

Министерство сельского хозяйства  
Российской Федерации

Технологический институт-филиал ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

Н.В. Щевченко

**ФИЗИКА:**  
краткий курс лекций



Димитровград - 2023

**УДК 631.3.0**

**ББК 39.3**

**Д - 52**

**Щевченко, Н.В.** Физика: краткий курс лекций / Н.В. Щевченко -  
Димитровград: Технологический институт – филиал УлГАУ, 2023.- 147 с.

Рецензенты:       Голубев Владимир Александрович, кандидат технических наук,  
доцент кафедры «Эксплуатация мобильных машин и технологического  
оборудования» ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

Ротанов Евгений Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент  
кафедры «Естественнонаучные и технические дисциплины», ПКИУПТ  
(филиал) ФГБОУ ВО «МГУТУ ИМ. К.Г.РАЗУМОВСКОГО (ПКУ)»

Физика: краткий курс лекций предназначен для подготовки бакалавров очной и  
заочной форм обучения по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация  
транспортно-технологических машин и комплексов».

Утверждено  
на заседании кафедры «Эксплуатация мобильных  
машин и социально - гуманитарных дисциплин»  
Технологического института – филиала  
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ,  
протокол № 1 от 4 сентября 2023г.

Рекомендовано  
к изданию методическим советом Технологического  
института – филиала  
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ  
Протокол № 2 от 10 октября 2023г.

© Щевченко Н.В., 2023

© Технологический институт – филиал ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ, 2023

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

## Лекция №1

**Введение.** Предмет физики. Научный метод познания. Физика фундамент естественных наук. Эксперимент и теория. Модели. Физические законы. Математика – язык физики.

**Кинематика материальной точки.** Механическое движение. Системы отсчета. Материальная точка. Траектория. Перемещение, скорость и ускорение, тангенциальная и нормальная составляющие ускорения. Связь между векторами линейных и угловых скоростей и ускорений.

### 1.1. Введение

Наукой обычно называют попытки систематизировать сумму знаний об окружающем нас материальном мире, о самом человеке и о результатах его деятельности. Сам термин «наука» в настоящее время употребляют во множественном числе, подчеркивая многогранность этого понятия. В этом смысле науки разделяют на гуманитарные и естественные. Общим для всех наук является обязательное использование формальной логики как универсального метода научного мышления.

Физика как отдельная наука изучает наиболее общие законы формирования и развития окружающей нас материи в ее наиболее примитивных формах, которые принято называть неживой природой. Поэтому можно утверждать, что физика является фундаментом всех естественных наук, в частности географии.

В XIX и XX веках физика пережила бурный расцвет, физические знания и физический метод исследования получили большую известность и нашли применения в различных аспектах человеческой деятельности.

Сущность этого метода состоит в том, что в основу критической оценки всех разработанных физических теорий положен эксперимент.

На ранних стадиях развития науки физики свои заключения строили на основе реальных наблюдений различных природных явлений, например, таких как гроза (Б. Франклин и Г.В. Рихман). Позднее человек научился искусственно воспроизводить эти явления в лабораторных условиях – «ставить научные **эксперименты**». Ясно, что ни одна лаборатория не в силах обеспечить полное воспроизведение всех природных условий наблюдений какого-либо явления. Поэтому для правильной постановки того или иного физического эксперимента необходимо провести правильный **анализ** изучаемого явления, выделить его наиболее существенные связи с остальным миром. Таким образом, изучение явления или объекта всегда проводится в некотором приближении, когда исследователь сознательно или неосознанно отбрасывает некоторые детали воспроизводимого явления. Получив экспериментальные данные, наблюдатель для их объяснения создает на основе имеющихся у него представлений путем **синтеза** рабочую гипотезу, которая может объяснить не только один, но и целую группу подобных экспериментов. Важно отметить, что осмысление результатов эксперимента идет в некотором упрощенном или, как принято говорить, в модельном представлении, т.е. само явление заменяется его некоторым упрощенным представлением или моделью.

Если разработанные представления оказываются справедливыми для достаточно широкого класса явлений, то принято говорить о возникновении физической теории. Отдельные положения этой теории носят названия физических законов, при условии их выполнения для всего класса изученных объектов и явлений.

