Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Технологический институт-филиал ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

С.Н. Петряков
О.М. Каняева
А.А. Хохлов
И.Р. Салахутдинов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

краткий курс лекций

Димитровград - 2023

УДК 629
ББК 39.3
П - 31

Петряков, С.Н. Начертательная геометрия : краткий курс лекций / С.Н. Петряков, О.М. Каняева, А.А. Хохлов, И.Р. Салахутдинов,, - Димитровград: Технологический институт – филиал УлГАУ, 2023.- 64 с.

Рецензенты: Глущенко Андрей Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Эксплуатация мобильных машин и технологического оборудования» ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

Начертательная геометрия : краткий курс лекций предназначен для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Утверждено
на заседании кафедры «Эксплуатация мобильных
машин и социально - гуманитарных дисциплин

Технологического института – филиала
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ,
протокол № 1 от 4 сентября 2023г.

Рекомендовано
к изданию методическим советом Технологического
института – филиала
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ
Протокол № 1 от 5 сентября 2023г.

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1 Введение. Предмет начертательной геометрии	4
Тема 2 Задание точки, прямой, плоскости и многогранников на комплексном чертеже Монжа	7
Тема 3 Позиционные задачи	18
Тема 4 Метрические задачи	26
Тема 5 Способы преобразования чертежа	31
Тема 6 Кривые линии	42
Тема 7 Поверхности. Поверхности вращения. Линейчатые поверхности. Винтовые поверхности	45
Тема 8 Обобщенные позиционные задачи	51
Тема 9 Касательные линии и плоскости к поверхности. Построение развёрток поверхностей	57
Тема 10 Аксонометрические проекции	60

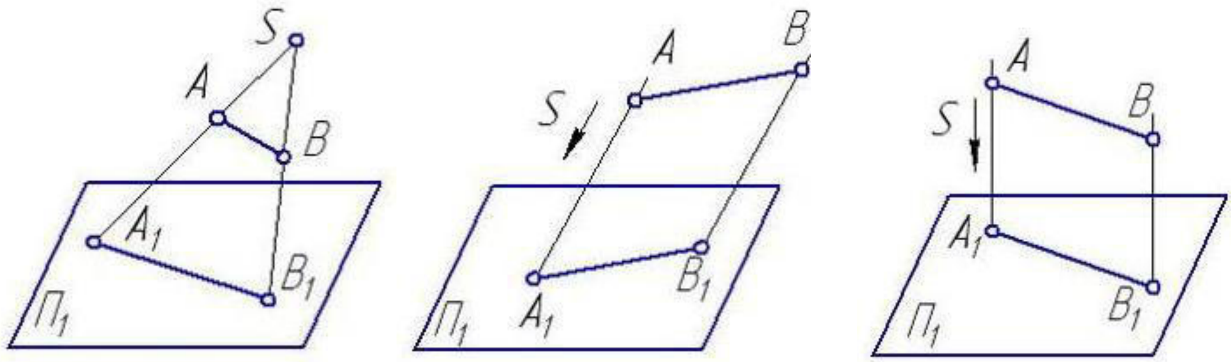
Тема 1 Введение. Предмет начертательной геометрии

Теоретической основой построения изображений на чертежах является начертательная геометрия – наука, которая разрабатывает способы построения изображений трехмерных объектов на плоскости и решение с помощью этих изображений различных задач (позиционных и метрических).

Проекцией предмета называется изображение на плоскости, полученное при помощи прямых линий – лучей, поведенных через каждую характерную точку предмета до пересечения с плоскостью.

Точки пересечения лучей с плоскостью называются проекциями точек предмета, а плоскость, на которую проецируются точки, плоскостью проекций.

Если все лучи, называемые проецирующими прямыми, проводятся из одной точки (центра проецирования) S, то полученное на плоскости проекций изображение геометрического объекта (ГО) называется его **центральной проекцией** (A_1B_1). Плоскость π_1 –плоскость проекций(рисунок 2,а).



а б в

а –центральное; б – параллельное косоугольное; в - прямоугольное

Рисунок 2

Центральные проекции наглядны, но для технического черчения неудобны в виду не соблюдения метрики.

Широкое применение в практике получил случай, когда центр проецирования удален в бесконечность. Проецирующие лучи при этом параллельны между собой и проекции называются **параллельными.** В свою очередь параллельные проекции подразделяются на **косоугольные** – проецирующие лучи не перпендикулярны к плоскости проекций (рисунок 2,б) и **прямоугольные** (ортогональные) – проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций (рисунок 2,в). S – направление проецирования.

Параллельное косоугольное проецирование применяют для построения наглядных изображений (аксонометрических проекций) различных деталей и устройств.

Ортогональное проецирование применяют для разработки чертежей во всех отраслях в связи с простотой геометрических построений ортогональных проекций и сохранения на проекциях при определенных условиях форм и размеров проецируемого объекта.

Основные свойства ортогонального проецирования:

1. Проекция точки всегда точка.
2. Проекция прямой линии в общем случае – прямая линия.
3. Если прямая параллельна направлению проецировании, то она проецируется в точку. Такая проекция прямой обладает собирательным свойством: все точки прямой проецируются в одну точку.
4. Проекция точки, принадлежащей некоторой линии, принадлежит проекции этой линии.
5. Точка пересечения линий проецируется в точку пересечения проекции этих линий, как принадлежащая им обеим, согласно 4-му свойству.
6. Проекция линий, принадлежащей какой- либо поверхности, принадлежит проекции этой поверхности. В свою очередь, проекция точки, лежащей на поверхности, принадлежат проекции хотя бы одной линии этой поверхности.
7. Параллельные прямые пространства проецируются в параллельные.
8. Если плоская фигура принадлежит плоскости, параллельной плоскости проекций, то проекция этой фигуры конгруэнтна (равна) самой фигуре.

9. Проекция точки на отрезке делит проекцию отрезка в том же отношении, в каком точка делит отрезок.

Комплексный чертеж. Эпюр Монжа. Все пространственные объекты (геометрические образы) ориентируют относительно пространственной декартовой системы координат – системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рисунок 3).

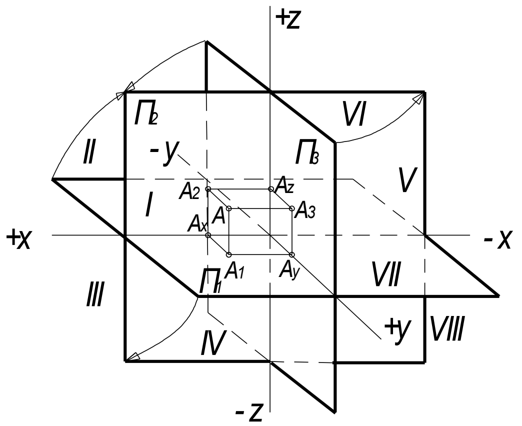


Рисунок 3

Координатные оси обозначают следующим образом: X – ось абсцисс; Y – ось ординат; Z – ось аппликат. Точка их пересечения O – начало координат.

Координатную плоскость ($x \cap y$), располагающуюся горизонтально, называют горизонтальной плоскостью проекций, две другие, расположенные вертикально ($x \cap z$) и ($y \cap z$), соответственно – фронтальной и профильной.

Как и в большинстве европейских стран, в России, принята правая система расположения осей проекций. Ось X направлена от начала координат влево, Y – вперед (к наблюдателю), Z – вверх – положительные направления. Обратные направления координатных осей считаются отрицательными.

Плоскости проекций, пересекаясь, образуют восемь двугранных углов (октантов), из которых приведенный на рисунке 3 (с обозначенными гранями π_1, π_2, π_3) считается первым.

Гаспар Монж предложил преобразовать декартову систему координат так, чтобы горизонтальная плоскость проекций π_1 и профильная π_3 совпадали с фронтальной плоскостью проекций π_2 (направление вращения показано на рисунке 3 стрелками). В результате указанного совмещения плоскостей π_1, π_2, π_3 получается чертеж – рисунок 4 , известный под названием эпюр Монжа.

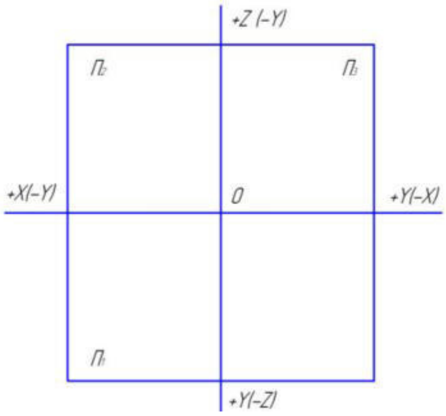


Рисунок 4

Эпюр обеспечивает точность и удобное измерение изображения при значительной простоте построения, хотя и утрачена пространственная картина расположения плоскостей проекций.

Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Что изучают в начертательной геометрии?
2. Перечислите основные методы проецирования.
3. Какие основные преимущества присущи ортогональному проецированию по сравнению с косоугольным проецированием?
4. Как образуется эпюр Монжа?

Тема 2 Задание точки, прямой, плоскости и многогранников на комплексном чертеже Монжа

Комплексный чертеж точки. *Точка* – основной геометрический элемент линии и поверхности, поэтому изучение прямоугольного проецирования предмета начинается с построения прямоугольных проекций точки.

Проекцией точки является ***точка****.*

Положение точки в пространстве определяют три координаты (x;y;z) (рисунок 5).

Абсцисса точки **(x)** – расстояние от точки до профильной плоскости проекций.

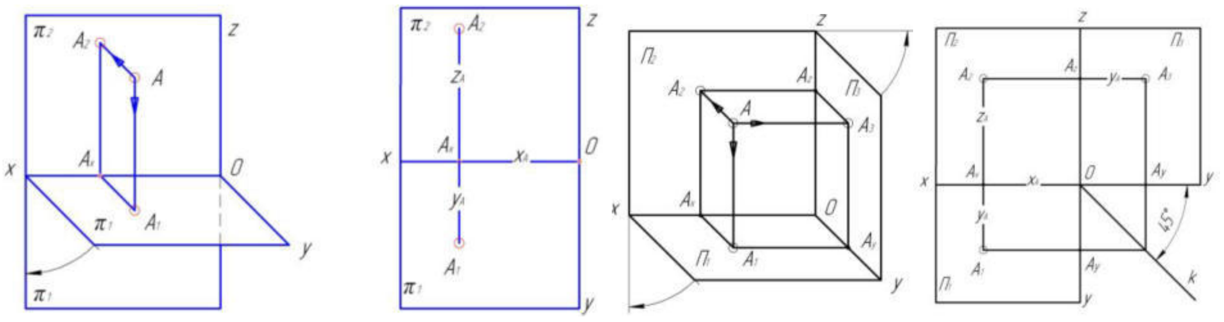
Ордината точки **(y)** – расстояние от точки до фронтальной плоскости проекций.

Аппликата точки **(z)** – расстояние от точки до горизонтальной плоскости проекций.

Две любые проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве.

Перпендикуляры, проведенные из точки А к плоскостям проекций, называются проецирующими линиями или линиями проекционной связи, а основания этих проецирующих линий — точки A_1, A_2 и A_3 — называются проекциями точки А: $A_1(x;y)$— горизонтальная проекция; $A_2(x;z)$— фронтальная проекция; $A_3(y;z)$– профильная проекция точки А.

Фронтальная (A_2) и горизонтальная (A_1) проекции точки всегда лежат на одном перпендикуляре к оси X, а фронтальная (A_2) и профильная (A_3) – на одном перпендикуляре к оси Z .



а б

Рисунок 5 – Проецирование точки на две плоскости проекций (а); на три плоскости проекций (б)

Ортогональные проекции прямой. Проекциями прямой в общем случае являются прямые линии (рисунок 6), которые на чертеже могут задаваться отрезком, точкой и направлением и только направлением.

Прямая линия бесконечна. Две точки прямой определяют ее положение в пространстве.

Если точка на отрезке делит его длину в данном отношении, то проекция точки делит длину одноименной проекции отрезка в том же отношении.

Пример построения на чертеже проекции точки C - C_1 и C_2 делящей отрезок с проекциями A_1B_1, A_2B_2 в отношении 1:4, показан на рисунке 6.

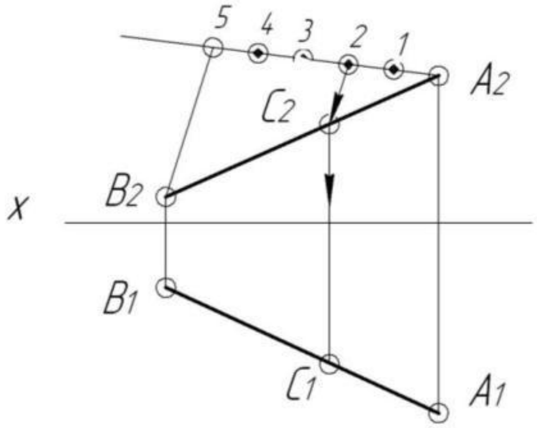


Рисунок 6

По расположению прямых относительно плоскостей проекций различают прямые **общего и частного положений**.

Прямая общего положения – прямая не параллельная и не перпендикулярная ни одной из основных плоскостей проекций (рисунок 7).

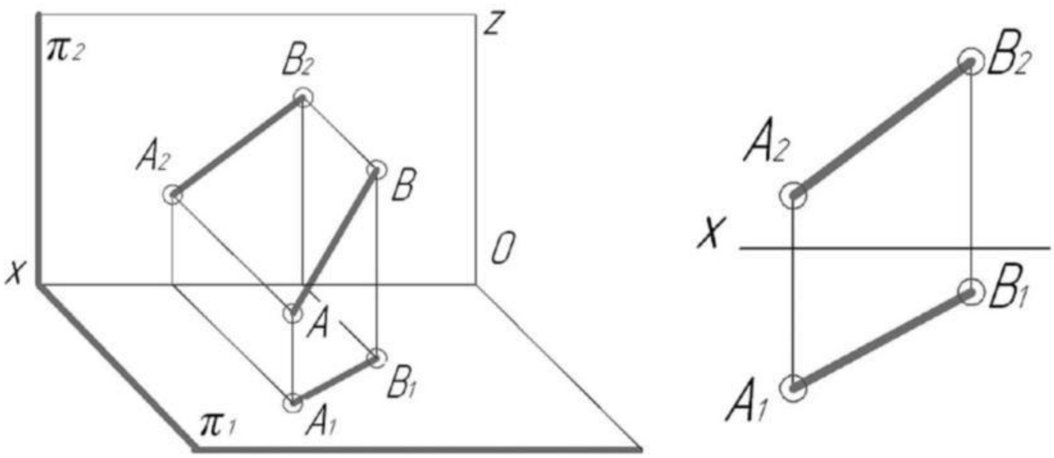


Рисунок 7

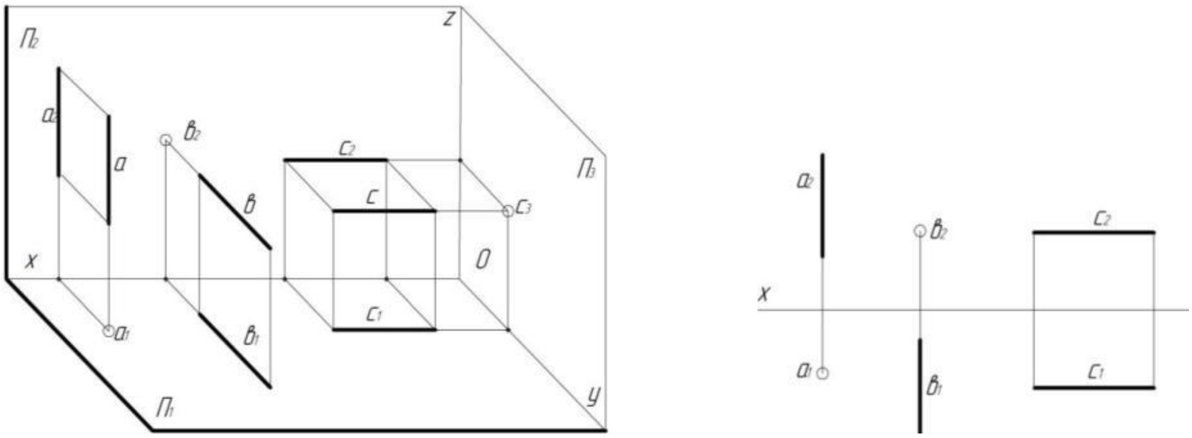
Прямые, не удовлетворяющие этому условию, называются *прямыми частного положения – проецирующие прямые и линии уровня.*

Проецирующими прямыми называются прямые, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций (рисунок 8).

Прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций называется *горизонтально проецирующей*, например прямая **a** на рисунке 8.

Прямая перпендикулярная фронтальной плоскости проекций называется *фронтально проецирующей*, например прямая **в** на рисунке 8.

Прямая перпендикулярная профильной плоскости проекций называется профильно проецирующей, например прямая **с** на рисунке 8.



а б

а – наглядное изображение проецирующих прямых; б – изображение проецирующих прямых в системе двух плоскостей.

Рисунок 8

Линиями уровня называются прямые параллельные какой-либо плоскости проекций (рисунок 9).

Горизонтальная прямая (**h**) – прямая параллельная горизонтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция прямой (h_2) $\parallel$ оси X. На рисунке 9 взят отрезок AB, принадлежащий горизонтальной прямой. Так как $h \parallel \pi_1$, то отрезок AB изображается на плоскости π_1 в натуральную величину A_1B_1=[AB], а угол α равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций.

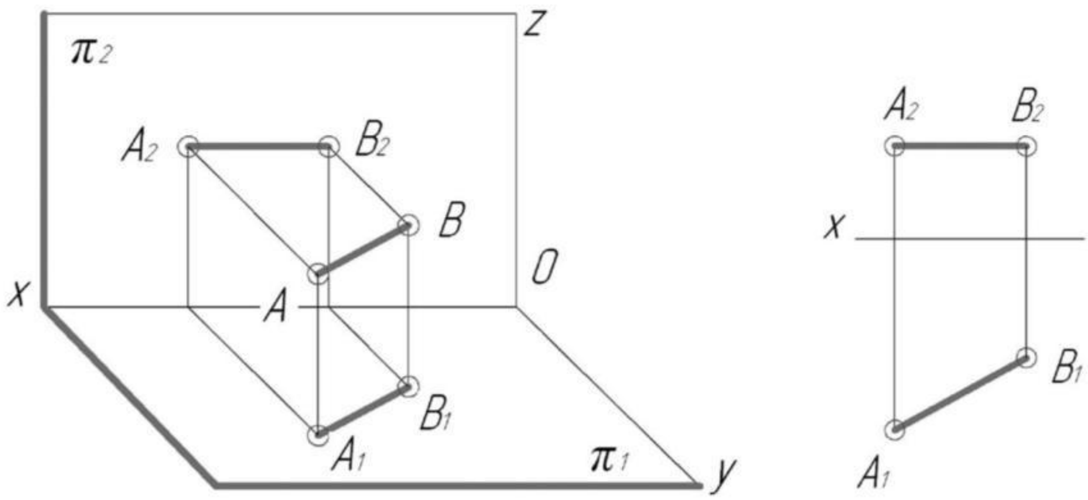


Рисунок 9

Фронтальная прямая **(f)** – прямая параллельная фронтальной плоскости проекций (рисунок 10). Аналогично предыдущим рассуждениям A_2B_2 = [AB], а угол α равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций.

