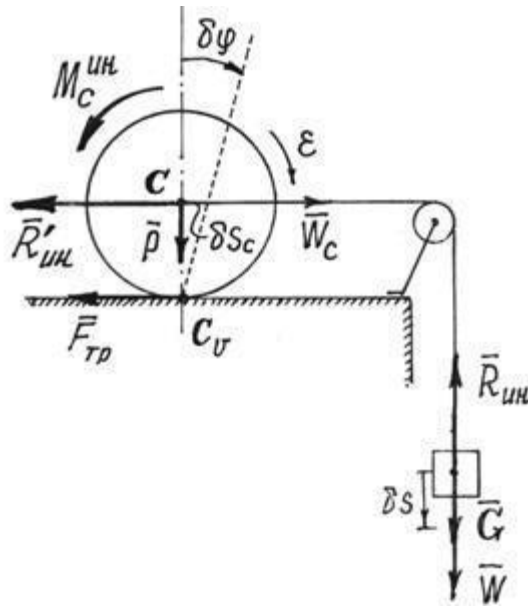


Рис.68

Показываем задаваемые силы – \bar{P} , \bar{G} , $\bar{F}_{\text{тр}}$. Добавляем силы инерции. Сила инерции груза, движущегося поступательно,

$$R_{\text{ин}} = \frac{G}{g} W.$$

Цилиндр совершает плоскопараллельное движение. Главный вектор сил инерции точек его

$$R'_{\text{ин}} = \frac{P}{g} W_c = \frac{P}{g} W.$$

Главный момент сил инерции относительно центральной оси С:

$$M_c^{\text{ин}} = J_c \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \frac{W_c}{r} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r W$$

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_c}{CC_v} = \frac{1}{r} \frac{dv_c}{dt} = \frac{W_c}{r}.$$

так как

Даем системе возможное перемещение, сдвинув груз вниз на малую величину δs .

Центр цилиндра сместится вправо на величину $\delta s_c = \delta s$, а весь цилиндр повернется вокруг мгновенного центра скоростей C_v на угол

$$\delta \varphi = \frac{\delta s_c}{r} = \frac{\delta s}{r}.$$

Вычисляем работу сил на этих перемещениях и составляем уравнение работ, общее уравнение динамики,

$$G \cdot \delta s - R_{\text{ин}} \cdot \delta s - R'_{\text{ин}} \cdot \delta s_c - M_c^{\text{ин}} \cdot \delta \varphi = 0.$$

Так как $\delta s = \delta s_c = r \delta \varphi$, то, подставив значения сил инерции, получим уравнение

$$Gr \delta \varphi - \frac{G}{g} Wr \cdot \delta \varphi - \frac{P}{g} Wr \cdot \delta \varphi - \frac{1}{2} \frac{P}{g} Wr \cdot \delta \varphi = 0,$$

из которого находим

$$W = \frac{2G}{2G + 3P} g.$$

Обобщенные координаты

Обобщенными координатами мы будем называть параметры, которые определяют положение материальной системы.

Это могут быть обычные декартовы координаты точек, углы поворота, расстояния, площади, объемы и т.д.

Так на рис.69 положение балочки AB и всех ее точек вполне определяется углом φ .

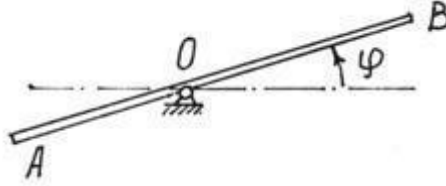


Рис.69

Положение точек кривошипно-шатунного механизма (рис.70) можно определить заданием угла поворота φ кривошипа или расстоянием s , определяющим положение ползуна B (при $0 < \varphi < \pi$).

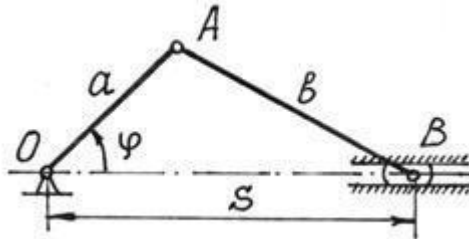


Рис.70

Положение сферического маятника (рис.71) определяется заданием двух параметров, углов φ_1 и φ_2 .

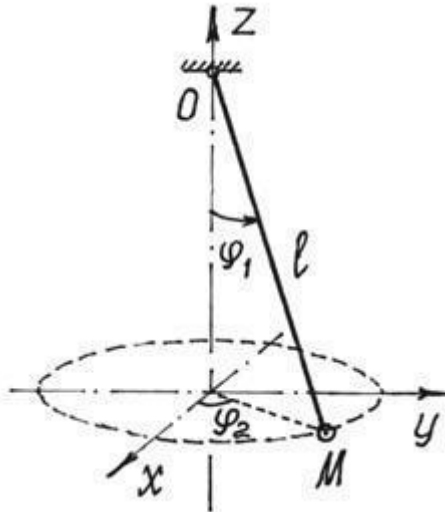


Рис.71

Минимальное количество независимых друг от друга обобщенных координат, которых достаточно, чтобы полностью и однозначно определить положение всех точек системы, называют *числом степеней свободы* этой системы.