Важной особенностью физической науки является использование количественных характеристик отдельных свойств физических объектов. Эти характеристики определяются путем **измерений**, и для установления взаимосвязи между различными физическими параметрами применяется количественная логика, т.е. математика. Математика является мощным средством для аналитического представления физических законов и следствий из них. Любая физическая теория должна быть справедливой для всех явлений природы, в противном случае теория носит лишь частный (ограниченный) характер. Если появляются новые экспериментальные факты, которые не объясняются с точки зрения разработанной теории, то это как раз и указывает на ограниченность теории. В этом случае становится очевидной необходимость построения новой теории, в которой новый экспериментальный материал находит свое естественное объяснение (пример – механика Ньютона и теория относительности Эйнштейна). Здесь важно подчеркнуть тот факт, что критерием оценки справедливости того или иного логического построения выступает **эксперимент**. Именно он является своеобразным «верховным судьей», выносящим свой «приговор» относительно какой-либо теории.

Однако цепочечная связь «эксперимент – гипотеза – закон – теория – эксперимент» не означает, что физическая теория играет лишь описательную роль, и ее призвание состоит только в объяснении проведенных экспериментов. Союз теории и эксперимента носит творческий характер: атомная теория строения вещества получила всеобщее признание задолго до того, когда стало возможно непосредственное наблюдение отдельных атомов.

Курс общей физики, который будет читаться два семестра, рассчитан на формирование физического мировоззрения, создания естественно-научной базы для правильного понимания всех явлений окружающего нас мира.

Традиционно рассмотрение общей физики начинается с раздела «Механика».

## **1.2. Кинематика материальной точки**

**Механика** - часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. Механическим движением называется перемещение в пространстве тел или их частей относительно друг друга. Различают три вида механического движения тел: поступательное, вращательное и колебательное.

Механика делится на три раздела: кинематика, динамика и статистика.

**Кинематика** изучает движение тел, не рассматривая причины, вызывающие это движение.

**Динамика** изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

**Статика** изучает законы равновесия системы тел. Законы статики отдельно от законов динамики физика не рассматривает, так как, зная законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.

**Материальной точкой** называется тело, формой и размерами которого можно пренебречь в данной задаче. Перемещение тела рассматривается только относительно какого-либо другого тела или группы тел. Поэтому при изучении движения материальной точки необходимо выбрать **систему отсчета**, т.е. систему координат, связанную с телом, относительно которого рассматривается движение материальной точки.

Линия, описываемая движущейся материальной точкой, называется **траекторией**. Прямой отрезок, соединяющий начальный и конечный пункты движения материальной точки называется **перемещением** (рис.1.1).

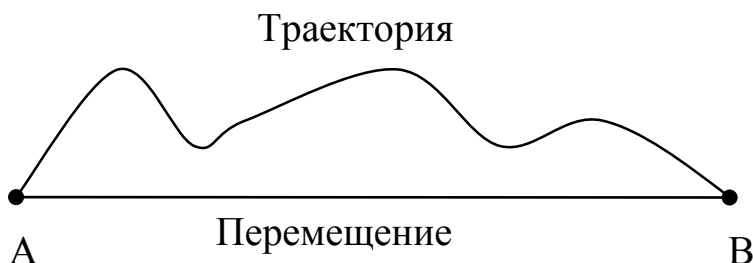


Рис.1.1

Движение называется **прямолинейным**, если траектория – прямая линия, и **криволинейным**, если траектория – кривая линия. При прямолинейном движении перемещение и траектория совпадают.

Отношение пути, пройденного материальной точкой, к промежутку времени, за который этот путь пройден, называется **средней скоростью движения**:

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Средняя скорость скалярная величина и может быть различной на различных участках. Поэтому она недостаточно характеризует движение. Введем понятие мгновенной скорости. **Мгновенная скорость** движения в любой точке траектории есть вектор, направленный по касательной к траектории, а по модулю равный пределу средней скорости при стремлении промежутка времени к нулю:

$$V = |\vec{V}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (1-2)$$

Скорость измеряется в метрах в секунду (м/с).