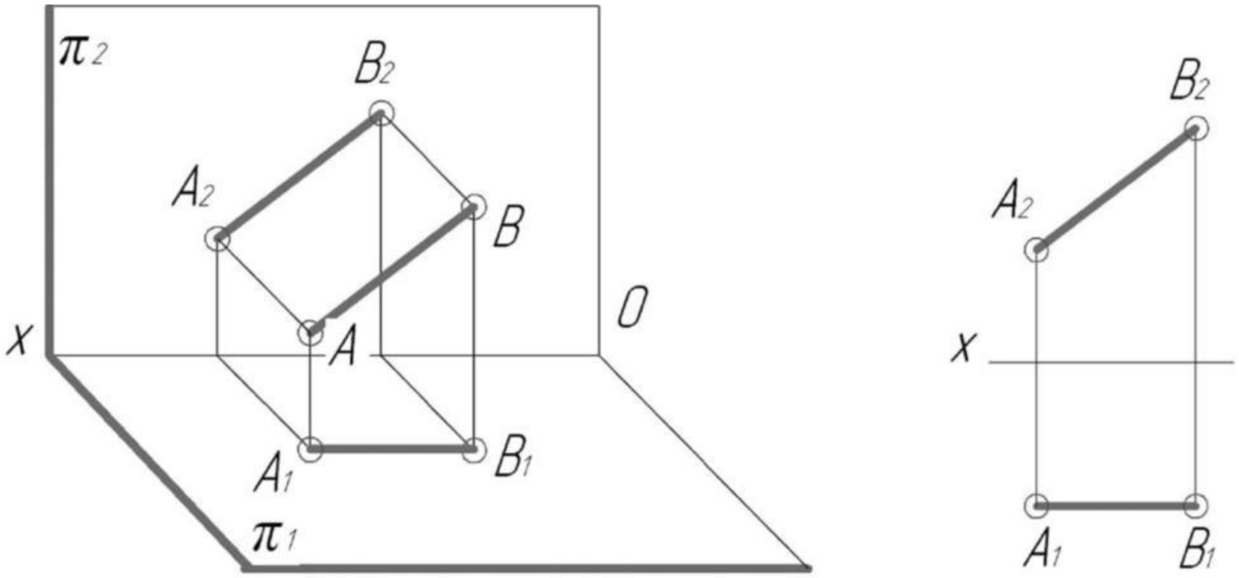


Рисунок 10

Профильная прямая **(p)** – прямая параллельная профильной плоскости проекций (рисунок 11). В связи с этим A_3B_3 = [AB], угол α равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций а угол β равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций.

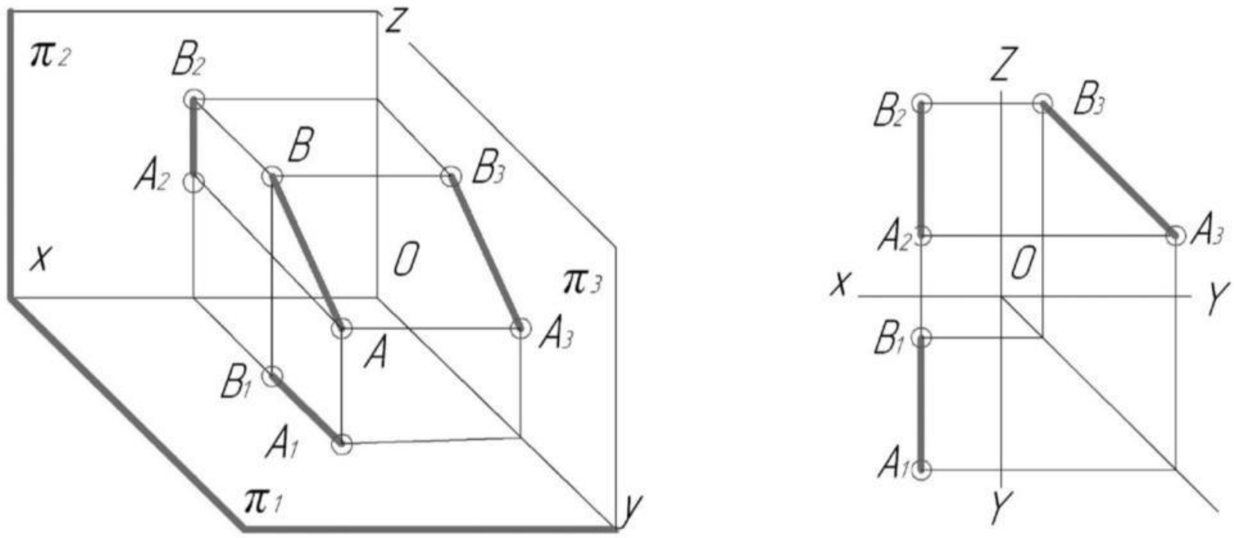


Рисунок 11

Следы прямой. *След прямой линии – это точка пересечения (встречи) данной прямой с плоскостью проекций* (рисунок 12).

Необходимо помнить о том, что горизонтальная проекция фронтального следа (F_1) и фронтальная проекция горизонтального следа (H_2) всегда располагаются на оси X.

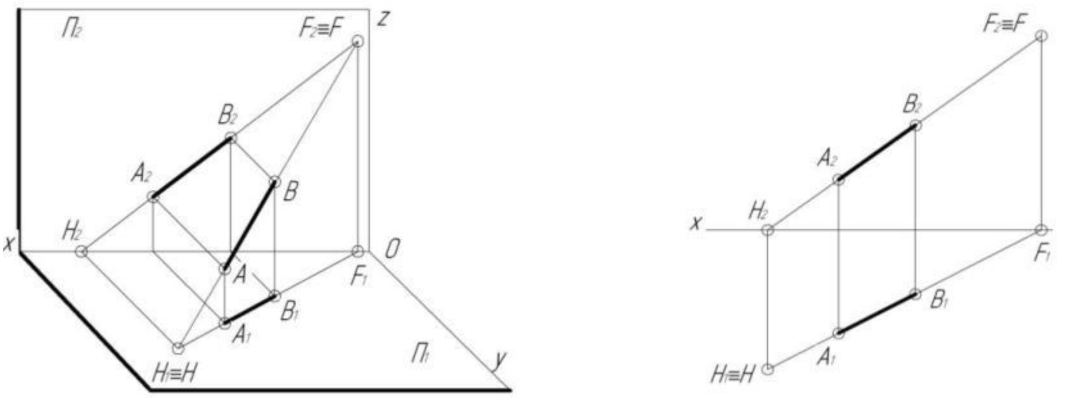


Рисунок 12

Следовательно, чтобы найти горизонтальный след, надо продолжить фронтальную проекцию l_2 до пересеченья с осью Ox и через полученную точку H_2 (фронтальную проекцию горизонтального следа) провести перпендикуляр к оси Ox до пересечения с горизонтальной проекцией l_1. Получаем H_1 – горизонтальную проекцию горизонтального следа ($H_1 \equiv H$).

Для того чтобы построить фронтальный след, продолжаем горизонтальную проекцию a_1 прямой a до пересечения с осью Ox; через точку F_1 (горизонтальную проекцию фронтального следа) проводим перпендикуляр до пересечения с фронтальной проекцией a_2. Получаем F_2 – фронтальную проекцию фронтального следа ($F_2 \equiv F$).

Взаимное положение прямых. *Пересекающиеся прямые***.** Если прямые пересекаются в точке К, то их одноименные проекции тоже пересекаются; при этом проекции точки пересечения обязательно располагаются на одном перпендикуляре к оси X (на одной линии проекционной связи, рисунок 13).

*Скрещивающиеся прямые***.** Если точки пересечения проекций прямых не расположены на одном перпендикуляре к оси X, то прямые скрещиваются (рисунок 14). Такие точки называются конкурирующими. На рисунке 14 точки А и В – *горизонтально конкурирующие*, точки С и Е – *фронтально конкурирующие.*

Фронтально конкурирующие точки – это точки лежащие на одном перпендикуляре к фронтальной плоскости проекций π_2, *горизонтально-конкурирующими* называются точки, лежащие на одном перпендикуляре к горизонтальной плоскости проекций π_1.

Сравнивая координаты Z точек A и B на эпюре, отмечаем, что координата Z точки A больше координаты Z точки B. Поэтому проекция точки A на π_1 – A_1 является видимой, а проекция B_1- невидимой.

При определении видимости точек на Π_2 (C и E), сравниваем координаты Y и отмечаем, что координата Y точки C больше координаты Y точки E. Поэтому проекция точки C (C_2) на π_2 является видимой, а проекция E_2- невидимой.

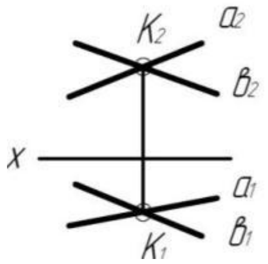


Рисунок 13

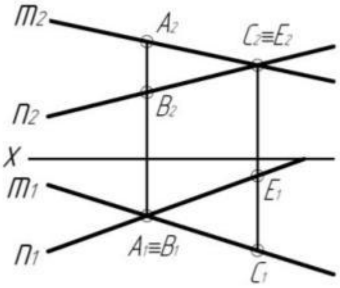


Рисунок 14

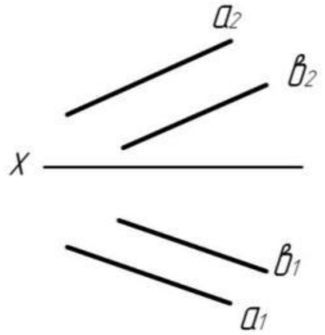


Рисунок 15

Параллельные прямые. Если прямые параллельны в пространстве, то их одноименные проекции параллельны (рисунок 15).

Способы задания плоскости на чертеже. Плоскость является простейшей поверхностью. Положение плоскости в пространстве может быть определено следующими способами:

а) тремя точками, не принадлежащей одной прямой (рисунок 16, а);

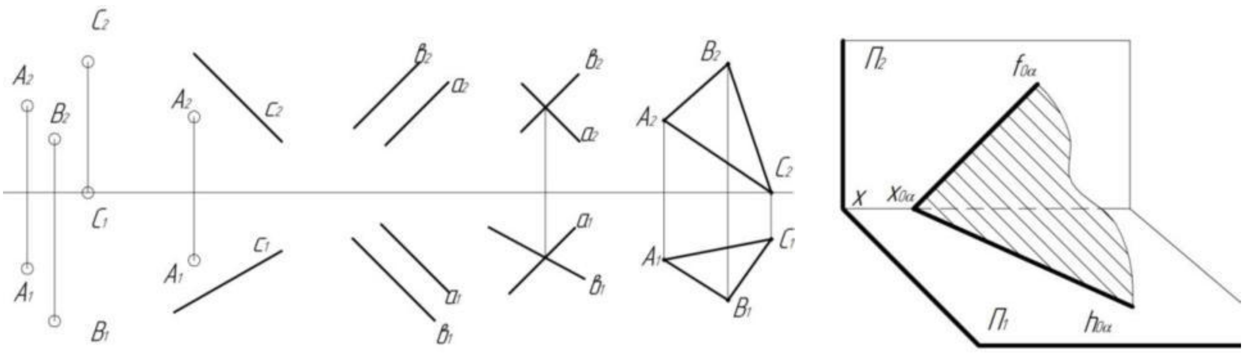
б) прямой и не принадлежащей ей точкой (рисунок 16, б);

в) двумя пересекающимися прямыми (рисунок 16, в);

г) двумя параллельными прямыми (рисунок 16, г);

д) плоской фигурой (например, треугольник) (рисунок 16, д);

е) следами плоскости (рисунок 16, е). След плоскости это прямая полученная в результате пересечения заданной плоскости с основной плоскостью проекций ($h_{0\alpha}$- горизонтальный след, $f_{0\alpha}$ – фронтальный след и $x_{0\alpha}$- точка схода следов).



а б в г д е

Рисунок 16

Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Каждая плоскость, показанная на рисунке 16, занимает общее (произвольное) положение по отношению к плоскостям проекций (углы наклона этой плоскости к плоскостям проекций – произвольные, но отличные от 0^0 и 90^0). Такое положение плоскости называется *общим положением*.

Частные случаи расположения плоскости. Кроме рассмотренного общего положения, плоскость по отношению к плоскостям проекций может занимать одно из следующих частных положений:

- *проецирующие плоскости* – плоскости перпендикулярные одной из основных плоскостей проекций ;
- *плоскости уровня* – плоскости параллельные одной из плоскостей проекций.

Проецирующие плоскости. *Фронтально проецирующая плоскость* – плоскость, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций (рисунок 17).

Горизонтально проецирующая плоскость - плоскость, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций (рисунок 18).

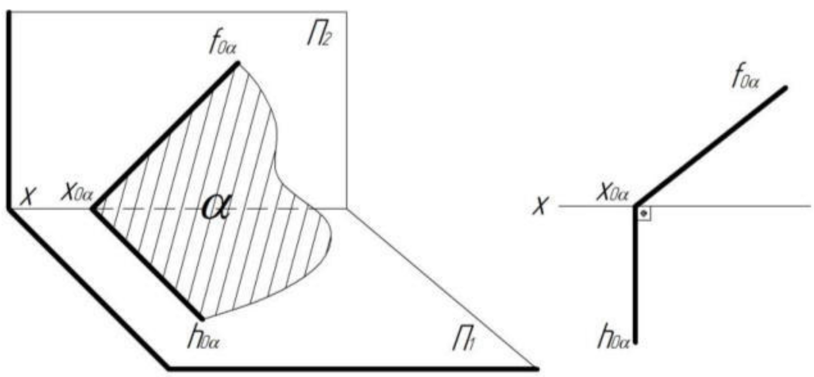


Рисунок 17

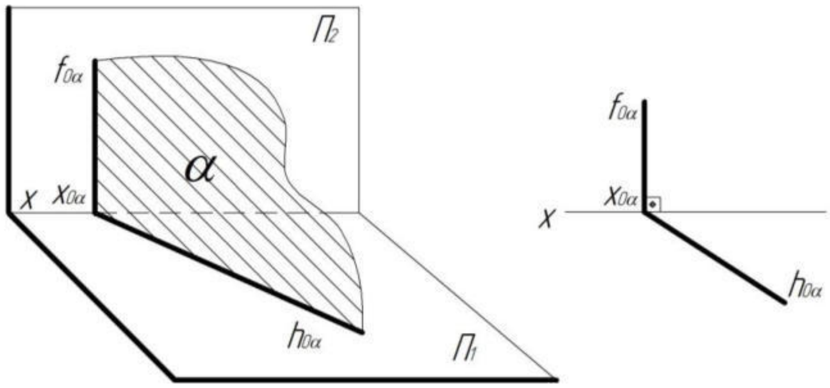


Рисунок 18

Плоскости уровня. *Горизонтальная плоскость* - плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций (рисунок 19).

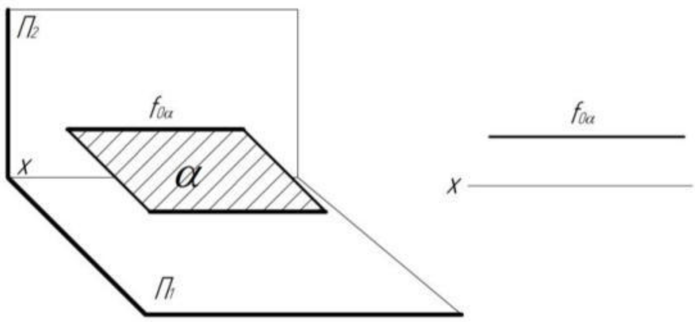


Рисунок 19

Фронтальная плоскость - плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций (рисунок 20).

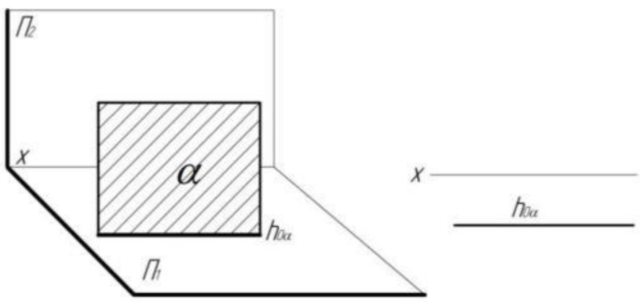
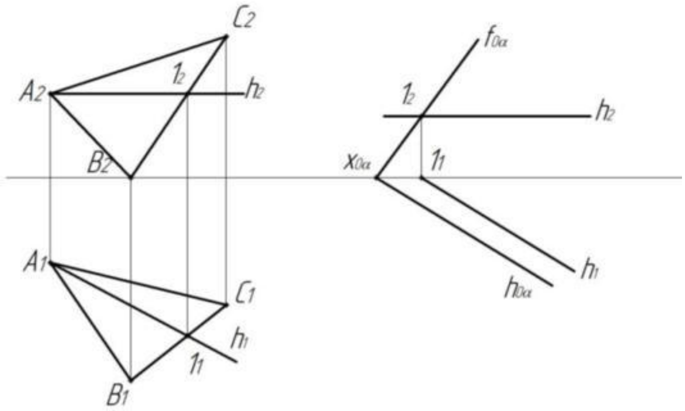


Рисунок 20

Главные линии плоскости. Главными линиями плоскости являются:

- *горизонталь* – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рисунок 21).



а б

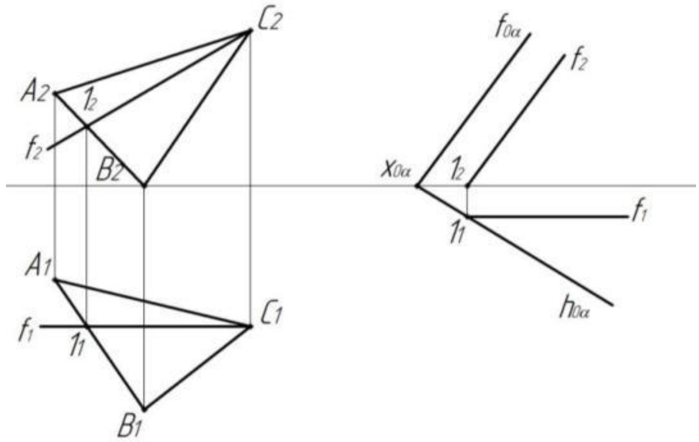
а- в плоскости заданной треугольником, б - в плоскости заданной следами

Рисунок 21

- *фронталь* – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекции (рисунок 22).

- *линия наибольшего наклона плоскости* – прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная к горизонтали или фронтали этой плоскости.

Если плоскость задана следами, необходимо помнить о том, что горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу плоскости ($h_1//h_{0\alpha}$) (рисунок 21,б), а фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу плоскости ($f_1//f_{0\alpha}$), рисунок 22,б.



а б

а- в плоскости заданной треугольником, б - в плоскости заданной следами

Рисунок 22

Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Какие знаки имеют координаты x,y,z точки, находящейся в первом, вто-

ром,…., восьмом октанте?

2. Какие координаты на эпюре определяют: горизонтальную, фронтальную и профильную проекции точки?

3. Как по двум проекциям точки можно определить все три координаты точки?

4. Дайте определение проецирующим линиям.

5. Какие прямые называются прямыми общего положения?

6. Какие прямые называются линиями уровня?

7. Назовите все возможные случаи взаимного расположения двух прямых?

8. Дайте определение горизонтально-, фронтально- и профильно-проецирующей прямой.

9. Что называется следом прямой?

10. Каково взаимное расположение двух прямых в пространстве, фронтальные проекции, которых параллельны, а горизонтальные пересекаются

11. Перечислите способы задания плоскости.

12. Что такое след плоскости?

13. Какие линии плоскости называются главными? Перечислите главные линии плоскости.

14. Какое положение могут занимать плоскости относительно плоскостей проекций?

15. Какой угол можно определить с помощью линии ската плоскости?

16. Назовите способы построения линии пересечения двух плоскостей.

17. Какое назначение вспомогательных плоскостей при нахождении линии пересечения плоскостей?

18. Назовите общие и частные случаи взаимного расположения прямой и плоскости.

19. Что называется горизонталью и фронталью плоскости?

20. Расскажите алгоритм решения первой основной задачи начертательной геометрии.

Тема 3 Позиционные задачи

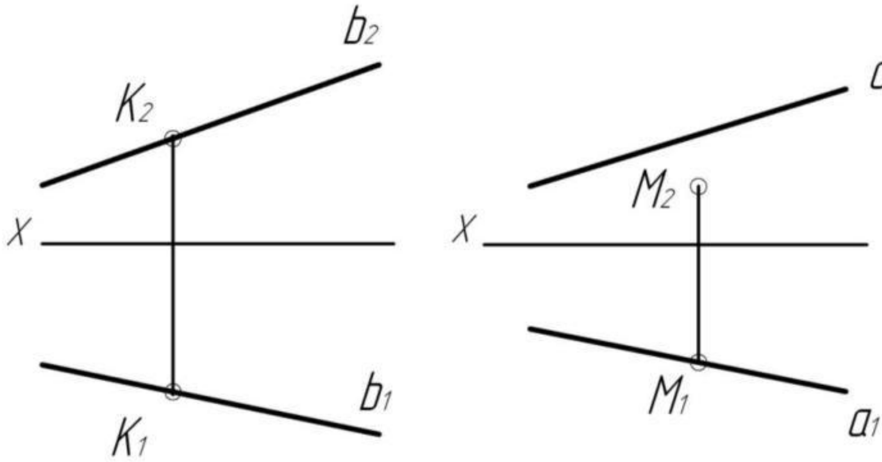
Позиционными называют задачи, связанные с относительным расположением геометрических образов (принадлежности, параллельности, пересечения).