Вообще для любой материальной системы можно назначить несколько обобщенных координат. Например, у кривошипно-шатунного механизма (рис.70) указаны две обобщенные координаты φ и s . Но это не значит, что у механизма две степени свободы, так как одну координату можно определить через другую:

$$s = a \cdot \cos \varphi + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}.$$

А вот у маятника (рис.71) две степени свободы, т.к. определяется его положение дву-

мя независимыми обобщенными координатами. Кстати, если длина маятника изменяется, то для определения положения точки M потребуется еще один параметр – обобщенная координата l , длина нити. И у маятника станут три степени свободы.

Обобщенные координаты в общем случае будем обозначать буквой q .

Пусть материальная система имеет s степеней свободы. Положение ее определяется обобщенными координатами: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, \dots, q_s$.

Нетрудно убедиться, что декартовы координаты n точек системы можно определить как функции обобщенных координат и времени:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (5)$$

Так у маятника (рис.71) координаты точки M

$$\begin{aligned} x_M &= l \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ y_M &= l \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ z_M &= l \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

есть функции координат l , φ_1 и φ_2 , и времени t , если $l = l(t)$.

Соответственно, и радиус-вектор точек системы можно определить как функцию обобщенных координат и времени:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (6)$$

Обобщенные силы

Каждой обобщенной координате q_k можно вычислить соответствующую ей обобщенную силу Q_k .

Вычисление производится по такому правилу.

Чтобы определить обобщенную силу Q_k , соответствующую обобщенной координате q_k , надо дать этой координате приращение δq_k (увеличить координату на эту величину), оставив все другие координаты неизменными, вычислить сумму работ всех сил, приложенных к системе, на соответствующих перемещениях точек и поделить ее на приращение координаты δq_k :

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{s}_i \cos \alpha_i, \quad (7)$$

где $\delta \vec{s}_i$ перемещение i -той точки системы, полученное за счет изменения k -той обобщенной координаты.

Обобщенная сила определяется с помощью элементарных работ. Поэтому эту силу можно вычислить иначе:

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k}$$

И так как $\delta \vec{r}_i$ есть приращение радиуса-вектора $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t)$ за счет приращения координаты q_k при остальных неизменных координатах и времени t , отношение $\frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k}$ можно определять как частную производную $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$. Тогда

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \quad (8)$$

где координаты точек – функции обобщенных координат (5).

Если система консервативная, то есть движение происходит под действием сил потенциального поля, проекции которых

$$X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i},$$

где $\Pi = \Pi(x_i, y_i, z_i)$, а координаты точек – функции обобщенных координат, то

$$Q_k = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \quad (9)$$

Обобщенная сила консервативной системы есть частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате со знаком минус.

Конечно, при вычислении этой обобщенной силы потенциальную энергию следует определять как функцию обобщенных координат

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s).$$

Замечания.

Первое. При вычислении обобщенных сил реакции идеальных связей не учитываются.

Второе. Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты. Так если размерность $[q]$ – метр, то размерность

$$[Q] = \text{Нм/м} = \text{Ньютон}, \text{ если } [q] \text{ – радиан, то } [Q] = \text{Нм}; \text{ если } [q] = \text{м}^2, \text{ то } [Q] = \frac{\text{Н}}{\text{м}} \text{ и т.п.}$$

Пример 23. По качающемуся в вертикальной плоскости стержню скользит колечко M весом P (рис.72). Стержень считаем невесомым. Определим обобщенные силы.

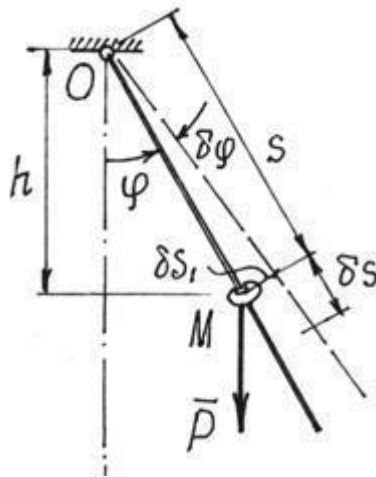


Рис.72

Система имеет две степени свободы. Назначаем две обобщенные координаты s и φ .