Движение материальной точки называется **равномерным**, если его скорость не изменяется с течением времени; в противном случае движение называется **неравномерным**. Неравномерное движение характеризуется ускорением.

Отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло, называется **средним ускорением**:

Отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло, называется **средним ускорением**:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \quad (1-3)$$

Среднее ускорение направлено так же, как и приращение скорости, т.е. под углом к траектории в сторону ее вогнутости (рис.1.2).

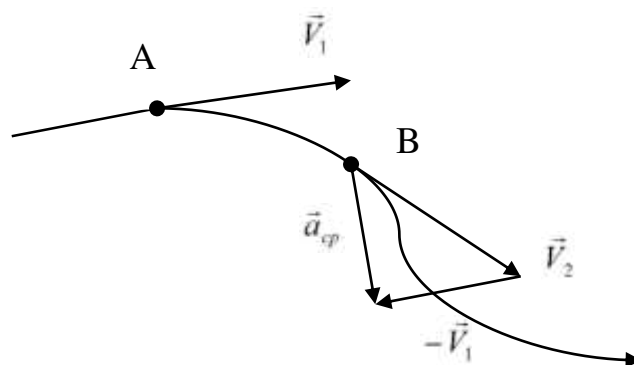


Рис.1.2

**Мгновенное ускорение** движения в любой точке траектории есть вектор, направленный под углом к траектории в сторону ее вогнутости, а по модулю равный пределу среднего ускорения при стремлении промежутка времени к нулю.

$$\vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (1-4)$$

Ускорение выражается в метрах на секунду в квадрате ( $\frac{M}{c^2}$ ).

Вектор ускорения раскладывается на две составляющие, одна из которых направлена по касательной к траектории и называется **касательным** или **тангенциальным** ускорением, другая – направлена по нормали к траектории и называется **нормальным** или **центростремительным** ускорением (рис. 1.3).

$$\vec{a} = \vec{a}_k + \vec{a}_{uc}; \quad a = \sqrt{a_k^2 + a_{uc}^2}.$$

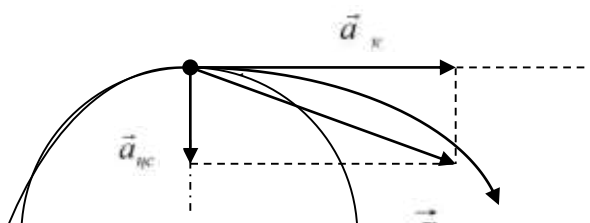
Касательное ускорение изменяет только значение скорости, а центростремительное ускорение – только ее направление.

При прямолинейном движении  $\vec{a}_{uc} = 0$  и  $\vec{a} = \vec{a}_k$ .

Движение, происходящее с постоянным ускорением, называется **равнопеременным (равноускоренным)**, если  $a > 0$ , и **равнозамедленным**, если  $a < 0$ ). В таком случае

$$a = a_{cp} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V - V_0}{t} \Rightarrow V = V_0 + at, \quad (1-5)$$

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S}{t} = \frac{V_0 + V}{2} \Rightarrow S = \frac{V_0 + V}{2} t.$$



$$a = a_{cp} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V - V_0}{t} \Rightarrow V = V_0 + at, \quad (1-5)$$

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S}{t} = \frac{V_0 + V}{2} \Rightarrow S = \frac{V_0 + V}{2} t.$$

Подставляя выражение для V из (1-5), получим

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1-6)$$

Решая совместно (1-5) и (1-6), получим

$$V^2 - V_0^2 = 2aS. \quad (1-7)$$

При равномерном прямолинейном движении  $V = V_0 = const$  и  $a = 0$ . Тогда формула (1-6) примет вид

$$S = Vt \quad (1-8)$$

**Движение материальной точки по окружности.** Пусть материальная точка движется по окружности с постоянной по модулю скоростью. Такое движение называется равномерным движением по окружности. В таком случае  $\vec{a}_x = 0$  и  $\vec{a} = \vec{a}_{uc}$ .

$$a_{uc} = \frac{V^2}{R} \quad (1-9)$$

**Угловой скоростью** называется отношение угла поворота радиуса R к промежутку времени, за который этот поворот произошел:

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (1-10)$$

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду (рад/с).