Принадлежность точки прямой линии, плоскости. *Если точка принадлежит прямой в пространстве, то проекции этой точки лежат на соответствующих проекциях этой прямой.* ($A \in (l) \Rightarrow A_1 \in (l_1)$, $A_2 \in (l_2)$).

На рисунке—точка К принадлежит прямой **b**, т.к. $K_1 \in (b_1)$, $K_2 \in (b_2)$, а на рисунке —показан пример на котором точка М не принадлежит прямой **a**, т.к. $M_1 \in (a_1)$, $M_2 \notin (a_2)$.

Точка принадлежит плоскости тогда когда она лежит на какой либо прямой принадлежащей данной плоскости ($A \in \alpha \Rightarrow A \in l \in \alpha$).

На рисунке 23 представлены задачи по определению принадлежности точки прямой линии.

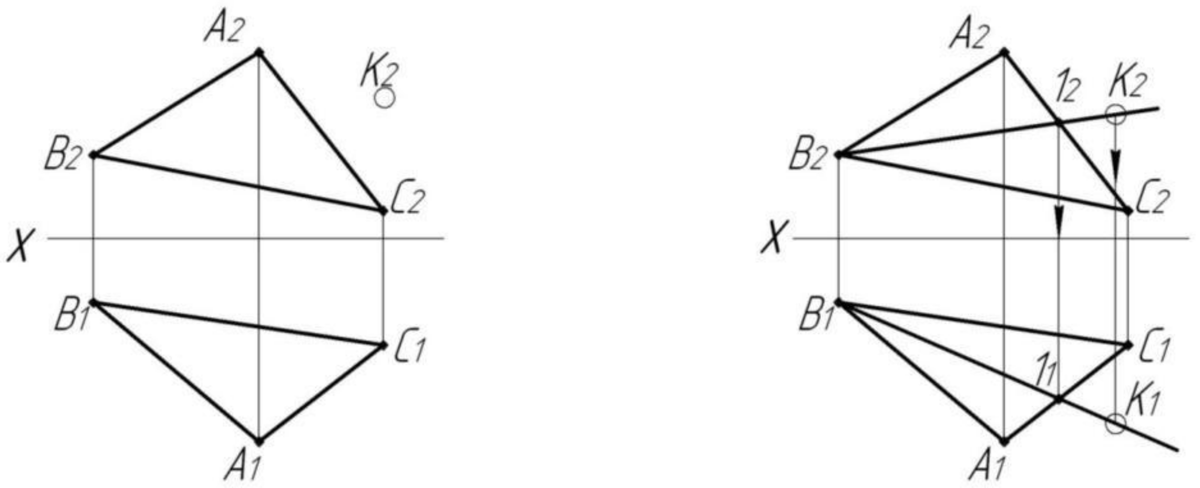


а б

Рисунок 23

Принадлежность прямой плоскости. ***Прямая линия принадлежит плоскости тогда, когда она проходит через две точки, принадлежащих этой плоскости.***

Пусть дана плоскость α (ΔABC) и точка K (K_2) $\in \alpha$ (рисунок 24,а). Построить K_1.



а б

Рисунок 24

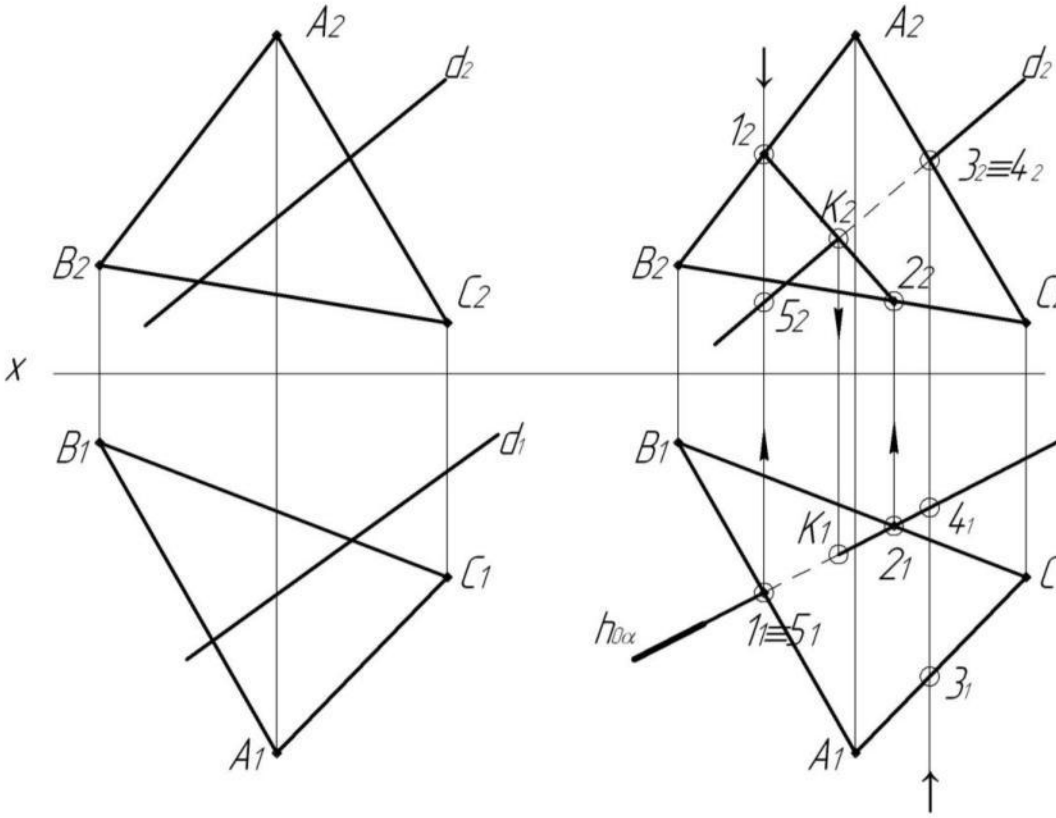
Возьмем в плоскости α прямую, проходящую через точку *K* и, например, точку *B* ∈ α (рисунок 24,б), её фронтальная проекция (B_2K_2). Прямая (*BK*) ∩ (*AC*) = *1*(1_2), т.к. они лежат в одной плоскости. Построив горизонтальную проекцию 1_1 на (A_1C_1), получаем прямую (*B1*), расположенную в данной плоскости: эта прямая проходит через точки *B* и *1*, из которых первая заведомо принадлежит плоскости α, а вторая в ней построена.

Строим горизонтальную проекцию точки K_1 на проекции прямой (B_11_1).

Если плоскость задана следами, то прямая принадлежит данной плоскости в том случае если, следы прямой совпадают с соответствующими следами плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью. Результатом пересечения прямой с плоскостью является точка. Построение точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения – одна из основных задач начертательной геометрии, которая называется **первой основной позиционной задачей**.

ЗАДАЧА: Определить точку пересечения прямой d с плоскостью, заданной треугольником ABC (рисунок 25,а).



а б

Рисунок 25

Алгоритм решения:

1. Заключаем прямую **d** во вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость **α**($h_{o\alpha}$.;$f_{o\alpha}$) (рисунок 25, б).

2. Определяем линию пересечения плоскостей треугольника АВС и **α**, получаем отрезок [12].

3. Так как прямые (**12**) и (**d**) принадлежат одной плоскости **α**, находим их точку пересечения. Получаем точку К, которая и является точкой пересечения прямой **d** с заданной плоскостью.

Определяем видимость прямой **d**. Видимость на π_2 определяем с помощью фронтально конкурирующих точек 3 и 4, на π_1- с помощью горизонтально конкурирующих точек 1 и 5.

Рассмотрим случай пересечение прямой линии и плоскости, заданной следами (рисунок 26). При решении задачи используем тот же алгоритм.

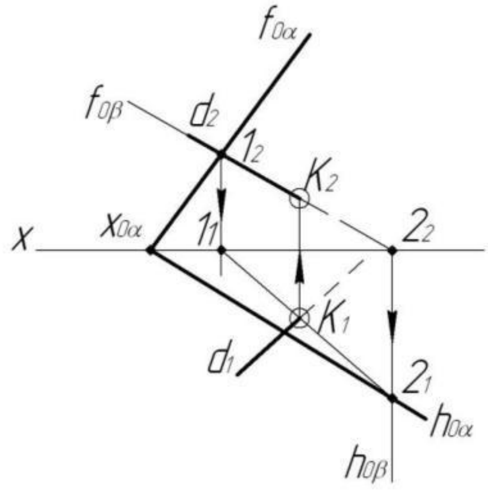


Рисунок 26

Алгоритм решения:

1.Заключаем прямую **d** во вспомогательную, фронтально-проецирующую плоскость **β** ($h_{o\beta}$.;$f_{o\beta}$).

2.Определяем линию пересечения плоскостей **β** и **α**, получаем отрезок **[12]**.

3.Находим точку пересечения отрезка **[12]** и прямой **d**, получаем точку **К**.

4.Определяем видимость прямой линии.

Пересечение плоскостей. Линией пересечения двух плоскостей является **прямая**.

Проекции прямой пересечения двух плоскостей общего положения определяются проекциями двух точек, принадлежащих одновременно обеим плоскостям. Задача на построение линии пересечения двух плоскостей называется **второй основной позиционной задачей**. Её можно решить двумя способами:

а) построить точки пересечения двух прямых одной плоскости с другой плоскостью, т.е. использовать два раза схему решения первой позиционной задачи нахождение точки пересечения прямой с плоскостью (рисунок 27);

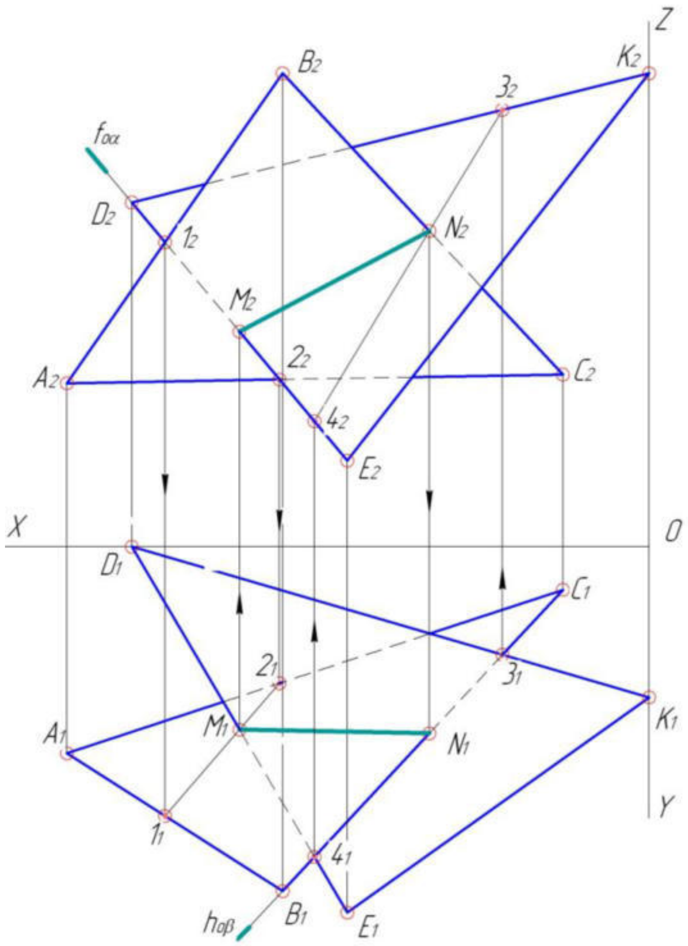


Рисунок 27

б) ввести две вспомогательные секущие плоскости частного положения, построить линии их пересечения с заданными плоскостями. Две соответствующие точки пересечения A и B этих линий определяют искомую линию пересечения данных плоскостей (рисунок 28,а).

На рисунке 28,б показано построение линии пересечения двух плоскостей α(c∩d) и β(m ∩ n) способом вспомогательных секущих плоскостей (второй способ).

Алгоритм решения:

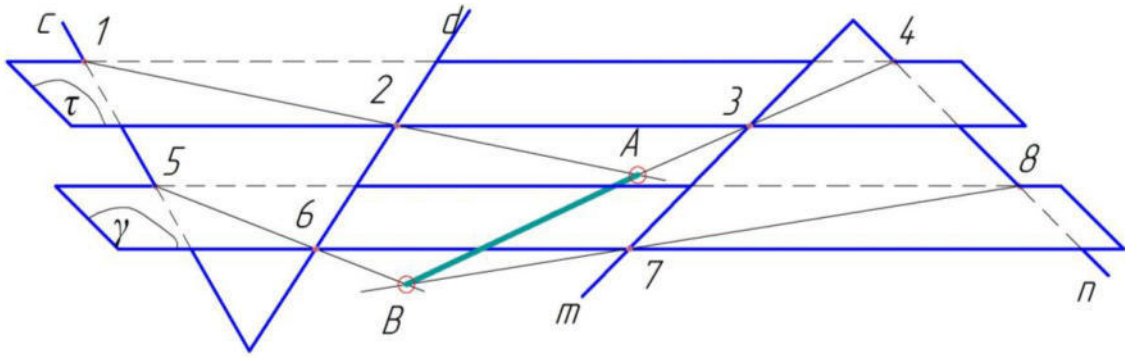
1. Вводим вспомогательную секущую плоскость $\gamma \| \Pi_1$;

2. Определяем линии пересечения плоскости γ с заданными плоскостями:

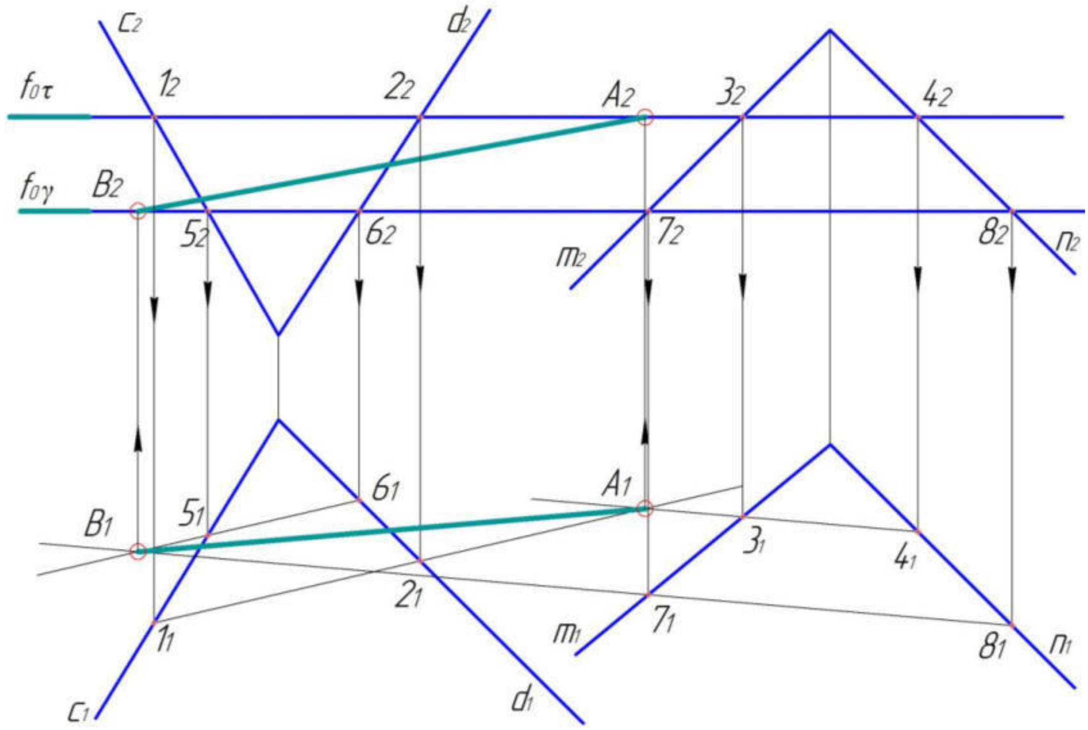
$\gamma \cap \alpha = (12)$ – горизонталь плоскости α ;

$\gamma \cap \beta = (34)$ – горизонталь плоскости β.

3. Так как прямые (12) и (34) принадлежат одной плоскости γ, находим их точку пересечения: $A = (12) \cap (34)$.



а



б

а – решение задачи в пространстве, б – решение задачи на эпюре

Рисунок 28

4. Вводим вторую вспомогательную секущую плоскость $\tau \parallel \Pi_1$.

5. Определяем линии пересечения плоскости τ с заданными плоскостями:

$\tau \cap \alpha = (56)$ – горизонталь плоскости α;

$\tau \cap \beta = (78)$ – горизонталь плоскости β.

6. Так как прямые (56) и (78) принадлежат одной плоскости τ, находим их точку пересечения: $B = (56) \cap (78)$.

7. Точки A и B принадлежат не только вспомогательным секущим плоскостям но и заданным, так как лежат на горизонталях этих плоскостей. Соединив эти

точки, мы получаем линию пересечения заданных плоскостей: $A \cup B = (AB) = \alpha \cap \beta$.

Рассмотрим примеры, когда плоскости заданы следами.

Следы плоскости – это по сути прямые принадлежащие основным плоскостям проекций. Поэтому задача по определению линии пересечения плоскостей сводится, чаще всего, к нахождению точек пересечения соответствующих следов.

На рисунке 29 показан пример решения задачи по определению линии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных следами. Результатом пересечения заданных плоскостей является прямая АВ. Вначале определили точку пересечения фронтальных следов (A_2) и так как координата y = 0 для этой точки, то горизонтальная проекция (A_1) располагается на оси X. Горизонтальные следы плоскостей принадлежат одной плоскости, находим точку их пересечения (B_1) и так как координата z для этой точки равна 0, то фронтальная проекция (B_2) располагается на оси X. Соединив соответствующие проекции точек, получаем проекции линии пересечения (A_1B_1;A_2B_2).

На рисунке 30 показаны частные случаи построения лини пересечения двух плоскостей, заданных следами.

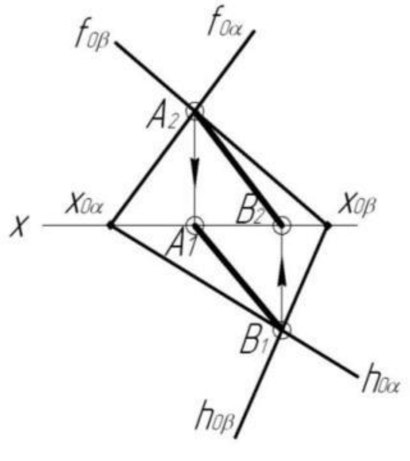


Рисунок 29

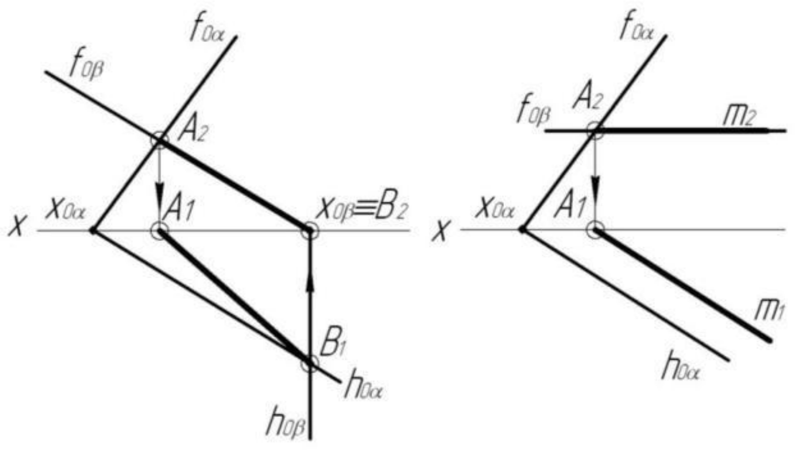


Рисунок 30

Проекции многогранников. Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из частей плоскостей, ограниченных многоугольниками (гранями).

Общие стороны смежных многоугольников называются *ребрами.*

Точки пересечения ребер называются *вершинами*.