Найдем обобщенную силу, соответствующую координате s . Даем приращение δs этой координате, оставляя координату φ неизменной, и вычислив работу единственной активной силы P , получим обобщенную силу

$$Q_s = \frac{1}{\delta s} (P \cdot \delta s \cdot \cos \varphi) = P \cos \varphi$$

Затем даем приращение $\delta \varphi$ координате φ , полагая $s = \text{const}$. При повороте стержня на угол $\delta \varphi$ точка приложения силы P , колечко M , переместится на $\delta s_1 = s \cdot \delta \varphi$. Обобщенная сила получится

$$Q_\varphi = \frac{1}{\delta \varphi} (-P \cdot \delta s_1 \cdot \sin \varphi) = -\frac{1}{\delta \varphi} P s \delta \varphi \sin \varphi = -P s \sin \varphi$$

Так как система консервативная, обобщенные силы можно найти и с помощью потенциальной энергии

гии $\Pi = -P\kappa = -Ps \cos \varphi$. Получим $Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = -P \cos \varphi$ и $Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -Ps \cdot \sin \varphi$. Получается гораздо проще.

Уравнения равновесия Лагранжа

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i, \quad k = 1, 2, 3, \dots, s, \text{ где } s - \text{число степеней свободы.}$$

По определению (7) обобщенные силы

Если система находится в равновесии, то по принципу возможных перемещений (1) $\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0$. Здесь δs_i – перемещения, допускаемые связями, возможные перемещения. Поэтому при равновесии материальной системы все ее обобщенные силы равны нулю:

$$Q_k = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots, s). \quad (10)$$

Эти уравнения, *уравнения равновесия в обобщенных координатах* или *уравнения равновесия Лагранжа*, позволяют решать задачи статики еще одним методом.

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$$

Если система консервативная, то $\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0$. То есть в положении равновесия такой материальной системы ее потенциальная энергия либо максимальна, либо минимальна, т.е. функция $\Pi(q)$ имеет экстремум.

Это очевидно из анализа простейшего примера (рис.73). Потенциальная энергия шарика в положении M_1 имеет минимум, в положении M_2 – максимум. Можно заметить, что в положении M_1 равновесие будет устойчивым; в положении M_2 – неустойчивым.

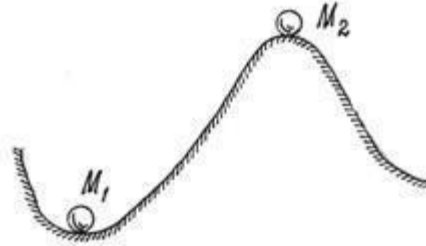


Рис.73

Равновесие считается устойчивым, если телу в этом положении сообщить малую скорость или сместить на малое расстояние и эти отклонения в дальнейшем не увеличатся.

Можно доказать (теорема Лагранжа-Дирихле), что если в положении равновесия консервативной системы ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Для консервативной системы с одной степенью свободы условие минимума потенциальной энергии, а значит и устойчивости положения равновесия, определяется, второй производной, ее значением в положении равновесия,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0 \quad (11)$$

Пример 24. Стержень OA весом P может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси O (рис.74). Найдём и исследуем устойчивость положений равновесия.

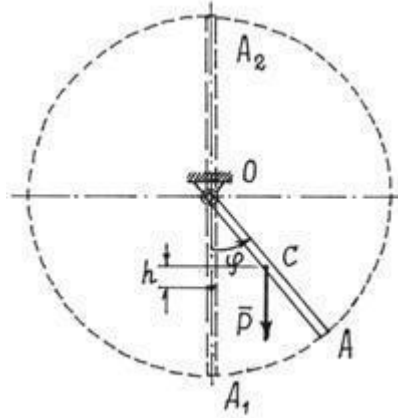


Рис.74

Стержень имеет одну степень свободы. Обобщенная координата – угол φ .
Относительно нижнего, нулевого, положения потенциальная энергия $\Pi = Ph$ или

$$\Pi = P \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi \right) = \frac{1}{2} Pl (1 - \cos \varphi).$$

В положении равновесия должно быть $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} Pl \sin \varphi = 0$. Отсюда имеем два положения равновесия, соответствующие углам $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ (положения OA_1 и OA_2). Исследуем

их устойчивость. Находим вторую производную $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} Pl \cos \varphi$. Конечно,

при $\varphi = \varphi_1 = 0$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} Pl > 0$. Положение равновесия устойчиво.

При $\varphi = \varphi_2 = \pi$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} Pl < 0$. Второе положение равновесия – неустойчиво. Результаты очевидны.

Обобщенные силы инерции.

По той же методике (8), по которой вычислялись обобщенные силы Q_k , соответствующие активным, задаваемым, силам, определяются и обобщенные силы S_k , соответствующие силам инерции точек системы:

$$S_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{ин}} \delta \mathbf{r}_i \cos \beta_i = \frac{1}{\delta q_k} \sum \overline{F}_i^{\text{ин}} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}_i}{\delta q_k} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (12)$$

И, так как $\overline{F}_i^{\text{ин}} = -m_i \overline{W}_i = -m_i \frac{d\overline{v}_i}{dt}$, то $S_k = -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overline{v}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$. (13)

Немного математических преобразований.

Очевидно, $\frac{d}{dt} \left(\overline{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d\overline{v}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} + \overline{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$.