Совокупность вершин и ребер, соединяющих их, называется *сеткой мно-*

огранника.

На комплексном чертеже построение многогранника сводится к построению его сетки. На рисунке 31 показаны чертежи призмы (ABCE) и пирамиды (SABC).

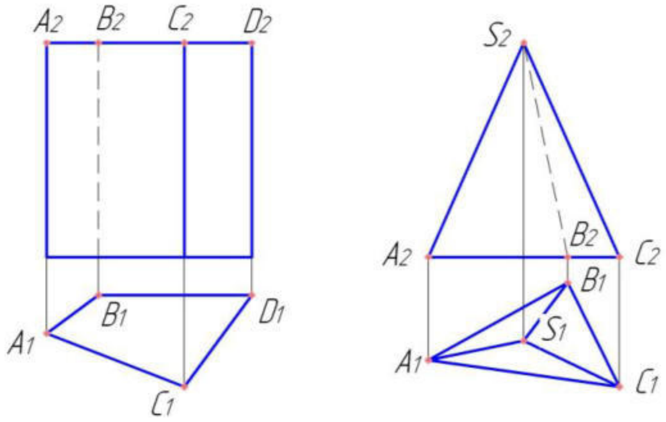


Рисунок 31

Пересечение многогранника проецирующей плоскостью. При пересечении многогранника плоскостью, в сечении получаем плоский многоугольник, полученный в результате пересечения ребер и граней многогранника. В связи с этим построение фигуры сечения сводится к построению точек пересечения секущей плоскости с прямыми (ребрами). В нашем случае (рисунок 32) при пересечении пирамиды SABC фронтально проецирующей плоскостью (α) получается треугольник NKF. Ход построения показан на рисунке стрелками.

Пересечение многогранника с прямой линией. Точки пересечения прямой линии d (d_1, d_2) с гранями многогранника строим на основании первой позиционной задачи (рисунок 33) по следующему алгоритму:

- заключаем прямую d во фронтально проецирующую плоскость (α);

- находим точки пересечения ребер пирамиды с плоскостью α. Строим фигуру сечения - треугольник NKF.

- находим точки M и E пересечения прямой d со сторонами треугольника NKF и определяем видимость прямой.

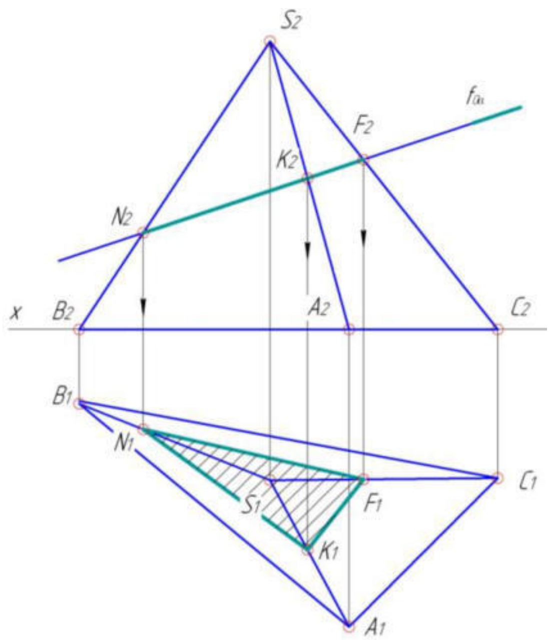


Рисунок 32

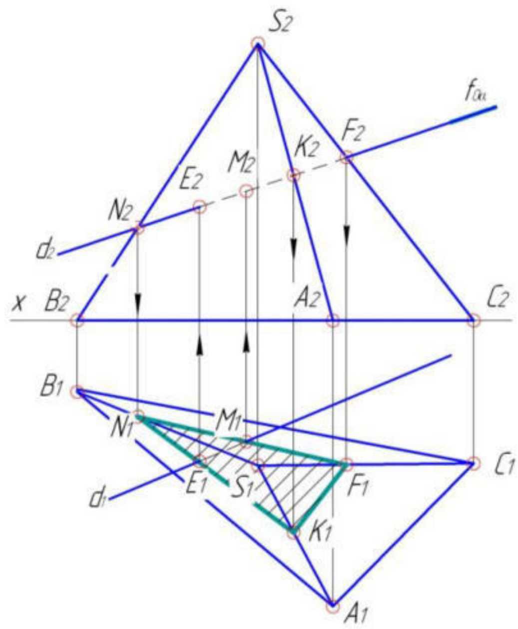


Рисунок 33

Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Какие задачи называются проекционными?
2. Расскажите алгоритм решения первой основной позиционной задачи.
3. Как определяется видимость точек и прямых на чертеже?
4. Как построить на чертеже точку принадлежащую прямой?...плоскости?
5. Как решается вторая позиционная задача?
6. Расскажите суть способа секущих плоскостей (посредников) для построения линии пересечения двух плоскостей.

Тема 4 Метрические задачи

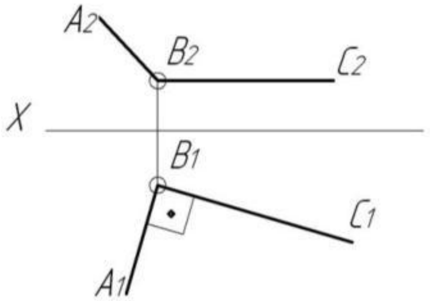
Метрическими называются задачи, решение которых связано с определением значений геометрических величин – длин отрезков, размеров углов, площадей, расстояний между геометрическими фигурами и т.д.

Решение этой группы задач требует построения перпендикулярных прямых и плоскостей и основывается на свойствах ортогонального проецирования прямого угла.

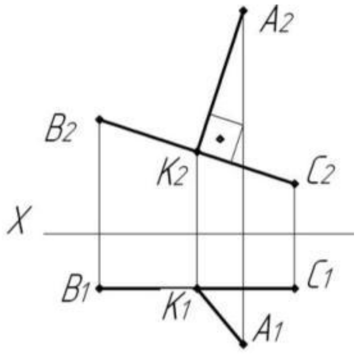
Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее в виде прямого угла.

На рисунке 34а, приведен чертеж прямого угла ABC со стороной BC параллельной горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция A_1B_1 стороны AB перпендикулярна горизонтальной проекции стороны BC – B_1C_1.

Эта особенность упрощает решение ряда задач. Например, необходимо определить расстояние от точки A , заданной проекциями A_1 , A_2, до заданной прямой BC с проекциями B_1C_1 и B_2C_2 (рисунок 34, б). Для этого из точки A_2 проводим перпендикуляр A_2K_2 к B_2C_2. Строим проекцию K_1 и проводим горизонтальную проекцию A_1K_1 перпендикуляра.



а

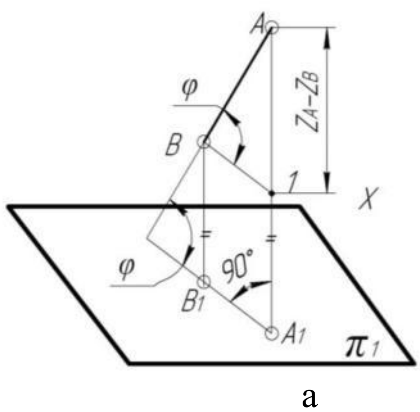


б

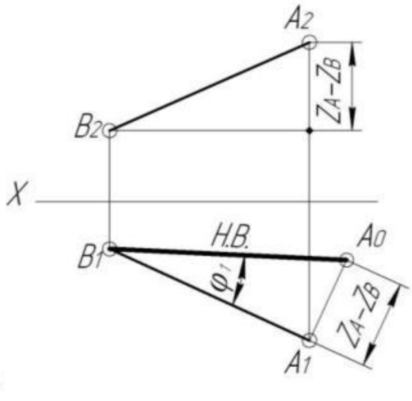
Рисунок 34

Определение натуральной величины отрезка прямой и углов его наклона к плоскостям проекций (способ прямоугольного треугольника).

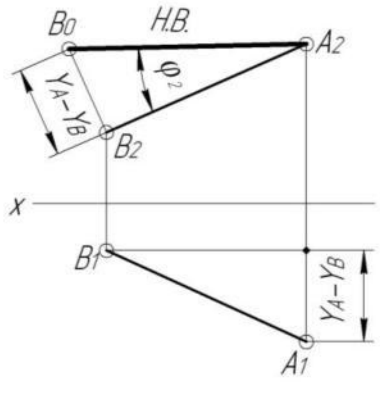
Натуральной величиной отрезка ***AB*** (рисунок 35 а) является гипотенуза прямоугольного треугольника ***AB1***, у которого один катет равен горизонтальной проекции отрезка ***B1 = A_1B_1***, а другой –разности высот концов отрезка ***1A = AA_1 - BB_1***. Рассмотрим чертеж Монжа (рисунок 35 б). Пусть отрезок ***AB*** задан проекциями ***A_1B_1*** и ***A_2B_2***.



а



б



в

Рисунок 35

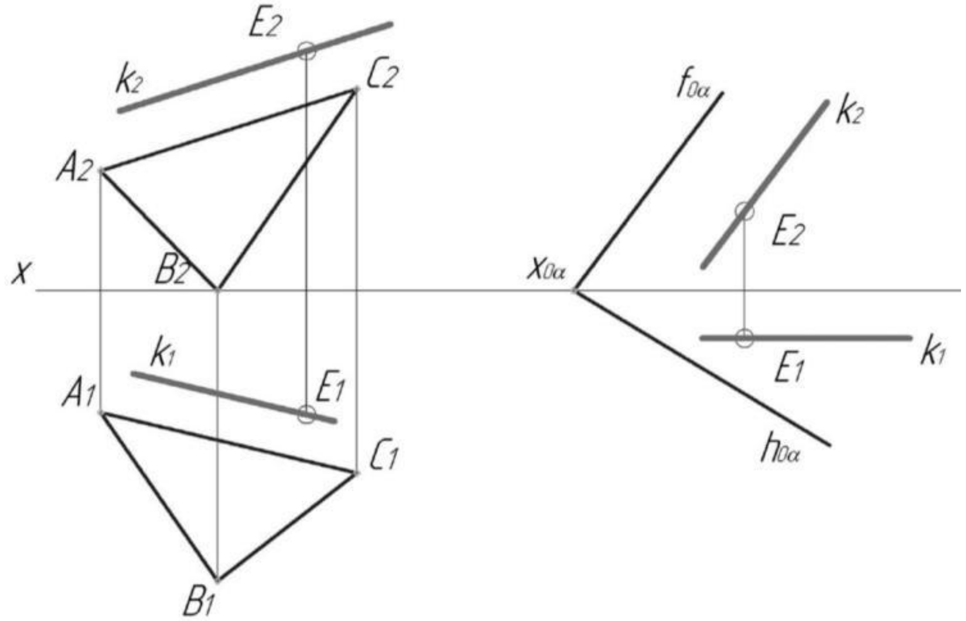
Чтобы определить его натуральную величину и углы наклона к плоскостям проекций, построим прямоугольные треугольники. На горизонтальной плоскости- $\Delta B_1A_1A_0$ по катетам B_1A_1 и $A_1A_0 = Z_A - Z_B$. Гипотенуза B_1A_0 есть натуральная величина отрезка ***AB***. Полученный угол φ_1 определяет величину угла наклона отрезка ***AB*** к плоскости проекций π_1.

Аналогично определятся натуральная величина отрезка по его фронтальной проекции и разности координат Y для точек А и В (рисунок 35 в). Угол φ_2 **-** величину угла наклона отрезка ***AB*** к плоскости проекций π_2.

Угол прямой линии с плоскостью проекций определяется как угол, составленный прямой с ее проекцией на этой плоскости.

Параллельность и перпендикулярность на чертеже. **Прямая параллельна плоскости*, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.***

На рисунке 36,а через точку Е проведена прямая параллельная плоскости заданной треугольником. Прямую **k** провели параллельно стороне АС ($k_1 \parallel A_1C_1$, $k_2 \parallel A_2C_2$). На рисунке 36,б через точку Е прямую **k** провели параллельно фронтали плоскости заданной следами.



а б

Рисунок 36

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, т.е. $\boldsymbol{\alpha(\Delta ABC)\parallel\beta(m\cap n)}$, **если** $\mathbf{A_1C_1\parallel m_1}$, $\mathbf{A_2C_2\parallel m_2}$, $\mathbf{B_1C_1\parallel n_1}$, $\mathbf{B_2C_2\parallel n_2}$ (рисунок 37).

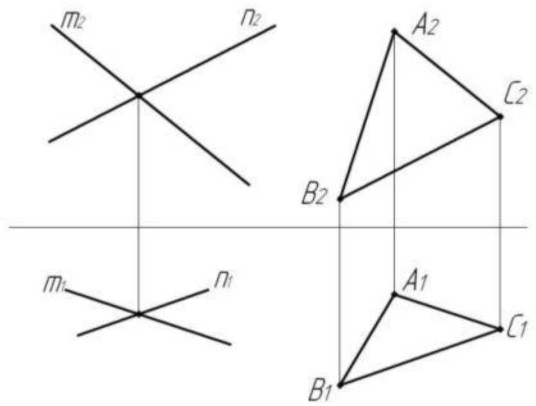


Рисунок 37

Перпендикулярность прямой и плоскости на чертеже. Теорема: если прямая перпендикулярна плоскости, то горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция прямой – фронтальной проекции фронтали этой плоскости.

Используя условные обозначения, эту теорему можно записать так:

Если $(\boldsymbol{m})\perp(\boldsymbol{\alpha})$, то $(\boldsymbol{m_1})\perp(\boldsymbol{h_1})$, а $(\boldsymbol{m_2})\perp(\boldsymbol{f_2})$, где $(\boldsymbol{h})\parallel\boldsymbol{\pi_1}$, $(\boldsymbol{f})\parallel\boldsymbol{\pi_2}$, $(\boldsymbol{h})\in\boldsymbol{\alpha}$; $(\boldsymbol{f})\in\boldsymbol{\alpha}$ (рисунок 38).

Если плоскость задана следами, то *прямая перпендикулярна плоскости в пространстве тогда, когда ее проекции перпендикулярны к одноименным следам плоскости.* На рисунке 39 через точку K проведена прямая d перпендикулярная плоскости α, которая задана следами.

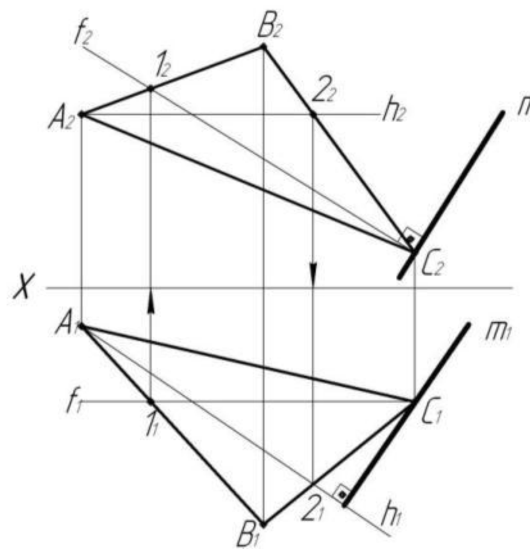


Рисунок 38

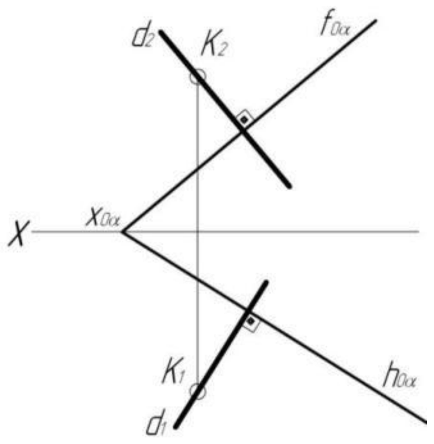


Рисунок 39

Взаимная перпендикулярность плоскостей. Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную к другой плоскости (рисунок 40), т.е. ($(l) \perp \alpha$, $(l) \subset \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$).

Через прямую можно провести сколь угодно много плоскостей, перпендикулярных другой плоскости. Построение взаимно перпендикулярных плоскостей сводится к построению перпендикуляра к плоскости.

Построение проекций плоскости β, проходящей через прямую b (b_1, b_2) и перпендикулярную плоскости α ($\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$), показано на рисунке 40.

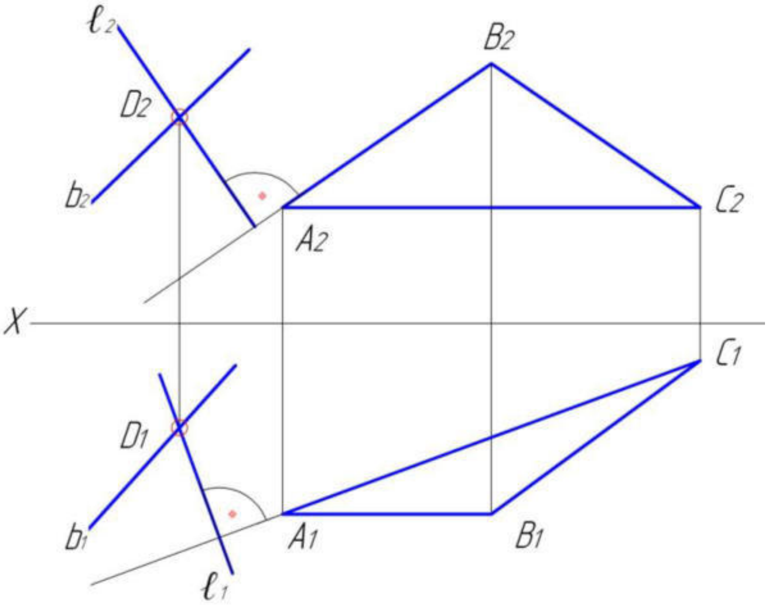


Рисунок 40

Алгоритм решения:

Возьмем на прямой b точку D ($D_1 \in b_1$, $D_2 \in b_2$) и через ее проекции D_1 и D_2 проводим проекции перпендикуляра ℓ_1, ℓ_2 к плоскости треугольника ABC.

Две пересекающиеся прямые ($b \cap \ell$) определяют положение искомой плоскости β ($b \cap \ell$), перпендикулярной к заданной. В данном примере построение проекций перпендикуляра ℓ_1 и ℓ_2 к заданной плоскости облегчено тем, что сторона AC ΔABC является горизонталью, AB – фронталью.

Контрольные вопросы для самоподготовки

1.Какие задачи называются метрическими?

2.При каких условиях прямой угол проецируется в натуральную величину?

3.Сформулируйте условие перпендикулярности прямой и плоскости; двух плоскостей.

4. Как определить расстояние от точки до плоскости?

5. Как определить натуральную величину отрезка?

Тема **5 Способы преобразования чертежа**

Проекции пространственных объектов, произвольно расположенных относительно плоскостей проекции, не всегда удобны для решения той или иной задачи. В связи с этим, для более простого решения позиционных и геометрических задач, проводят преобразования чертежа таким образом, чтобы получить либо вырожденные проекции элементов объекта, либо их натуральные величины.

Изменения взаимного расположения объекта можно достигнуть двумя способами:

1) заменой данной системы плоскостей проекций новой системой так, чтобы неподвижный объект в пространстве оказался в каком-либо частном положении относительно новой системы (способ замены плоскостей проекций);

2) перемещением объекта в пространстве так, чтобы он занял частное положение относительно неизменной системы плоскостей проекций (способы плоскопараллельного перемещения и вращения).

Предложенные способы преобразования включают в себя четыре основные задачи:

1) прямую общего положения преобразовать в линию уровня;

2) прямую общего положения преобразовать в проецирующую прямую;

3) плоскость общего положения преобразовать в проецирующую;

4) плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня.

Способ замены плоскостей проекции. Особенность способа состоит в переходе от заданной системы плоскостей проекций к другой системе плоскостей. Положение самого объекта в пространстве при этом остается неизменным.

Замена одной плоскости проекций. Пусть дана точка $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2})$ в системе плоскостей проекций $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2}$ (рисунок 41). Введем новую плоскость проекции $\boldsymbol{\pi_4}$, перпендикулярную - $\boldsymbol{\pi_1}$, и спроецируем на нее точку $\boldsymbol{A}$.

В новой системе плоскостей проекций (π_1, π_4) получим проекции точки $A(A_1,A_4)$. При этом останутся неизменными:

а) горизонтальная проекция точки A-A_1;

б) высота расположения точки на плоскости $A - AA_1=A_2A_x=A_4A_{x1}$.