Отсюда $\frac{d\overline{v}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\overline{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - \overline{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$. (14)

Так как $\overline{r}_i = \overline{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t)$, а $q_k = q_k(t)$, ($k = 1, 2, 3, \dots, s$), то

$$\overline{v}_i = \frac{d\overline{r}_i}{dt} = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dots + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial t}, \quad \text{где } \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Значит, частная производная скорости \overline{v}_i по \dot{q}_k

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}. \quad (15)$$

Кроме того, в последнем члене (14) можно поменять порядок дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d \bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14), а потом (14) в (13), получим

$$S_k = -\sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} \right] = -\sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_k} \right].$$

Разделив последнюю сумму на две и, имея ввиду, что сумма производных равна производной от суммы, получим

$$S_k = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (17)$$

где $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$ – кинетическая энергия системы, $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ – обобщенная скорость.

Уравнения Лагранжа.

По определению (7) и (12) обобщенные силы

$$Q_k = \frac{1}{\partial q_k} \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i; \quad S_k = \frac{1}{\partial q_k} \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i$$

$$Q_k + S_k = \frac{1}{\partial q_k} (\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i)$$

Сумма их

или

$$(Q_k + S_k) \partial q_k = \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i.$$

Но на основании общего уравнения динамика (3), правая часть равенства равна нулю.

И так как все ∂q_k ($k = 1, 2, 3, \dots, s$) отличны от нуля, то $Q_k + S_k = 0$. Подставив значение обобщенной силы инерции (17), получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, s). \quad (18)$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах, уравнениями Лагранжа второго рода* или просто – *уравнениями Лагранжа*.

Количество этих уравнений равно числу степеней свободы материальной системы.

Если система консервативная и движется под действием сил потенциального поля,

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k},$$

когда обобщенные силы $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$, уравнения Лагранжа можно составить по форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

или $(k = 1, 2, 3, \dots, s), \quad (20)$

где $L = T - \Pi$ называется *функцией Лагранжа* (предполагается, что потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей).

Нередко при исследовании движения материальных систем оказывается, что некоторые обобщенные координаты q_j не входят явно в функцию Лагранжа (или в T и Π). Такие координаты называют *циклическими*. Уравнения Лагранжа, соответствующие этим координатам, получаются проще.

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad \text{то} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Так как Первый интеграл таких уравнений находится сразу. Он называется циклическим интегралом:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const.} \tag{21}$$

Дальнейшие исследования и преобразования уравнений Лагранжа составляют предмет специального раздела теоретической механики – «Аналитическая механика».

Уравнения Лагранжа обладают целым рядом достоинств в сравнении с другими способами исследования движения систем. Основные достоинства: методика составления уравнений одинакова во всех задачах, реакции идеальных связей не учитываются при решении задач.

И еще одно – эти уравнения можно использовать для исследования не только механических, но и других физических систем (электрических, электромагнитных, оптических и др.).

Пример 25. Продолжим исследование движение колечка M на качающемся стержне (пример 23).

Обобщенные координаты назначены – φ и s (рис.75). Обобщенные силы определены: $Q_s = P \cos \varphi$ и $Q_\varphi = -Ps \cdot \sin \varphi$.

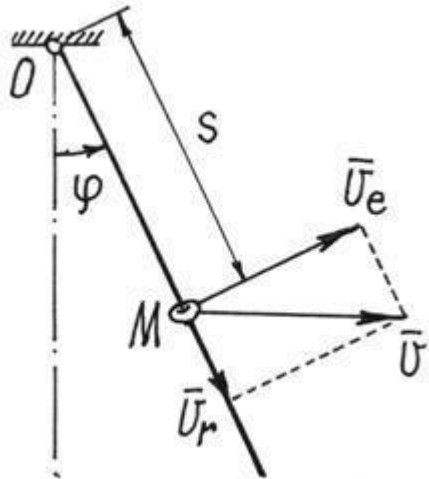


Рис.75

Кинетическая энергия колечка $T = \frac{1}{2} m v^2$. Где $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$,
 $v^2 = v_e^2 + v_r^2$ и $v_e = s\dot{\varphi} = s\dot{\phi}$, $v_r = \dot{s}$.

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (s^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2).$$

Поэтому

Составляем два уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s, \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$\text{Так как} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P}{g} \dot{s}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P}{g} \ddot{s}, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{P}{g} s \dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g} s^2 \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g} (2s\dot{s}\dot{\varphi} + s^2\ddot{\varphi}), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

то уравнения получаются такими:

$$\frac{P}{g}\ddot{s} - \frac{P}{g}s\dot{\varphi}^2 = P\cos\varphi,$$

$$\frac{P}{g}(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}) = -Ps \cdot \sin\varphi$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{s} - s\dot{\varphi}^2 - g \cdot \cos\varphi &= 0, \\ \text{или } s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi} + g \cdot \sin\varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Получили два нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка, для решения которых нужны специальные методы.