Ранее, рассматривая плоскости проекций π_1 и π_2, мы не вводили никаких ограничений на их положение, кроме взаимной перпендикулярности, а поэтому взаимно ортогональные плоскости проекций π_1 и π_4 абсолютно равноправны.

Таким образом, новая система плоскостей проекций представляет собой две взаимно перпендикулярные плоскости, одна из которых взята из старой системы плоскостей проекций, а вторая, перпендикулярная к ней, выбирается так, чтобы проекция объекта на неё давала наилучшее представление о нём для получения решения.

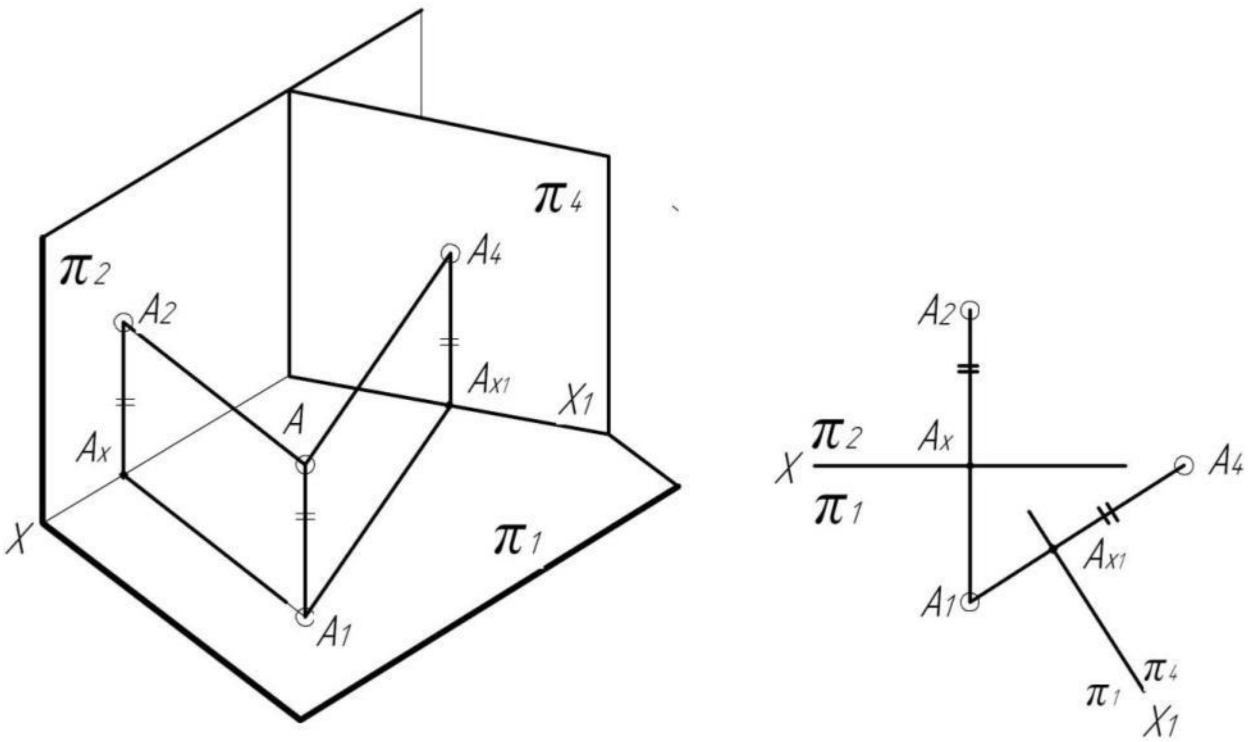
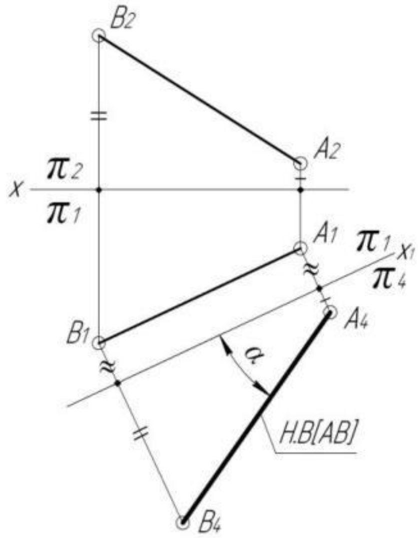


Рисунок 41

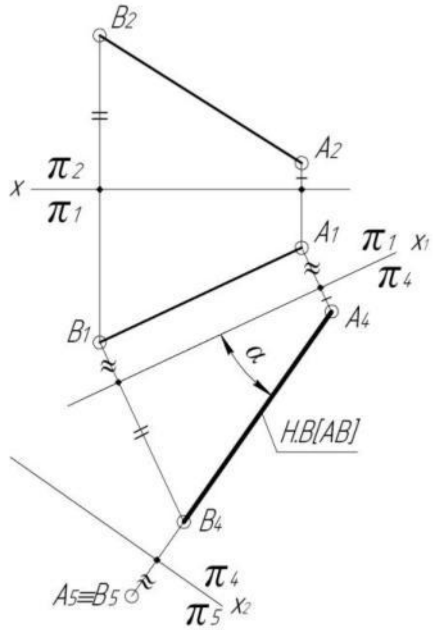
Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций. Задача 1. Преобразовать прямую общего положения, заданную отрезком АВ, в линию уровня (рисунок 42,а).

Предположим, что линия (*AB*) в новой системе плоскостей проекций будет фронталью. Из этого следует, что плоскость π_2 следует заменить на плоскость π_4

перпендикулярную к π_1 и параллельную линии (АВ). Из этого следует, что новую ось проекций X_1 необходимо провести параллельно (A_1B_1). Через точки A_1 и B_1 проводим новые линии проекционной связи (перпендикуляры к оси X_1) и откладываем на них высоты точек А и В, которые берем с плоскости π_2. Полученные проекции A_4 и B_4 соединяем и получаем новую проекцию прямой (A_4B_4). Таким образом, прямая (A_4B_4) в новой системе плоскостей проекций (π_1/π_4) занимает положение фронтальной линии уровня, следовательно, на π_4 она проецируется в натуральную величину. Угол, образованный проекцией (A_4B_4) и осью X_1, равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций (α).



а



б

Рисунок 42

Задача 2. Преобразовать прямую общего положения, заданную отрезком АВ, в проецирующую прямую (рисунок 42,б).

Прямую общего положения нельзя одной заменой плоскости проекций сделать проецирующей, поэтому первым этапом решения второй задачи является решение первой задачи.

Для преобразования прямой (АВ) в проецирующую прямую необходимо заменить еще одну плоскость проекций, перейдя от системы (π_1/π_4) к системе (π_4/π_5). Новую ось X_2 проведем перпендикулярно (A_4B_4). Линии связи проведенные из точек A_4 и B_4, совпадают. От оси X_2 откладываем отрезки равные расстояниям от точек A_1 и B_1 до оси X_1. Получаем проекцию данной прямой на плоскости $\boldsymbol{\pi_5}$ в виде точки ($A_5 \equiv B_5$). В результате преобразований прямая (АВ) стала горизонтально проецирующей.

Задача 3. Преобразовать плоскость общего положения, заданную треугольником АВС в проецирующую плоскость (рисунок 43,III).

Предположим, что плоскость общего положения необходимо преобразовать во фронтально-проецирующую.

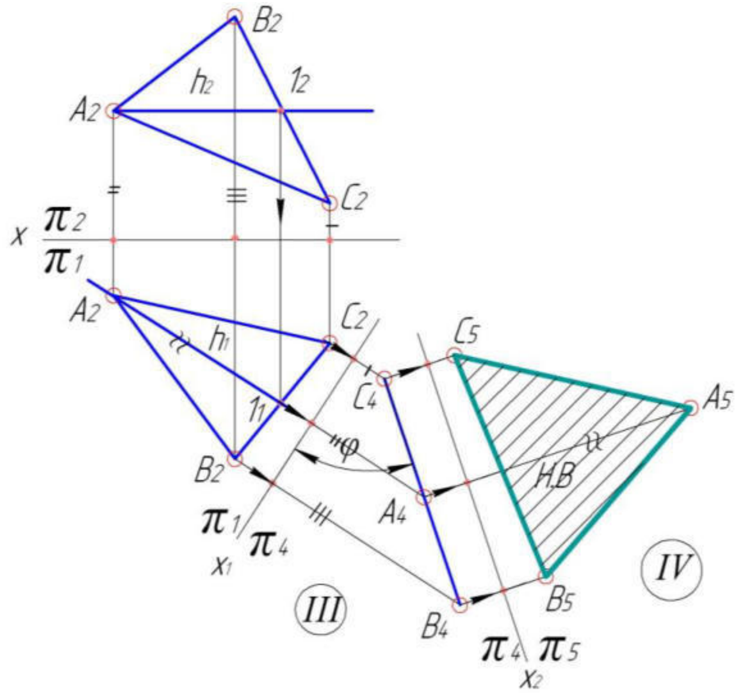


Рисунок 43

Для этого проведем в плоскости (АВС) горизонталь $h(h_1;h_2)$, и, заменив плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$ на плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$, одновременно перпендикулярную $\boldsymbol{\pi_1}$ и h, получим, что в системе плоскостей проекций $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_4}$ заданная плоскость станет проецирующей. Для выполнения замены плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ на чертеже проведем новую ось X_1 перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали (h_1). Далее строим новые проекции точек A_4, B_4, C_4. Соединив их, получаем проекцию в виде прямой линии, а это значит, что плоскость в новой системе занимает фронтально проецирующее положение. Угол φ, образованный проекцией ($A_4B_4C_4$) с осью X_1, равен натуральной величине угла наклона плоскости (АВС) к горизонтальной плоскости проекций.

Задача 4. Преобразовать плоскость общего положения, заданную треугольником АВС в плоскость уровня (рисунок 43,IV).

Задача решается на основе третьей задачи, в которой плоскость общего положения переходит в проецирующую плоскость путем замены одной плоскости проекций.

При выполнении второго преобразования переходим из системы (**π_1/ π_4**) к системе (**π_4/ π_5**). Новую ось X_2 проводим параллельно ($A_4B_4C_4$). На новых линиях проекционной связи, проведенных через точки A_4 , B_4, C_4, от новой оси X_2, откладываем отрезки равные расстояниям от точек A_1,B_1, C_1 до оси X_1. Соединяем полученные точки и получаем новую проекцию плоскости (АВС), которая в новой системе занимает положение горизонтальной плоскости уровня. Проекция ($A_5B_5C_5$) равна натуральной величине треугольника (АВС).

Способ плоскопараллельного перемещения. Плоскопараллельным перемещением фигуры в пространстве называется такое ее движение, при котором все точки фигуры движутся в плоскостях, параллельных одной плоскости проекций.

ТЕОРЕМА: Геометрические фигуры, все точки которых перемещаются в параллельных плоскостях, в свою очередь параллельных какой-либо плоскости проекций, проецируются на эту плоскость без изменения своей величины.

Из теоремы следует, что:

- горизонтальную (фронтальную) проекцию фигуры можно располагать в любом месте чертежа, не меняя ее величины;

- фронтальную (горизонтальную) проекцию можно построить по линиям связи на основании новой горизонтальной проекции.

Рассмотрим решение четырех основных задач данным способом.

Задача 1. Преобразовать прямую общего положения в линию уровня.

На рисунке 44 прямая общего положения задана отрезком $[AB]$. Переместим ее в положение горизонтальной прямой.

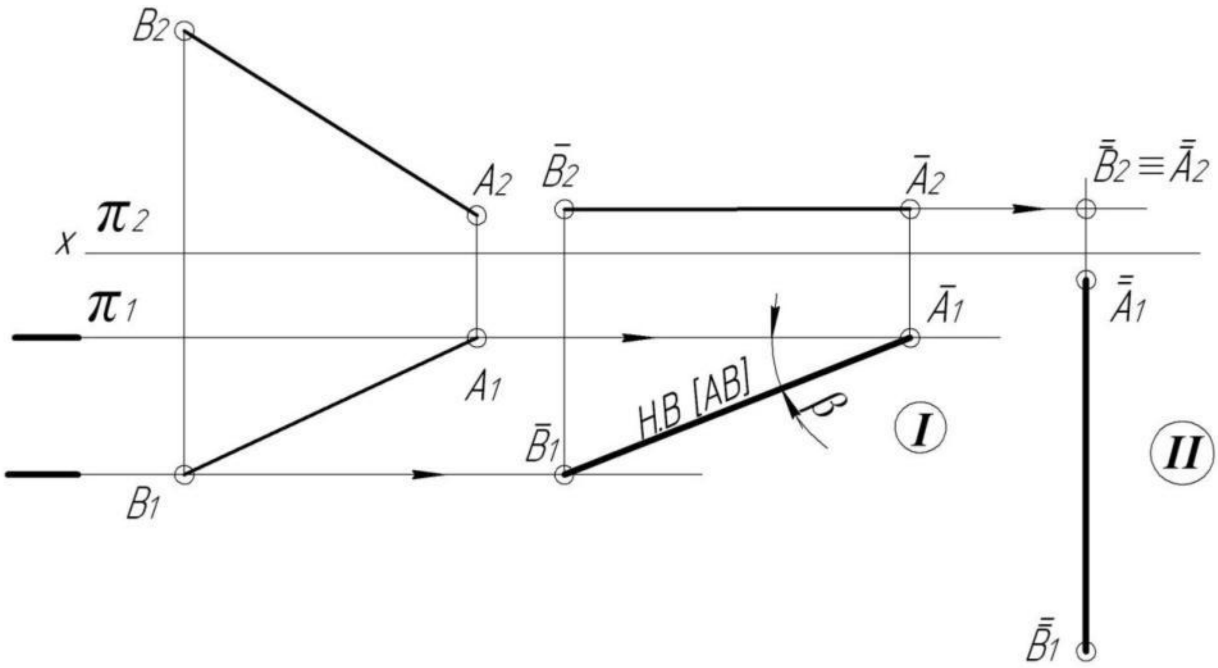


Рисунок 44

Известно, что фронтальная проекция горизонтальной прямой параллельна оси *Ox*. Поэтому разместим перемещенную фронтальную проекцию ($\overline{A}_2\overline{B}_2$) $\parallel$ *Ox* в любом удобном месте на π_2, сохраняя равенство $\left[A_2B_2\right]$ = $[\overline{A}_2\overline{B}_2]$. Проводим горизонтальные следы плоскостей, в которых перемещаются точки А и В и линии проекционной связи, получаем новую проекцию $[\overline{A}_1\overline{B}_1]$ отрезка $\left[AB\right]$.

На рисунке 41 угол β равен углу наклона прямой (*AB*) к плоскости π_2, а $[\overline{A}_1\overline{B}_1]$ – натуральная величина отрезка $\left[AB\right]$.

Задача 2. Преобразовать прямую общего положения в проецирующую прямую.

Известно, что проецирующая прямая вырождается на плоскость проекций, которой она перпендикулярна, в точку. Так как в исходном положении прямая $\left[AB\right]$ находится в общем положении, то вторая задача решается на основе первой.

Второе перемещение осуществляем относительно плоскости π_1. Переносим проекцию $[\overline{A}_1\overline{B}_1]$ в положение перпендикулярное оси *Ox*, $[\overline{A}_1\overline{B}_1]=[\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1]$. Результат изображен на рисунке 44 под цифрой II, прямая (*AB*) преобразована во фронтально проецирующую прямую.

Задача 3. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость.

На рисунке 45 плоскость общего положения задана ΔABC. Решая эту задачу, используем два ранее приведенных положения:

– две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую перпендикулярную к другой плоскости;

– прямую уровня можно одним преобразованием сделать перпендикулярной к одной из плоскостей проекций (задача 2).

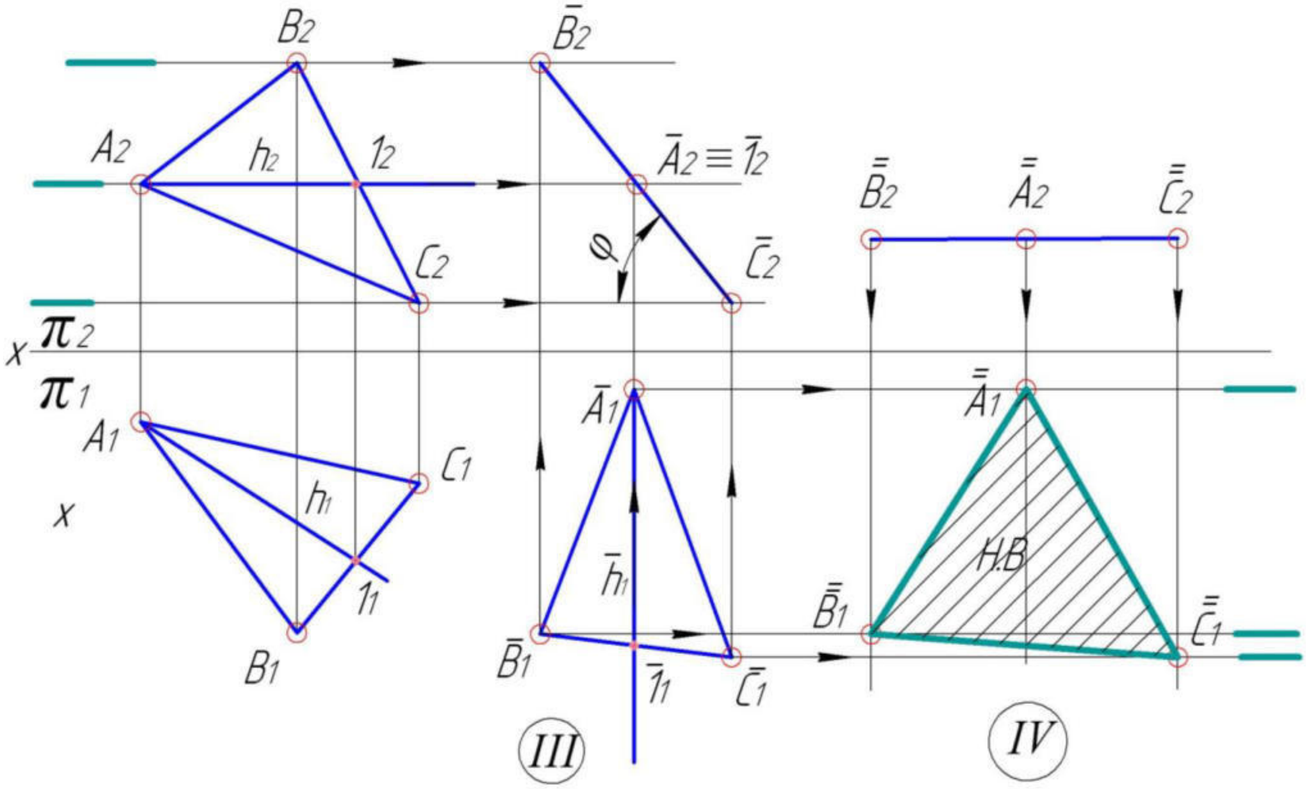


Рисунок 45

Проведем в плоскости ΔABC горизонталь h (h_1;h_2) и, применяя движение относительно $П_1$, переводим горизонталь h во фронтально проецирующее положение $\bar{h}_1 \perp Ox$. При этом $\Delta \bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1 = \Delta A_1 B_1 C_1$ (по основной теореме), а фронтальные проекции A_2, B_2, C_2 перемещаются в горизонтальных плоскостях уровня в новое положение $\bar{A}_2$, $\bar{B}_2$, $\bar{C}_2$. Фигура стала фронтально проецирующей ($\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C} \perp \pi_2$). Угол φ – угол наклона плоскости ABC к π_1.

Задача 4. Плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня.

Применяя второе плоскопараллельное движение относительно плоскости $П_2$ (рисунок 45), переводим плоскость $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ в положение горизонтальной плоскости уровня. Согласно основной теореме, величина проекции на $П_2$ ($\overline{B}_2\overline{A}_2\overline{C}_2$) = ($\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{C}}_2$), но меняется ее положение. На свободном месте в плоскости $П_2$ располагаем ($\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{C}}_2$) $\parallel Ox$. Проводим линии проекционной связи из вершин $\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{C}}_2$ и находим их точки пересечения со следами фронтальных плоскостей уровня, в которых перемещаются данные вершины. Получаем новую проекцию $\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{C}}_1$ треугольника ABC. Это будет натуральная величина треугольника ABC, т.к. $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C} \parallel \pi_1$.