Пример 26. Составим дифференциальное уравнение движения балочки AB , которая перекачивается без скольжения по цилиндрической поверхности (рис.76). Длина балочки $AB = l$, вес $-P$.

В положении равновесия балочка располагалась горизонтально и центр тяжести C ее находился на верхней точке цилиндра. Балочка имеет одну степень свободы. Положение ее определяется обобщенной координатой – углом φ (рис.76).

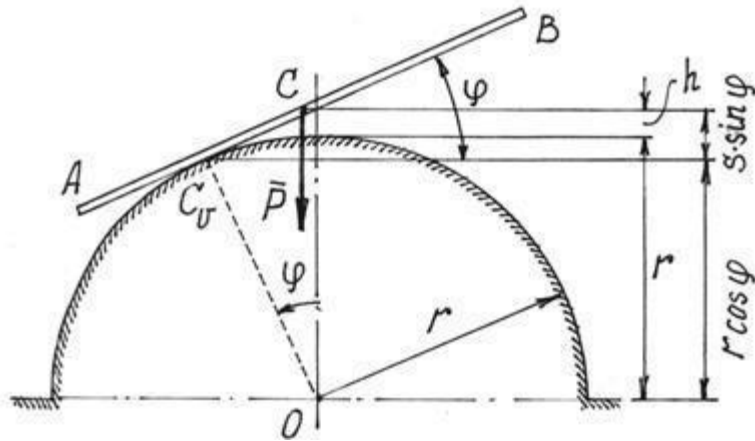


Рис.76

Система консервативная. Поэтому уравнение Лагранжа составим с помощью потенциальной энергии $\Pi = mgh$, вычисленной относительно горизонтального положения. В точке касания находится мгновенный центр скоростей и $CC_v = s = r\varphi$ (CC_v равно длине дуги окружности с углом φ).

Поэтому $h = r \cos\varphi + s \sin\varphi = r$ (см. рис.76) и $\Pi = mgr(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - 1)$.

Кинетическая энергия (балка совершает плоскопараллельное движение)

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}ms^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12}l^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0.$$

Находим необходимые производные для уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2\dot{\varphi} + \frac{1}{12}l^2\dot{\varphi}), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\left[2r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + (r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12}l^2\ddot{\varphi})\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = mr^2\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgr(-\sin\varphi + \sin\varphi + \varphi \cos\varphi) = mgr\varphi \cos\varphi$$

Составляем уравнение

$$m\left[2r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + (r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12}l^2\ddot{\varphi})\right] - mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\varphi \cos\varphi = 0$$

или, окончательно,

$$(r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12} l^2) \ddot{\varphi} + r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + gr \varphi \cos \varphi = 0$$

Лекция 9 Явление удара

Явление удара.

Ударом будем называть кратковременное действие на тело некоторой силы \vec{F} . Силы, возникающей, например, при встрече двух массивных тел.

Опыт показывает, что взаимодействие их очень кратковременно (время контакта исчисляется тысячными долями секунды), а сила удара довольно велика (в сотни раз превышает вес этих тел). Да и сама сила – не постоянна по величине. Поэтому явление удара – сложный процесс, сопровождающийся к тому же деформацией тел. Точное исследование его требует знания физики твердого тела, законов тепловых процессов, теории упругости и др.

Мы же воспользуемся довольно простыми методами исследования, но которые, как подтверждает практика, достаточно правильно объясняют явление удара.

Поскольку сила удара \vec{F} очень велика, а продолжительность его, время τ , мало, при описании процесса удара будем пользоваться не дифференциальными уравнениями движения, а теоремой об изменении количества движения. Потому что измеряемой конечной вели-

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt.$$

чиной является не сила удара, а импульс ее

Чтобы сформулировать первые особенности явления удара, рассмотрим сначала действие такой силы на материальную точку.

Пусть к материальной точке M , движущейся под действием обычных сил \vec{F}_i по некоторой траектории (рис.111), в какой-то момент была приложена на мгновение, большая сила \vec{F} . С помощью теоремы об изменении количества движения за время удара τ составляем уравнение $m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{S}$ где \vec{v}_2 и \vec{v}_1 – скорости точки в конце и в начале удара; \vec{S} – импульс мгновенной силы \vec{F} . Импульсами обычных сил, под действием которых точка двигалась, можно пренебречь – за время τ они будут очень малы.

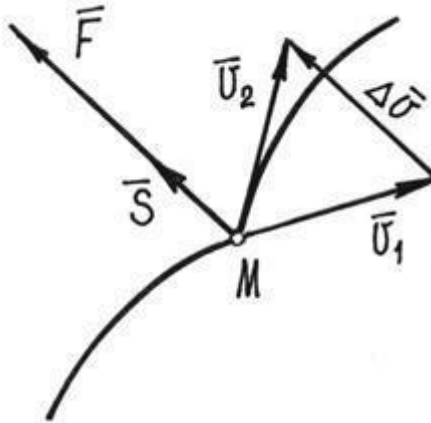


Рис.111

Из уравнения находим изменение скорости за время удара (рис.111):

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{S}/m$$

Это изменение скорости оказывается конечной величиной.

Дальнейшее движение точки начнется со скоростью \vec{v}_2 и продолжится под действием прежних сил, но по траектории, получившей излом.

Теперь можно сделать несколько выводов.

1. При исследовании явления удара обычные силы можно не учитывать.
2. Так как время τ мало, перемещением точки за время удара можно пренебречь.
3. Единственный результат действия удара – только изменение вектора скорости.

Прямой центральный удар двух тел.

Удар называется *прямым и центральным*, если центры масс тел до удара двигались по одной прямой, по оси x , точка встречи их поверхностей оказывается на этой же прямой и общая касательная T к поверхностям будет перпендикулярна оси x (рис.112).

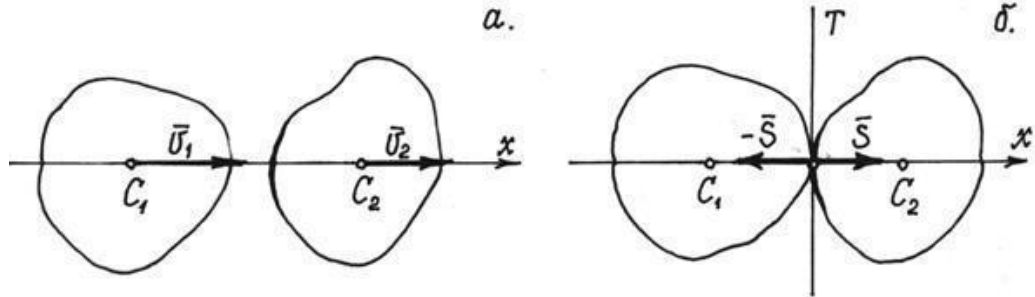


Рис.112

Если касательная T не перпендикулярна этой оси, удар называется *косым*

Пусть тела двигались поступательно со скоростями их центров масс \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Определим каковы будут их скорости \vec{u}_1 и \vec{u}_2 после удара.

За время удара τ на тела действуют ударные силы \vec{F} , импульсы \vec{S} которых, приложенные в точке касания, показаны на рис.112,б. По теореме об изменении количества движения, в проекциях на ось x , получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_1 - v_1) &= -S, \\ m_2(u_2 - v_2) &= S, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где m_1 и m_2 - массы тел; v_1, v_2, u_1, u_2 - проекции скоростей на ось x .

Конечно, этих двух уравнений недостаточно для определения трех неизвестных (u_1, u_2 и S). Нужно еще одно, которое, естественно, должно характеризовать изменение физических свойств этих тел в процессе удара, учитывать упругость материала и его диссипативные свойства.

Рассмотрим сначала удар пластичных тел, таких, которые по окончании удара не восстанавливают деформированный объем и продолжают двигаться как одно целое со скоростью u , т.е. $u_1 = u_2 = u$. Это и будет недостающее третье уравнение. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} m_1(u - v_1) &= -S, \\ m_2(u - v_2) &= S. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Решив эти уравнения, получим

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (3)$$

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (4)$$

Так как величина импульса S должна быть положительной, то для того чтобы произошел удар, требуется выполнение условия $v_1 > v_2$.

Нетрудно убедиться, что удар пластичных, неупругих тел сопровождается потерей их кинетической энергии.

Кинетическая энергия тел до удара $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$. После удара $T_2 = \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2$. Отсюда $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - u^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - u^2) = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)(v_1 + u) + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)(v_2 + u)$. Или, учитывая (2), $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} S(v_1 + u) - \frac{1}{2} S(v_2 + u) = \frac{1}{2} S(v_1 - v_2)$. И, подставив значение импульса S , по (4), получим

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (5)$$

Эта «потерянная» энергия расходуется на деформацию тел, на нагревание их при ударе, (можно убедиться, что после нескольких ударов молотком, деформированное тело сильно нагревается).

Заметим, что если одно из тел до удара было неподвижным, например $v_2 = 0$, то потерянная энергия

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} T_1$$

(так как энергия тел до удара в этом случае была только у первого тела, $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$). Таким образом, потеря энергии, энергии затраченной на деформацию тел, составляет часть энергии ударяющего тела.

Следовательно, при ковке металла, когда желательно чтобы ΔT было побольше, отношение m_1/m_2 нужно сделать как можно меньше, $m_2 \gg m_1$. Поэтому наковальню делают тяжелой, массивной. Аналогично, при клепке какой-либо детали, молоток надо выбирать полегче.

И, наоборот, при забивании гвоздя или сваи в грунт, молоток (или бабу копра) надо брать потяжелее, чтобы деформация тел была меньше, чтобы большая часть энергии пошла на перемещение тела.