Решение задач способом плоскопараллельного перемещения позволяет наиболее удобным образом располагать проекции оригинала на поле чертежа и избегать наложения проекций, что является важным преимуществом данного способа.

Способ вращения вокруг проецирующей оси. Способ вращения является частным случаем плоскопараллельного движения, когда все точки фигуры – оригинала перемещаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности.

Аппарат вращения:

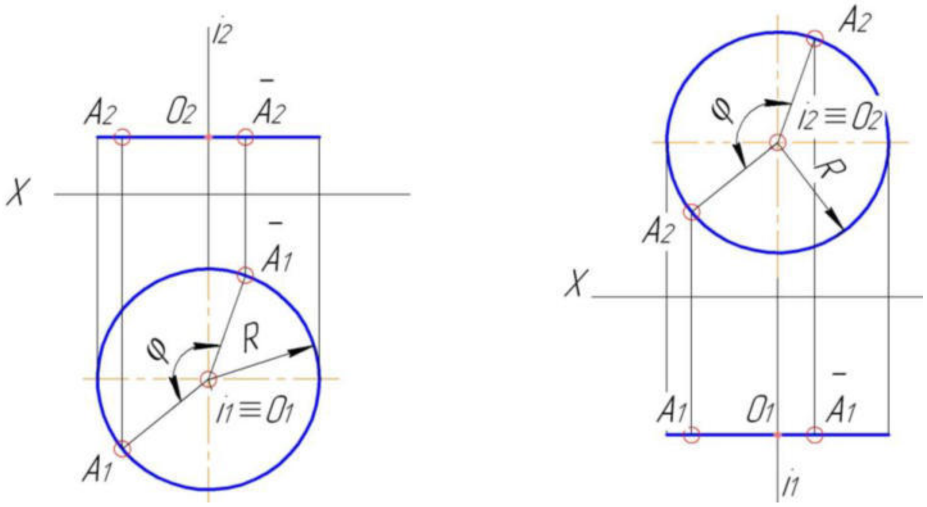
1. Объект вращения – (точка A).
2. Ось вращения – прямая перпендикулярная одной из основных плоскостей проекций ($i \perp \pi_1$).
3. Плоскость вращения – плоскость перпендикулярная оси вращения и включающая объект вращения ($\alpha \perp i$).
4. Центр вращения – точка пересечения плоскости вращения с осью вращения ($0 = \alpha \cap i$).
5. Радиус вращения – расстояние от центра вращения до объекта вращения ($R = |OA|$).

Способ вращения обладает всеми свойствами плоскопараллельного перемещения. Предположим, что точка A вращается вокруг оси i, перпендикулярной плоскости π_1 (рисунок 46,а), и описывает окружность с центром O в плоскости α, перпендикулярной оси i и параллельной плоскости $П_1$ ($\alpha \perp i$, $\alpha \parallel \pi_1$). Траектория движущейся точки A будет проектироваться на $П_1$ в виде окружности радиуса R, а на π_2 – в виде отрезка [$A_2\overline{A_2}$].

Если точку A повернуть против часовой стрелки на угол φ в новое положение $\overline{A}_2$, то ее горизонтальная проекция повернется на тот же угол и попадет в точку $\overline{A}_1$, а фронтальная проекция A_2 переместится по прямой в точку $\overline{A}_2$.

На рисунке 46 показано вращение точки А на эпюре Монжа, из которого видно, что:

1) при вращении точки вокруг оси $i \perp \pi_1$, ее горизонтальная проекция перемещается по окружности с центром на горизонтальной проекции оси вращения, а фронтальная проекция – на прямой параллельной оси Oх (рисунок 46,а);



а б

Рисунок 46

2) при вращении точки вокруг оси $i \perp \pi_2$, ее фронтальная проекция перемещается по окружности с центром на фронтальной проекции оси вращения, а горизонтальная проекция – на прямой параллельной оси Oх (рисунок 46,б).

В данном способе формулировки четырех основных задач сохраняются, но схемы их решения отличны от предыдущих способов преобразования чертежа.

Задачи 1-2. Последовательным вращением соответственно вокруг фронтально и горизонтально проецирующих осей преобразовать отрезок [AB] общего положения во фронтально-проецирующую.

Так как точка A отрезка [AB] принадлежит оси вращения i ($A \in i$), то во вращении будет участвовать только точка B, а точка A остается неподвижной.

Сначала отрезок [AB] преобразуем в линию уровня – горизонтальную прямую (рисунок 47).

Применив свойство способа вращения вокруг оси $i \perp \Pi_2$ и принимая во внимание, что фронтальная проекция горизонтальной прямой всегда параллельна оси Ox, получим новое положение фронтальной проекции отрезка [$\overline{A}_2\overline{B}_2$], а затем горизонтальной [$\overline{A}_1\overline{B}_1$].

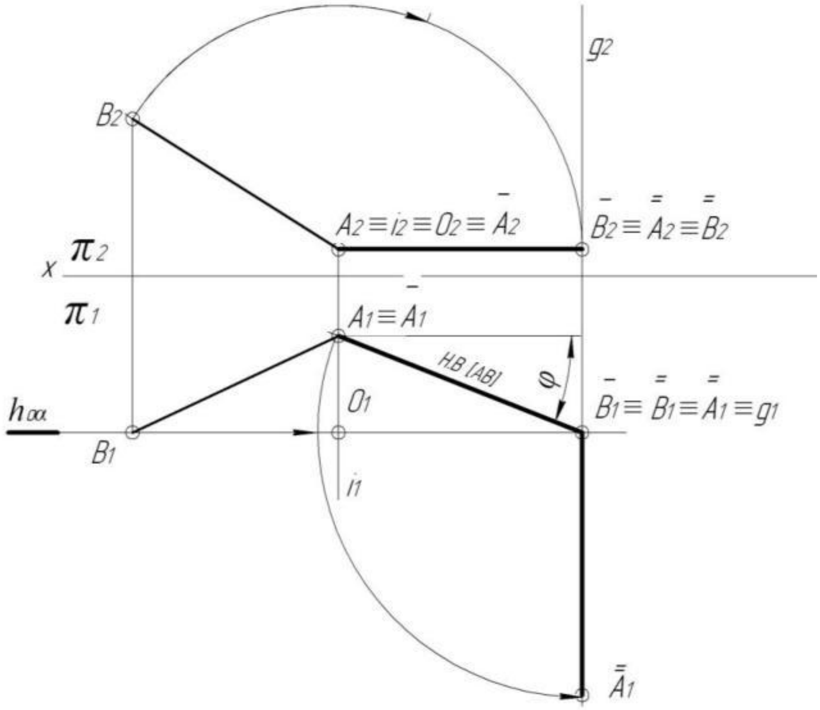


Рисунок 47

На рисунке 47 угол φ равен углу наклона отрезка [AB] к фронтальной плоскости проекций, а [$\overline{A}_1\overline{B}_1$] – натуральная величина отрезка [AB].

Для решения второй задачи выберем новую ось вращения g, перпендикулярно горизонтальной плоскости π_1 и проходящую через точку $\overline{B}$. Применив свойство способа вращения вокруг оси $g \perp \pi_1$ и принимая во внимание, что горизонтальная проекция фронтально-проецирующей прямой перпендикулярна оси Ox, получим новое положение горизонтальной проекции отрезка [$\overline{A}_1\overline{B}_1$], а затем фронтальной ($\overline{A}_2 \equiv \overline{B}_2$), т.е. фронтальная проекция отрезка изобразится на π_2 в виде точки.

Задачи 3-4. Последовательным вращением вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций, преобразовать плоскость общего положения (ΔABC) во фронтальную плоскость уровня (рисунок 48).

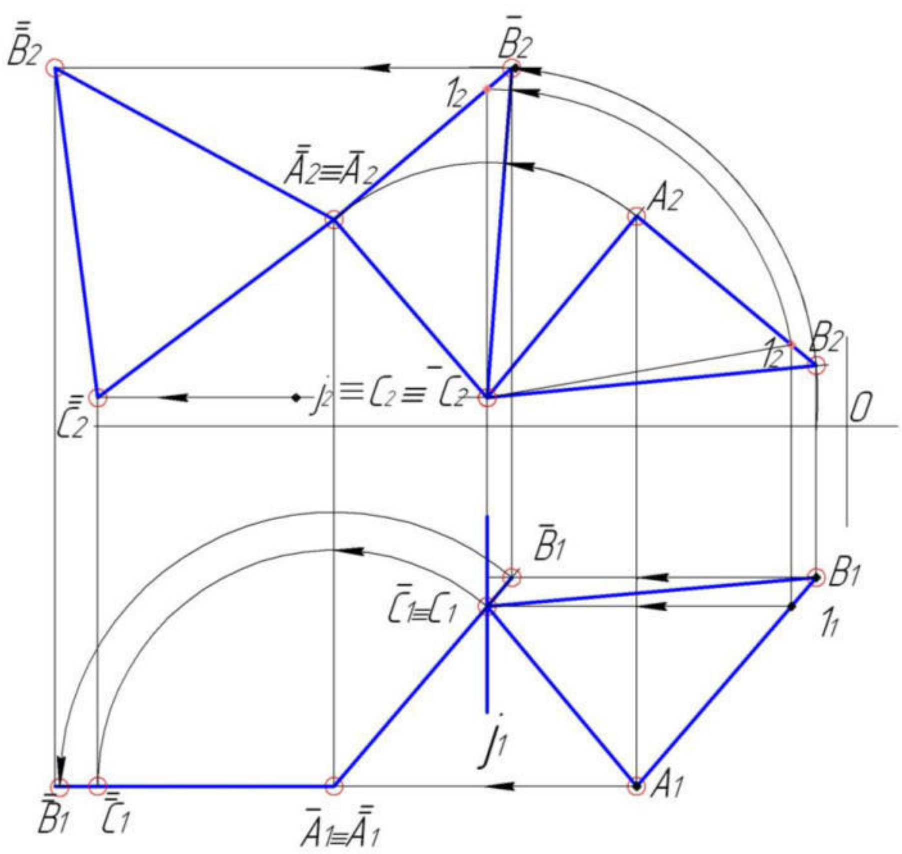


Рисунок 48

Выбираем ось вращения – прямую перпендикулярную горизонтальной или фронтальной плоскости проекций. Проводим ее через одну из имеющихся вершин. В нашем случае это прямая j проходящая через вершину С и перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций ($j_1 \perp OX$, $j_2 \equiv C_2$).

Приводим треугольник АВС в положение проецирующей плоскости, т.е. перпендикулярной плоскости проекций. Признаком перпендикулярности заданной плоскости плоскостям проекций на эпюре является вырождение одной из проекций плоскости треугольника АВС в прямую линию. Для получения фронтально-проецирующей плоскости необходимо горизонталь плоскости вместе с системой всех точек треугольника АВС привести в положение, перпендикулярное фронтальной плоскости проекций, а для получения горизонтально-проецирующей плоскости необходимо фронталь плоскости со всеми точками плоскости перевести в положение перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций.

Полученную горизонтально-проецирующую плоскость преобразуем во фронтальную плоскость уровня. Для этого выродившуюся в прямую линию проекцию треугольника АВС, а именно горизонтальную, располагаем параллельно оси .

При вращении фигур вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций, необходимо учитывать следующее:

1.Линия перемещения точки (траектория) представляет собой окружность. Так как плоскость траектории параллельна плоскости проекций, то проекции точки перемещаются: одна – по окружности, другая – по прямой, параллельной оси проекций.

2. Проекция фигуры на ту плоскость проекций, на которой ось вращения проецируется в точку, не изменяется ни по величине, ни по форме, изменяется только ее положение относительно оси проекций.

Контрольные вопросы для самоподготовки

1.С какой целью применяются способы преобразования проекций?
2. В чем заключается суть способа замены плоскостей проекций?
3. В чем заключается суть способа плоскопараллельного перемещения?
4. Сформулируйте четыре основные задачи преобразования?
5. Объясните, почему 1-2 и 3-4 основные задачи решаются на одном чертеже?
6. Сформулируйте основную теорему плоскопараллельного перемещения?
7. В чем заключается суть способа вращения вокруг проецирующей оси?
8. В чем заключается суть способа вращения вокруг линии уровня?

Тема **6 Кривые линии**

В начертательной геометрии кривую линию можно рассматривать как траекторию движущейся точки на плоскости или в пространстве.

Кривые линии делятся на *плоские*, когда все точки линии лежат в одной плоскости, и *пространственные*, если точки не лежат в одной плоскости.

В начертательной геометрии кривые изучают по их проекциям на эпюре. Так как положение точки *A*,

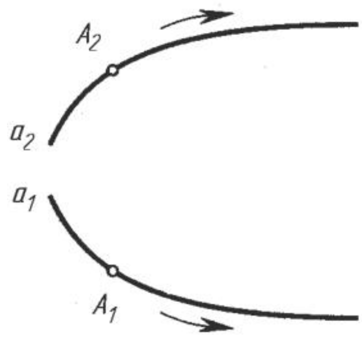


Рисунок 49

описывающей при движении кривую a, определяется в любой момент движения двумя проекциями A (A_1, A_2), то и сама кривая (рисунок 49) в общем случае определяется двумя своими проекциями a (a_1, a_2).

Свойства проекций кривых линий:

1. Проекция кривой линии есть в общем случае кривая. В случае, когда плоская кривая располагается в проецирующей плоскости, то на плоскость проекций, к которой перпендикулярна эта проецирующая плоскость, данная кривая проецируется в прямую.

2. Если точка принадлежит кривой линии, то её проекции лежат на одноименных проекциях этой кривой на одной линии проекционной связи.

3. Касательная к кривой линии проецируется в общем случае в виде касательной к проекции этой кривой.

Касательной t в точке A плоской кривой называется предельное положение секущей m, когда точка $B \in m$, оставаясь на кривой l, стремится к точке A (рисунок 50).

Нормалью n к кривой в точке A называется прямая, лежащая в плоскости α ($n \cap t$) и перпендикулярная к касательной ($n \perp t$) в этой точке.

Кривая, имеющая в каждой своей точке одну касательную, называется *плавной* или гладкой.

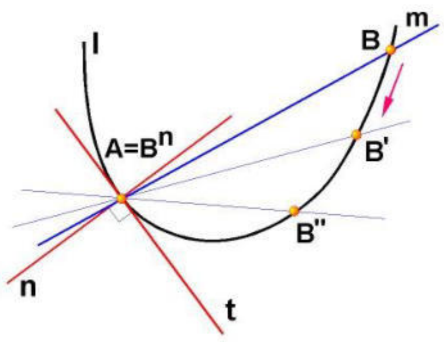


Рисунок 50

К плоским кривым линиям относятся - окружность, эллипс, парабола; пример пространственных кривых – винтовая линия.

Классификация точек кривой. Точки на кривой линии делятся на обыкновенные: точка А на кривой l (рисунок 50) и особые (рисунок 51): точка А излома (рисунок 51, а), в которой присутствуют две касательные с углом между ними, не равным 180º; точка B изгиба (рисунок 51, б), в которой кривая пересекает касательную; точки C и D (рисунок 51,в) – возврата, в которых кривая имеет остриё («клюв») и касательная является общей для обеих ветвей кривой; точка F (рисунок 51,г) – двойная или узловая точка, в которой кривая пересекает самоё себя и имеет две касательные; точка E (рисунок 51,д) – соприкосновения, в которой кривая встречает саму себя, но имеет одну касательную.

Особые точки могут быть как на плоских, так и на пространственных кривых.

Винтовые линии. Цилиндрическая винтовая линия – одна из наиболее часто встречающихся в практике пространственных кривых. Такую линию описывает точка, совершающая равномерное движение по образующей цилиндра вращения, которая, в свою очередь, равномерно вращается вокруг оси цилиндра.

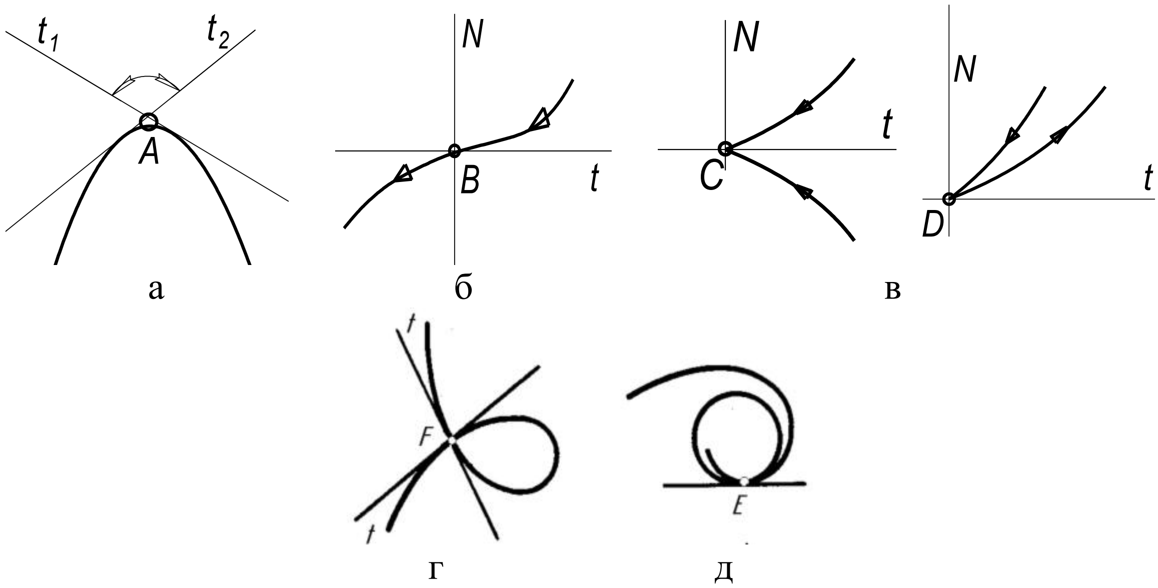


Рисунок 51

В том случае если ось цилиндрической винтовой линии перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то на π_1 ее проекцией будет окружность(рисунок 52), а на π_2 – синусоида . Разверткой винтовой линии является прямая линия. Угол α характеризует угол (крутизну) подъема винтовой линии.

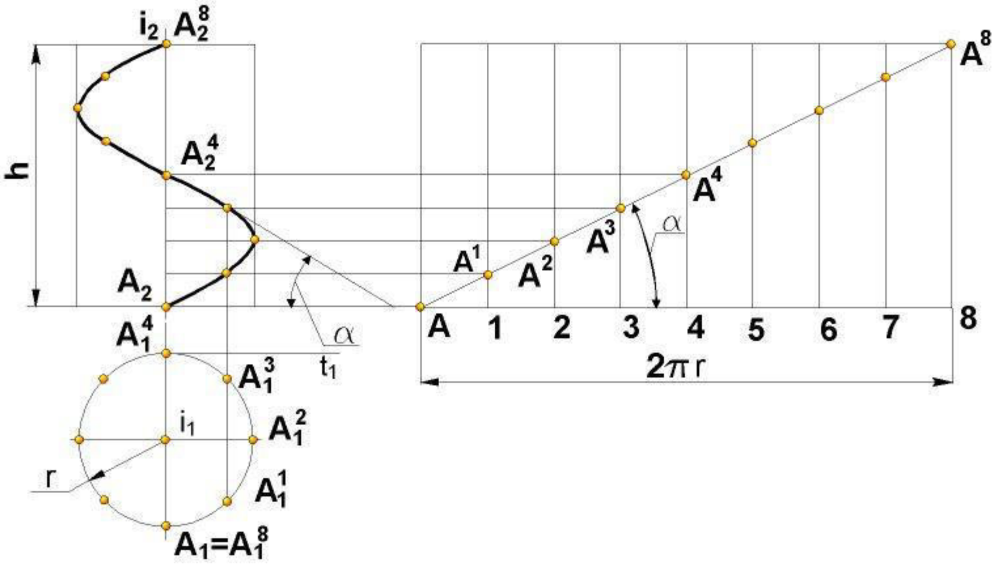


Рисунок 52

Контрольные вопросы для самоподготовки

1. В чем отличие пространственной кривой от плоской?
2. Перечислите «особые точки кривой».
3. Дайте определение цилиндрической винтовой линии.