Перейдем теперь к удару упругих тел.

Ударный процесс таких тел происходит гораздо сложнее. Под действием ударной силы деформация их сначала увеличивается, увеличивается до тех пор пока скорости тел не уравниваются. А затем, за счет упругости материала, начнется восстановление формы. Скорости тел начнут изменяться, изменяться до тех пор пока тела не отделятся друг от друга.

Разделим процесс удара на две стадии: от начала удара до того момента, когда скорости их уравниваются и будут равными u ; и от этого момента до конца удара, когда тела разойдутся со скоростями u_1 и u_2 .

Для каждой стадии получим по два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m_1(u - v_1) &= -S_1, \\ m_2(u - v_2) &= S_1; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_1 - u) &= -S_2, \\ m_2(u_2 - u) &= S_2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где S_1 и S_2 – величины импульсов взаимных реакций тел для первой и второй стадий. Уравнения (6) аналогичны уравнениям (2). Решая их, получим

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad S_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

В уравнениях (7) три неизвестные величины (u_1 , u_2 , S_2). Не хватает одного уравнения, которое опять должно характеризовать физические свойства этих тел.

$$\frac{S_2}{S_1} = k$$

Положим отношение импульсов $\frac{S_2}{S_1} = k$. Это и будет дополнительное третье уравнение.

Опыт показывает, что величину k можно считать зависящей только от упругих свойств этих тел. (Правда, более точные эксперименты показывают, что есть некоторые зависимости и от их формы). Определяется этот коэффициент экспериментально для каждого конкретного тела. Называется он *коэффициентом восстановления скорости*. Величина его $0 \leq k \leq 1$. У пластичных тел $k = 0$, у абсолютно упругих тел $k = 1$.

Решая, теперь, уравнения (7) и (6), получим скорости тел после окончания удара.

$$u_1 = u + k(u - v_1), \quad u_2 = u + k(u - v_2). \quad (8)$$

Можно найти, как и при ударе пластичных тел, потерю кинетической энергии при ударе упругих тел. Она получится такой

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2). \quad (9)$$

Заметим, что при ударе абсолютно упругих тел ($k = 1$) кинетическая энергия не изменяется, не «теряется» ($\Delta T = 0$, $T_1 = T_2$).

Пример 33. Металлический шарик падает с высоты h_1 на горизонтальную массивную плиту. После удара он подскакивает на высоту h_2 (рис.113).

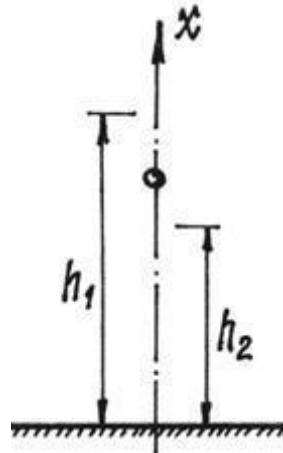


Рис.113

В начале удара о плиту проекция скорости шарика на ось x $v_1 = -\sqrt{2gh_1}$, а скорость неподвижной плиты $v_2 = 0$. Считая, что масса плиты $m_2 \gg m_1$, много больше массы шарика, можно положить $u = 0$ и $u_2 = 0$. Тогда по (8) $u_1 = -kv_1$. (Теперь, кстати, понятно почему коэффициент k называется коэффициентом восстановления скорости.)

Итак, скорость шарика в конце удара $u_1 = k\sqrt{2gh_1}$ и направлена вверх ($u_1 > 0$). Шарик подскакивает на высоту h_2 , связанную со скоростью формулой $u_1 = \sqrt{2gh_2}$. Зна-

чит, $\sqrt{2gh_2} = k\sqrt{2gh_1}$ и $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$. По последней формуле, кстати, и определяется коэффициент восстановления k для материалов, из которых сделаны шарик и плита.

Удар по вращающемуся телу.

При исследовании удара по вращающемуся телу кроме теоремы об изменении количества движения приходится использовать и закон моментов. Относительно оси вращения его запишем так $dL_z = \sum M_x(\vec{F})dt$ и, после интегрирования за время удара τ ,

$$L_z^k - L_z^h = \sum \int_0^\tau M_x(\vec{F}_i)dt \quad \text{или} \quad J_z(\omega_2 - \omega_1) = \sum \int_0^\tau M_x(\vec{F}_i)dt,$$

где ω_1 и ω_2 - угловые скорости тела в начале и в конце удара, \vec{F}_i - ударные силы.

Правую часть надо немного преобразовать. Найдем, сначала, интеграл момента ударной силы относительно неподвижной точки O :

$$\int_0^\tau \vec{M}_O(\vec{F}_i)dt = \int_0^\tau (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)dt = \int_0^\tau (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)dt = \vec{r}_i \times \int_0^\tau \vec{F}_i dt = \vec{r}_i \times \vec{S}_i = \vec{M}_O(\vec{S}_i)$$

При этом предполагалось, что за малое время удара τ радиус-вектор \vec{r}_i считался неизменным, постоянным.