Тема **7 Поверхности. Поверхности вращения. Линейчатые поверхности. Винтовые поверхности**

В начертательной геометрии используется кинематический способ образования поверхностей.

Геометрическая поверхность это поверхность, образованная движением в пространстве какой либо линии (прямой или кривой) - *образующей*, по другой линии (от одной до трех) - *направляющей*.

Множество независимых элементов, определяющих поверхность в пространстве называется *определителем поверхности*.

Если точка принадлежит поверхности, то по одной ее проекции можно построить ее вторую проекцию.

Поверхность считается заданной, если для любой точки пространства можно на чертеже выяснить: «Принадлежит она данной поверхности или нет?». При решении задач следует руководствоваться правилом: *точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, расположенной на этой поверхности*.

В зависимости от вида образующих все кривые поверхности делятся на линейчатые (образующая - прямая линия) и нелинейчатые (образующая – кривая).

Линейчатые поверхности. Линейчатые поверхности делятся на *развертываемые* и *неразвертываемые.*

Развертываемой называют поверхность, которую можно развернуть так, чтобы всеми своими точками она совместилась с плоскостью без каких-либо повреждений поверхности (складок или разрывов). Если это условие не выполняется, то поверхности являются неразвертываемыми.

К развертываемым поверхностям относятся – цилиндрические, конические, с ребром возврата (торсовые).

Цилиндрическая поверхность - образующие (a) всегда параллельны, направляющая (m) – одна кривая линия (рисунок 53).

Коническая поверхность – все прямолинейные образующие (a) имеют общую неподвижную точку- вершину (S), направляющая (m) - одна любая кривая линия (рисунок 54).

Поверхности с ребром возврата (рисунок 55) – образующие являются касательными к одной направляющей (кривой линии).

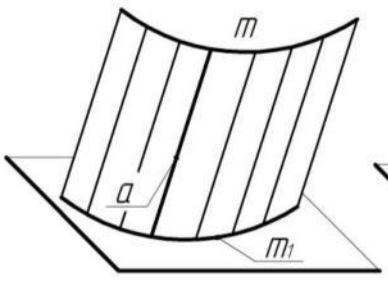


Рисунок 53

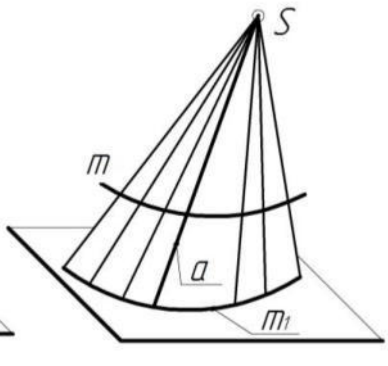


Рисунок 54

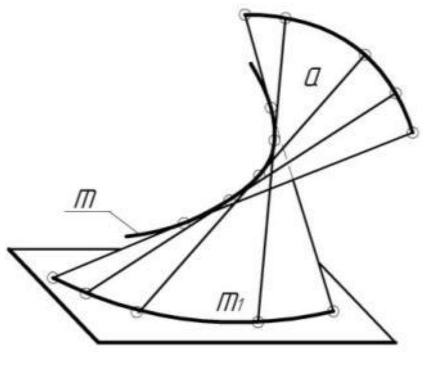


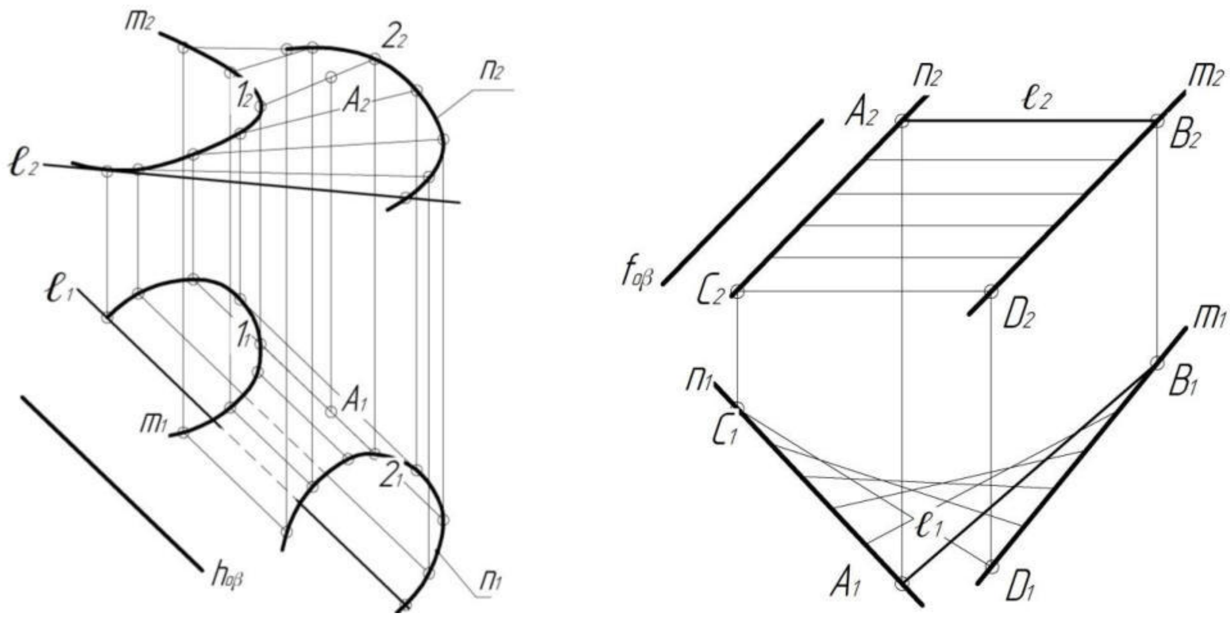
Рисунок 55

Линейчатые неразвертываемые поверхности **-** цилиндроид, коноид, гиперболический параболоид (косая плоскость).

Цилиндроид образуется при перемещении прямой линии l, во всех положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости β (плоскости параллелизма) и пересекающей две кривые линии m и n (рисунок 56,а).

Коноид образуется при перемещении прямой линии *l*, во всех положениях сохраняющей параллельность некоторой плоскости (плоскости параллелизма) и пересекающей две направляющие, одна из которых кривая *m*, а другая прямая линия $a \perp П_1$. Для коноида плоскостью параллелизма является горизонтальная плоскость проекции $П_1$.

Образование *косой плоскости* (рисунок 56,б) можно рассматривать как результат перемещения образующей – прямой линии *l*, по двум направляющим *m* и *n* – скрещивающимися прямым, параллельно некоторой плоскости – плоскости параллелизма ($П_1$).



а б

Рисунок 56

Циклические поверхности. *Циклической* называется поверхность образованная с помощью окружности, центр которой перемещается по криволинейной направляющей (рисунок 57,а).

Каналовой поверхностью, называют поверхность, образованную непрерывным каркасом замкнутых плоских сечений, определенным образом ориентированных в пространстве. Площади этих сечений монотонно изменяются в процессе их перемещения по направляющей .

Каналовая поверхность применяется для создания переходных участков между двумя поверхностями типа трубопроводов имеющих: различную форму, но одинаковую площадь нормального сечения; одинаковую форму, но различные площади сечения; различную форму и различные площади поперечных сечений.

Трубчатая поверхность может быть получена при движении окружности постоянного радиуса по криволинейной направляющей, плоскость окружности все время остается перпендикулярной к направляющей (рисунок 57,б).

а

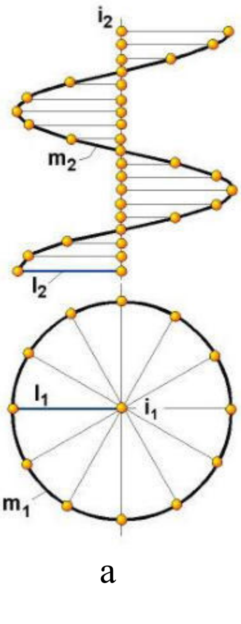
б

Рисунок 57

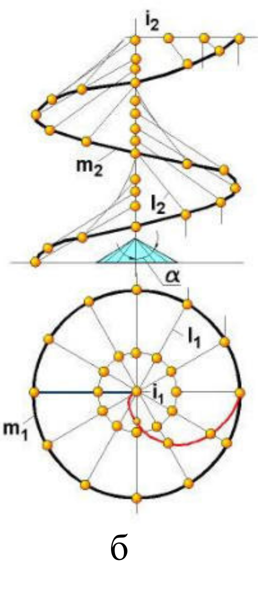
Винтовые поверхности. Винтовая поверхность образуется при движении прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых – винтовая линия, другая – ось винтовой линии, которую образующая пересекает под постоянным углом.

Прямая винтовая поверхность - угол между образующей (l) и осью (i) равен 90^0 (рисунок 58,а).

Косая винтовая поверхность - угол между образующей (l) и осью (i) не равен 90^0 (рисунок 58,б).



а



б

Рисунок 58

Практическое применение винтовые поверхности находят в специальных винтах для преобразования вращательного движения в поступательное (винтовые транспортеры для перемещения зерна, мелкокусковых материалов и др., шнековые прессы для цехов кормопроизводства, маслоцехов).

Поверхности вращения. Поверхностью вращения называется такая, которая образуется вращением какой-либо линии, называемой *образующей*, вокруг неподвижной прямой называемой *осью вращения*.

Окружности, по которым перемещаются точки образующей при её вращении вокруг оси, называются *параллелями* поверхности вращения. Наименьшая параллель называется *горловиной* или «горлом» поверхности, наибольшая – *экватором.*

Кривые линии, получающиеся в сечении поверхности вращения плоскостями, проходящими через ось вращения, называются *меридианами*. Меридиан, расположенный в плоскости уровня, называется *главным.*

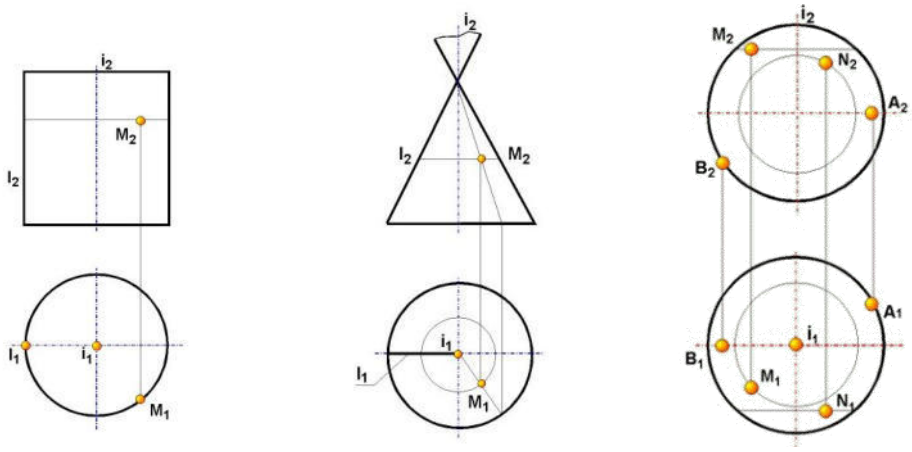
Для цилиндра и конуса вращения меридианами являются прямые линии. Для цилиндра они параллельны оси и равноудалены от нее, для конуса – пересекают ось в одной и той же точке под одним и тем же углом. Конус и цилиндр в направлении их образующих являются бесконечными. В связи с этим на изображениях их чаще всего ограничивают линиями пересечения этих поверхностей с плоскостями проекций (рисунок 59,а, б).

При задании поверхности вращения на чертеже обычно указывают проекции ее оси, главного меридиана и экватора.

В машиностроении поверхности вращения нашли широкое применение (валы, оси и т.п.).

Сфера может быть образована вращением окружности вокруг своей оси (рисунок 59,в). Сфера является ограниченной поверхностью, поэтому на чертеже изображается полностью. Экватор и меридианы сферы равны между собой. При прямоугольном проецировании сфера на все три плоскости проекций проецируется в окружности.

Тор. Поверхность тора может быть получена при вращении окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр.



а б в

Рисунок 59

Положение точки на поверхности вращения определяют с помощью окружности, проходящей через эту точку на поверхности вращения. Для линейчатых поверхностей возможно применение и прямых линий (образующих).

Применение параллели и прямолинейной образующей для построения проекций точек, принадлежащих поверхности конуса вращения, показано на рисунке 59,б.

Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Как определяется поверхность в пространстве?

2. Какую линию называют образующей?

3. Какую линию называют направляющей?

4. Сформулируйте алгоритм решения задачи на принадлежность точки поверхности.

5. Какая поверхность называется поверхностью вращения?

6. Чем можно задать поверхность вращения?

7. Что называется параллелями и меридианами на поверхностях вращения, экватором, горлом, главным меридианом?

8. Можно ли образовать однополостной гиперболоид вращения при помощи прямой линии?

9. Как образуется поверхность, называемая тором?

10. Как определяется положение точки на поверхности вращения?

11. Какие поверхности называются развёртываемыми, неразвёртываемыми?

12. Как образуются поверхности с плоскостью параллелизма?

13. Какие линии являются направляющими у цилиндра и коноида?

14. Как образуется косая плоскость (гиперболический параболоид)?

15. Как образуется поверхность косого клина?

16. Приведите определение винтовой поверхности, способ её образования.

17. Какие поверхности называются циклическими?

18. Как задаётся каркасная поверхность?

Тема **8 Обобщенные позиционные задачи**

Обобщенные задачи в краткой форме могут быть сформулированы так:

- построить линию пересечения поверхности с плоскостью;
- построить точки пересечения поверхности с прямой ;
- построить линию взаимного пересечения поверхностей.

Эти задачи можно решить одним из способов: способом вспомогательных секущих плоскостей или способом вспомогательных секущих сфер.

Рассмотрим оба способа построения.

Пересечение кривых поверхностей плоскостью. В пересечении кривой поверхности плоскостью в общем случае получается плоская кривая линия (окружность, эллипс и т.д.). При пересечении линейчатых поверхностей плоскостями могут получаться, в частности, и прямые линии, если секущая плоскость направлена вдоль образующих (цилиндра, конуса и др.).

В зависимости от наклона секущей плоскости для кругового конуса имеется пять различных фигур сечения (рисунок 60):

1) плоскость, проходящая через вершину конуса, в сечении образует треугольник;

2) плоскость, перпендикулярна к оси конуса, в сечении образует окружность;

3) плоскость, наклоненная к оси конуса под углом, большим, чем угол наклона образующих конуса к оси, в сечении образует фигуру, ограниченную эллипсом;

4) плоскость, параллельна какой-либо образующей конуса, в сечении образует фигуру, ограниченную параболой;

5) плоскость, наклоненная к оси конуса под углом, меньшим, чем угол наклона образующих конуса к его оси, и не проходящая через вершину конуса, в сечении образует фигуру, ограниченную гиперболой.

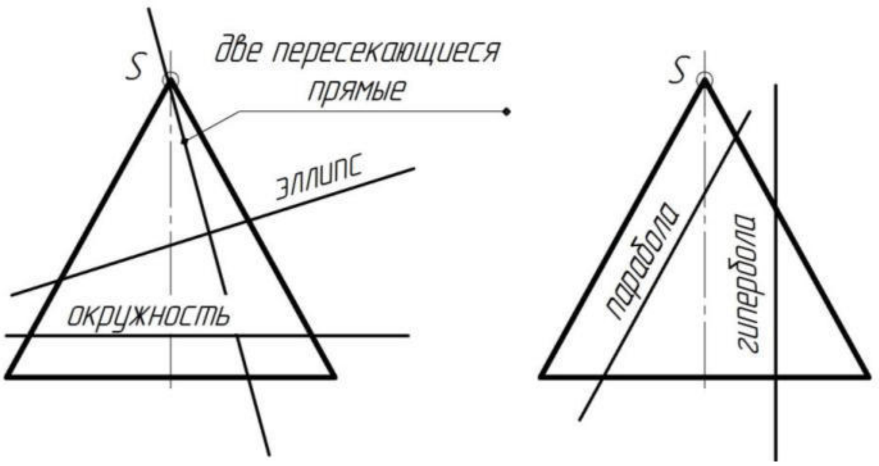


Рисунок 60

Основным способом построения точек линии пересечения поверхности плоскостью является способ вспомогательных секущих плоскостей. Вспомогательная плоскость пересекает заданную плоскость по прямой, а поверхность – по некоторой кривой или прямой линии. Точки пересечения этих линий и будут искомыми точками, принадлежащими поверхности и секущей плоскости.

Построение проекций линии сечения поверхности плоскостью значительно упрощается, если секущая плоскость проецирующая (рисунок 61), т.к. в этом случае одна из проекций линии сечения уже имеется на чертеже: она совпадает с вырожденной проекцией плоскости. Остается лишь найти другие проекции этой линии.

В нашем случае секущая плоскость – фронтально – проецирующая. Зная фронтальную проекцию линии сечения ($A_2B_2C_2D_2$) строим горизонтальную проекцию ($A_1B_1C_1D_1$).

Пересечение кривых поверхностей прямой линией. Для нахождения точек пересечения прямой линии с поверхностью её заключают в проецирующую плоскость – посредник. Далее строят линию пересечения проецирующей поверхности с заданной и на ней отмечают точки пересечения с заданной прямой. Это и есть точки пересечения прямой с поверхностью.

Нахождение точек пересечения кривых поверхностей прямой линией основано на решении первой позиционной задачи. При этом вспомогательную плоскость следует выбирать так, чтобы в сечении на кривой поверхности получались простейшие линии (прямые или окружности).

Например, при пересечении конической поверхности прямой линией такой плоскостью является плоскость, проходящая через вершину и, следовательно, пересекающая эту поверхность по прямым линиям.

При пересечении цилиндрической поверхности прямой линией целесообразно проводить вспомогательную плоскость через данную прямую параллельно образующим этой поверхности, т.к. в сечении так же получаются прямые линии.

Рассмотрим точки пересечения прямой с поверхностью конуса (рисунок 62).

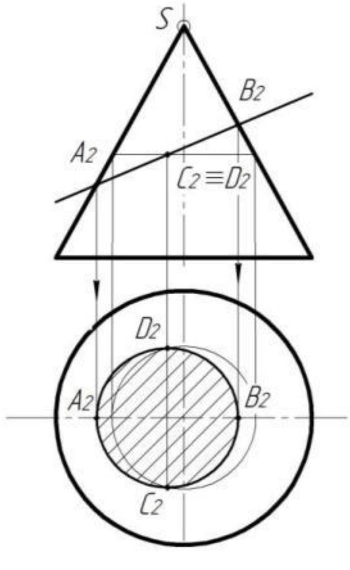


Рисунок 61

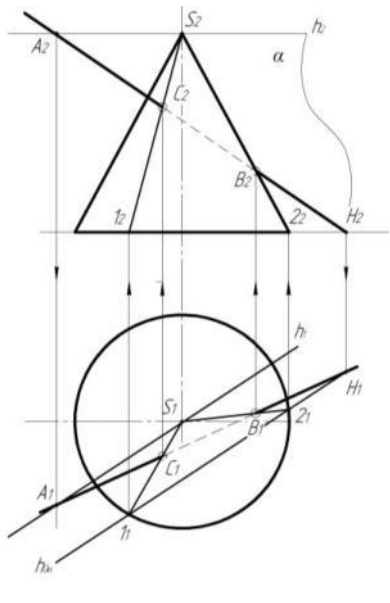


Рисунок 62

Алгоритм решения:

1. Заключаем заданную прямую в плоскость (α). Через вершину конуса проводим горизонталь (h). Находим точку пересечения (A) с заданной прямой (l).

2. Строим горизонтальный след плоскости α ($h_{0\alpha}$).

3. Находим точки пересечения ($h_{0\alpha}$) с основанием конуса - точки 1 и 2.

4. Соединяем полученные точки с вершиной конуса (S1) и (S2).

5. Находим точки пересечения (S1) и (S2) с заданной прямой – точки С и В.

Точки C и B являются точками пересечения прямой l с поверхностью конуса.

Взаимное пересечение кривых поверхностей. Кривые поверхности в общем случае пересекаются по пространственной кривой линии. Порядок этой кривой определяется как произведения порядков пересекающихся поверхностей. Проекции кривой строятся при помощи введения вспомогательных секущих поверхностей (используют плоскости и сферы). Секущие поверхности пересекают заданные поверхности по графически простым линиям: прямым или окружностям. Важно, чтобы эти линии проецировались на одну из плоскостей проекции без искажения.

Построение линии пересечения поверхностей всегда начинают с построения *опорных точек*, к которым принадлежат экстремальные точки и точки границ видимости. *Экстремальные точки* – это точки, принадлежащие граничным поверхностям – посредниками в пределах области применения последних, а также точки пересечения главных меридианов.

Точки границ видимости определяют видимую часть линии пересечения от невидимой и принадлежат очерковым линиям заданных поверхностей.

На рисунке 63 к экстремальным точкам относятся точки ***A, E, F, B***, к точкам границ видимости - ***C*** и ***D*.**

На чертеже опорные точки рекомендуется обозначить буквами.

Вспомогательные плоскости. В качестве вспомогательных секущих плоскостей – посредников часто используются плоскости уровня, так как в этом случае полученное сечение проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения. Для примера построим линию пересечения поверхностей конуса и цилиндра вращения (рисунок 63). В качестве вспомогательных секущих плоскостей – посредников выбираем горизонтальные плоскости уровня (γ_2,…..), которые рассекают конус по окружностям ***d***, а цилиндр - по образующим ***n***. Точки их взаимного пересечения и являются точками искомой линии пересечения.

Вспомогательные сферы. Для построения линии пересечения поверхностей вращения, оси которых пересекаются, образуя плоскость уровня, в качестве секущих поверхностей – посредников применяют сферы, так как всякая сфера с центром на оси поверхности вращения пересекает последнюю по окружности. Таким образом, если оси двух поверхностей вращения пересекаются, то сфера с центром, помещенным в точку пересечения осей поверхностей вращения, пересекает их по окружности. Если при этом поверхности расположены так, что оси их параллельны какой-либо плоскости проекций, то окружности сечения проецируются на эту плоскость в виде прямолинейных отрезков. Точки пересечения этих отрезков являются проекциями точек линии пересечения. Меняя радиус секущей сферы, можно получить достаточное число точек линии пересечения. Радиус наибольшей секущей сферы-посредника равен расстоянию от точки пересечения осей до наиболее удаленной точки пересечения очерков поверхностей. Радиус наименьшей секущей сферы – посредника равен радиусу той окружности, которая является большей из двух окружностей, вписанных в очерки обеих поверхностей.

Для примера построим линию пересечения поверхностей двух цилиндров вращения (рисунок 64). Опорные точки линии пересечения (***A*** и ***B***) на фронтальной проекции определяются как результат пересечения главных меридиа нов.

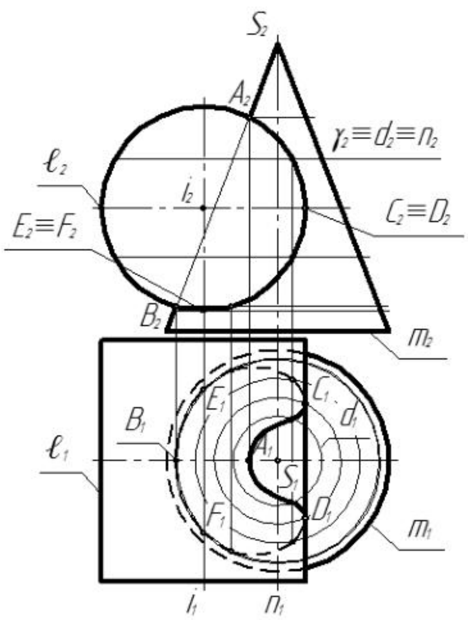


Рисунок 63

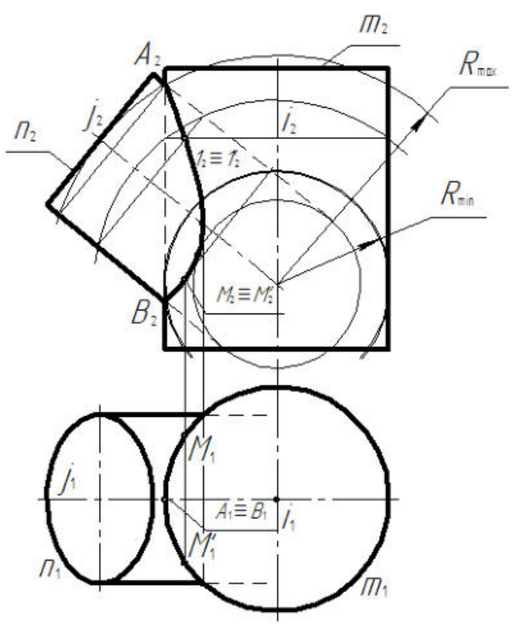


Рисунок 64

Необходимое количество произвольных (рядовых) точек находится с помощью проведения секущих сфер-посредников, радиусы которых удовлетворяют неравенству $R_{\min} \leq R \leq R_{\max}$. В данном примере минимальная сфера вписана в вертикальный цилиндр, что и позволило определить симметричную пару точек ***M*** и ***M'***. На чертеже показано построение пары рядовых точек ***1*** и ***1'*** с помощью промежуточной сферы посредника.

Сферы в качестве поверхностей-посредников также применяются в случае, если одна из пересекающихся поверхностей не является поверхностью вращения, но имеет семейство круговых сечений. Такие поверхности называются циклическими. В этом случае ось поверхности вращения должна принадлежать плоскости, образованной перпендикулярами, восстановленными из центров этих круговых сечений. Точка пересечения перпендикуляра и оси поверхности вращения будет являться центром секущей сферы-посредника. Величина радиуса будет равна расстоянию от центра сферы до точки пересечения проекции кругового сечения с очерком поверхности.

Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Какие задачи, решаемые в начертательной геометрии, называются обобщенными позиционными задачами?

2. Как решается в общем случае задача на принадлежность точки поверхности?

3. Какие вспомогательные секущие поверхности находят большее применение в процессе решения обобщённых позиционных задач?

4. Сформулируйте алгоритм решения задач:

- пресечение поверхности с прямой;
- пересечение поверхности с плоскостью.

5. Для каких поверхностей применяются вспомогательные секущие плоскости уровня ?

6. Какие точки называются опорными, произвольными?

7. Для каких поверхностей применяется способ концентрических сфер?

8. Для каких поверхностей применяется способ эксцентрических сфер?

Тема **9 Касательные линии и плоскости к поверхности. Построение разверток поверхностей**

Понятие касательной прямой к поверхности основано на введенном ранее определении касательной к плоской и пространственной кривой.

Касательная плоскость является геометрическим местом всех касательных, проходящих через данную точку поверхности.

Для построения плоскости, касательной к поверхности в данной ее точке, достаточно через нее провести две касательные к двум кривым, проходящим через ту же точку поверхности.

С понятием касательной плоскости тесно связано понятие нормали к поверхности. Нормалью к поверхности в некоторой ее точке М называют прямую, проходящую через точку М и перпендикулярную касательной плоскости, проведенной через эту точку. Для ее построения на комплексном чертеже используют условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Можно построить множество нормалей заданной длины в точках поверхности и тогда концы этих векторов (нормалей) образуют «ежик», по которому можно определить особенности формы поверхности. Если векторы «ежика» в какой-либо зоне поверхности пересекаются, то имеет место вмятина на поверхности, если векторы неравномерно расходятся — выпуклость. Касательные плоскости однозначно можно построить не во всякой точке поверхности. Поэтому эти точки разделяют на обыкновенные и особые. В обыкновенных точках имеется или может быть построена только одна определенная касательная плоскость. В особых точках касательная плоскость или не определена, или же их существует несколько.

Особыми точками поверхностей являются, например, вершина любой конической поверхности или любая точка на ребре возврата торсовой поверхности.

Построение касательной плоскости на чертеже связано с определением точки ее касания с поверхностью.

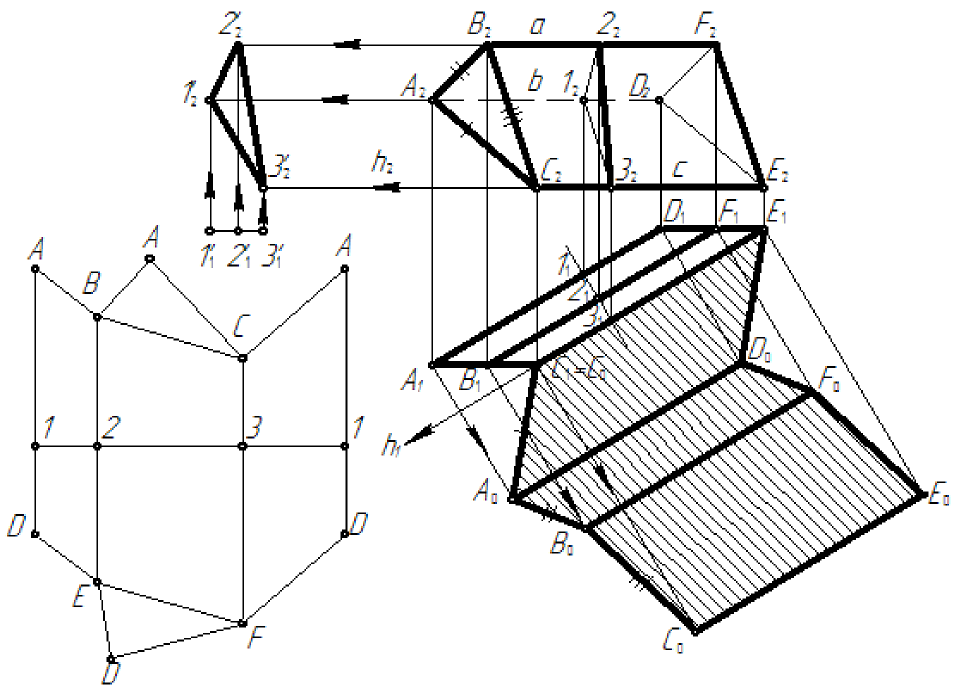
Развертки поверхностей. Если рассматривать поверхность как гибкую нерастяжимую пленку, то, выполнив предварительно разрез по произвольной линии, можно попытаться совместить её с плоскостью без разрывов и складок.

По этому признаку поверхности делятся на развертывающиеся (поверхности многогранников, цилиндрические, конические, торсовые) и не развертывающиеся (сферические, торовые, поверхности с плоскостью параллелизма и т.п).

Существует три способа построения развертки поверхностей многогранников: *способ треугольников* (триангуляции), *способ нормального сечения*, *способ раскатки*. Два последних способа применяются для построения развертки призматических поверхностей.

Построение развертки призмы способом нормального сечения показано на рисунке 65,а.

Ребра призмы ***a***, ***b*** и ***c*** параллельны плоскости $\boldsymbol{\pi}_1$ поэтому на эту плоскость они проецируются без искажения. Если ребра призмы занимают общее положения, то сначала, применив один из способов преобразования проекций, переводят их в положение, параллельное какой-либо плоскости проекций.



а б

Рисунок 65

Строим сечение (123) призмы горизонтально-проецирующей плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$, перпендикулярной ее боковым ребрам. Способом параллельного переноса определяем натуральную величину треугольника (123) и, следовательно, величины его сторон.

Проводим горизонтальную линию, на которой откладываем отрезки: [12]=[1`$_2$2`$_2$], [23]=[2`$_2$3`$_2$] и [31]=[3`$_2$1`$_2$]. Через точки 1, 2, 3, 1 проводим перпендикулярные прямые, на которых откладываем отрезки [1A]=[1_1A_1]; [1D] = [1_1D_1]… Концы ребер соединяем отрезками прямых. Полученный многоугольник *ABCADFED*, представляет собой развертку боковой поверхности призмы.

Способ раскатки является частным случаем способа нормальных сечений. Этот способ применяется для построения развертки поверхности призмы, когда основание призмы параллельно какой-либо одной плоскости проекций, а ее ребра параллельны другой плоскости проекций. Сущность метода раскатки состоит в том, что грани призмы последовательным вращением вокруг ее боковых ребер совмещаются с какой-либо плоскостью. Полученная таким образом фигура является разверткой боковой поверхности призмы. На рисунке 65,б показано построение развертки боковой поверхности призмы способом раскатки.

Боковые ребра призмы являются горизонталями, а ее основания – фронтальными плоскостями. Примем за первую ось вращения ребро *CE*. Вращением вокруг него совмещаем грань *CEDA* с фронтальной плоскостью, проходящей через ребро *CE*. Для нахождения совмещенного с фронтальной плоскостью положения ребра *AD* из точки A_1 проводим прямую, перпендикулярную к C_1E_1. После этого засекаем на ней точку A_0 дугой радиуса $R = A_2C_2$, проведенной из центра C_1. Через полученную точку проводим прямую *AD*, параллельную C_1E_1. Затем последовательным вращением вокруг осей *AD* и *BF* совмещаем с фронтальной плоскостью грани *ADFB* и *BFEC*.

Положения точек *D, F* и *E* на развертке легко найдены в пересечении прямых A_0D_0 и D_1D_0, B_0F_0 и B_2B_0, C_0E_0 и E_2E_0, параллельных соответственно прямым C_2E_2 и A_1A_0.

Развертка пирамиды выполняется путем последовательного построения натуральной величины треугольников боковых граней и основания (рисунок 66).

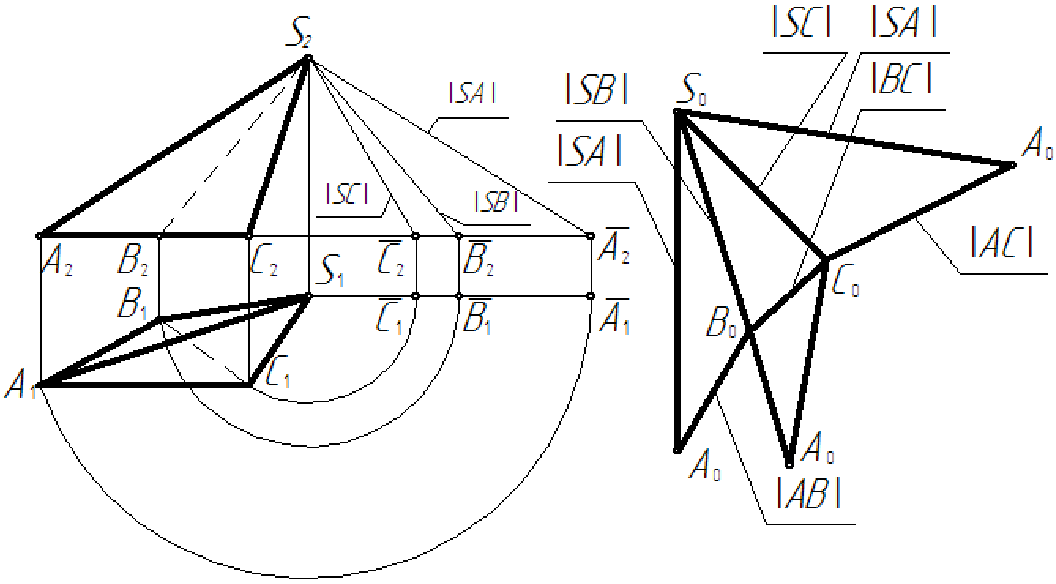


Рисунок 66

Для определения натуральной величины сторон треугольников (ребер) применяют вращение вокруг проецирующей прямой.

Развертки кривых развертывающихся поверхностей цилиндра и конуса выполняются приближенно.

Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Как построить касательную к поверхности, касательную плоскость к поверхности?
2. Как построить нормаль к поверхности, к плоскости?
3. Что называется развёрткой поверхности?
4. Какими общими свойствами обладают исходные поверхности и их развёртки?
5. В чём суть способа нормального сечения и область его применения?
6. В чём суть способа триангуляции и область его применения?
7. Как построить на развёртке линию, лежащую на поверхности?
8. В чём отличие точной развёртки от приближенной?

Тема **10 Аксонометрические проекции**

Основные понятия и определения аксонометрического проецирования. Часто, для наглядного изображения конструкций приборов, машин на чертеже, особенно на начальных этапах конструирования используют аксонометрические проекции.

Способ аксонометрического проектирования состоит в том, что данная фигура вместе с осями прямоугольных координат, к которым он отнесена в пространстве, параллельно проецируется на плоскость аксонометрических проекций, которую также называют картинной плоскостью.

В зависимости от величины коэффициентов искажения (k-коэффициент искажения по оси x; m – по оси y; n – по оси z) аксонометрия подразделяется на три группы:

$k = m = n$ - изометрическая;

$k = m \neq n$ - диметрическая;

$k \neq m \neq n$, - триметрическая.

В зависимости от направления проецирующих лучей аксонометрические проекции делятся на *прямоугольные* и *косоугольные*.

Если проецирующие прямые перпендикулярны аксонометрической плоскости проекции, то такая проекция называется *прямоугольной* аксонометрической проекцией.

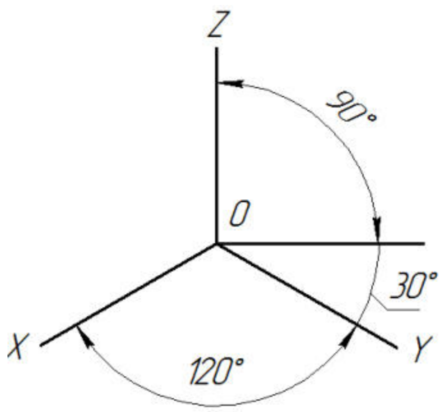
К прямоугольным аксонометрическим проекциям относятся *изометрическая* и *диметрическая.*

Если проецирующие прямые направлены под углом к аксонометрической плоскости проекций, то получается *косоугольная* аксонометрическая проекция.

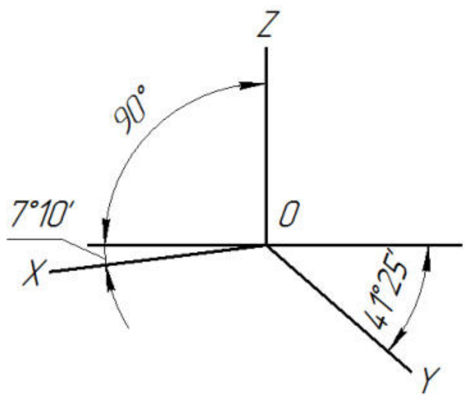
К косоугольным аксонометрическим проекциям относятся *фронтальная изометрическая, горизонтальная изометрическая и фронтальная диметрическая* проекции.

Изометрическая проекция строится по осям, которые располагаются под углом 120^0 друг к другу (рисунок 67,а). Коэффициенты искажения равны между собой - k=m=n=1.

Каждый отрезок, направленный по осям x, y, z или параллельно им, сохраняет свою величину. Окружности изображаются в виде эллипсов. Большая ось - 1,22d; малая – 0,71d.



а



б

Рисунок 67

Диметрическая проекция. Направление осей показано на рисунке 67,б. Коэффициенты искажения - k = m = 1 и n =0,5.

Окружности изображаются в виде эллипсов. Большая ось – 1,06 d; малые оси расположенные - на фронтальной плоскости 0,94 d, на других плоскостях 0,35d.

Фронтальная изометрическая проекция. Ось Z – вертикальная; ось X расположена под углом 90° к оси Z; ось У – под углом 45° к горизонтальной прямой. Коэффициенты искажения - k=m=n=1 . Окружность, лежащая в плоскостях параллельных фронтальной плоскости проекции не искажается, а параллельны горизонтальной и профильной плоскостях проекций, проецируются в эллипсы. Длина большой оси равна 1,3 d; малая – 0,54 d.

Горизонтальная изометрия. Ось Z – вертикальная; ось X расположена под углом 90° к оси У; ось У – под углом 30° к горизонтальной прямой; Kz=Kx=Ky=1.

Контрольные вопросы для самоподготовки

1.Как образуется аксонометрический чертёж?

2. В чём различие между косоугольной и прямоугольной аксонометрическими проекциями?

3. Какая линия является аксонометрической проекцией окружности?

4. Как строятся оси в прямоугольных проекциях: а) изометрической, б) диметрической?

5. Как определяется направление и величина большой и малой оси эллипса, являющегося изометрической или диметрической проекцией окружности, расположенной во фронтальной, горизонтальной и профильной плоскостях?

Сергей Николаевич Петряков
Ольга Михайловна Каняева
Антон Алексеевич Хохлов
Ильмас Рифкатович Салахутдинов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ :

краткий курс лекций

для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» - Димитровград: Технологический институт – филиал УлГАУ, 2023.- 64 с.