Проектируя результат этого векторного равенства на ось вращения z , проходящую через точку O , получим

$$\int_0^\tau M_x(\vec{F}_i)dt = M_x(\vec{S}_i)$$

, т.е. интеграл равен моменту вектора импульса ударной силы относительно оси вращения. Закон моментов в преобразованном виде запишется, теперь, так:

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = \sum M_x(\vec{S}_i) \tag{10}$$

В качестве примера рассмотрим удар вращающегося тела о неподвижную преграду.

Тело, вращаясь вокруг горизонтальной оси O , ударяется о преграду A (рис.114). Определим ударные импульсы сил, возникающих в подшипниках на оси, \vec{S}_x и \vec{S}_y .

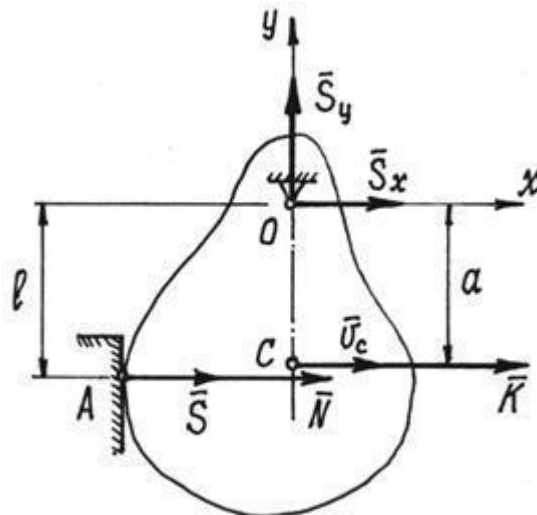


Рис.114

По теореме об изменении количества движения $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i$ в проекциях на оси x и y получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} mv_1 - mv_2 &= S + S_x, \\ 0 &= S_y, \end{aligned} \right\}$$

где скорости центра масс C в начале и конце удара $v_1 = a\omega_1$, $v_2 = a\omega_2$. Поэтому первое уравнение станет таким $ma(\omega_2 - \omega_1) = S + S_x$.

Третье уравнение, по (10), получится в виде $J_z(\omega_2 - \omega_1) = Sl$, из которого нахо-

$$\text{дим } S = \frac{J_x}{l} (\omega_2 - \omega_1).$$

И, так как коэффициент восстановления

$$k = \frac{u_1}{v_1} = \frac{a_2}{a_1},$$

то $S = -\frac{J_x}{l} (1-k) a_1$ (в нашем примере $a_1 < 0$, поэтому ударный импульс $S > 0$, то есть направлен так, как показано на рисунке).

Находим импульсы реакции оси: $S_y = 0$,

$$S_x = ma(\omega_2 - \omega_1) - S = -ma(1-k) a_1 + \frac{J_x}{l} (1-k) a_1 = \left(\frac{J_x}{l} - ma \right) (1-k) a_1.$$

Обязательно надо обратить внимание на то, что при $l = \frac{J_x}{ma} = l_{\text{уд}}$ ударные импульсы в подшипниках оси будут равны нулю.

Место, точка удара, расположенная на этом расстоянии $l_{\text{уд}}$ от оси вращения, называется *центром удара*. При ударе по телу в этом месте ударные силы в подшипниках не возникают.

Кстати, заметим, что центр удара совпадает с точкой где приложены равнодействующая сил инерции и вектор количества движения.

Вспомним, что при ударе длинной палкой по неподвижному предмету, мы нередко испытывали рукой неприятный ударный импульс, как говорят – «отбивали руку».

Нетрудно найти в этом случае центр удара – место, которым следует ударить, чтобы не почувствовать это неприятное ощущение (рис.115).

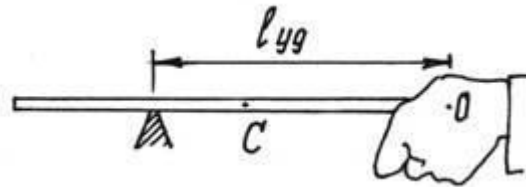


Рис.115

Так как $J_o = \frac{1}{3} ml^2$ (l – длина палки) и $a = OC = 0,5l$, то

$$l_{\text{уд}} = \frac{ml^2}{3 \cdot m0,5l} = \frac{2}{3} l.$$

Следовательно, центр удара находится на расстоянии трети длины от конца палки.

Понятие центра удара учитывают при создании различных ударных механизмов и других конструкций, где встречаются ударные процессы.

Сергей Николаевич Петряков
Ольга Михайловна Каняева
Антон Алексеевич Хохлов
Ильмас Рифкатович Салахутдинов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА:

краткий курс лекций

для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» - Дмитровград: Технологический институт – филиал УлГАУ, 2023.- 229 с.