Умножим обе части (1-10) на R и учтем, что  $R \cdot \Delta \varphi = \Delta S$ . Тогда получим соотношение, связывающее линейную и угловую скорости:

$$V = \omega R. \quad (1-11)$$

Время одного оборота материальной точки по окружности называется **периодом вращения  $T$**  (измеряется в сек.). Количество оборотов материальной точки по окружности в единицу времени называется **частотой вращения  $\nu$** . Измеряется в Гц. Период и частота взаимно - обратные величины:

$$T = \frac{1}{\nu}. \quad (1-12)$$

За один период радиус окружности, связанный с материальной точкой поворачивается на угол  $2\pi$ . Тогда

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

**Средним угловым ускорением** называется отношение изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло:

$$\beta_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (1-13)$$

**Мгновенным угловым ускорением** называется предел среднего углового ускорения при стремлении промежутка времени к нулю:

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1-14)$$

Линейное и угловое ускорения связаны следующим соотношением:

$$a = \beta R. \quad (1-15)$$

Угловая скорость и ускорение векторные величины (рис. 1.4).

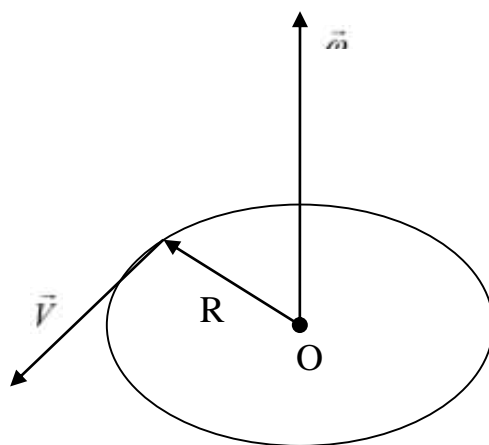


Рис.1.4

При равнопеременном движении материальной точки по окружности линейная скорость и пройденный путь определяются по формулам (1-5) и (1-6). Поделим их на  $R$  и учтем, что  $\omega = \frac{V}{R}$  и  $\beta = \frac{a}{R}$ . Тогда получим

$$\omega = \omega_0 + \beta t, \varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}.$$

## Лекция № 2



**Динамика материальной точки.** Первый закон Ньютона. Инерция, сила. Инерциальные системы отсчета. Второй закон Ньютона. Масса. Третий закон Ньютона. Импульс. Закон сохранения импульса. Силы в природе. Реактивное движение. Уравнение движения тела переменной массы. Работа и мощность. Энергия. Закон сохранения энергии

### 2.1. Первый закон Ньютона. Инерция, сила. Инерциальные системы отсчета.

Кинематика устанавливает законы движения материальной точки, но не указывает причины, вызвавшие это движение, а также факторы, влияющие на вариации кинематических параметров движения. Законы Ньютона, сформулированные более 300 лет назад, явились результатом обобщения большого количества наблюдений и экспериментов. Эти законы имеют фундаментальное значение и в наше время. **Первый закон** утверждает, что *существуют такие системы отсчета, в которых всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия со стороны других тел не заставят его изменить это состояние.* Свойство тела сохранять свое состояние неизменным называют *инерцией*, а системы отсчета, в которых выполняется этот закон, - *инерциальными*. Физический смысл закона состоит в том, что для механики нет различия между состоянием покоя и равномерного прямолинейного движения. Он подчеркивает относительность движения.

Строго говоря, этот закон является чистой абстракцией, но опыт всего человечества за прошедшие три с лишним века подтверждает его справедливость. Причина изменения состояния тела, т.е. появление ускорения связана с понятием **силы**. Сила - количественная мера воздействия на выбранное нами тело со стороны других тел. Вообще говоря, это воздействие может быть достаточно сложным, но в этом случае его можно разложить на так называемые простые воздействия. Поэтому *силой называют количественную меру простого воздействия на тело со стороны других тел, в во время действия которого тело или его части получают ускорения.* Как показывает опыт, величина полученного ускорения зависит от свойств взаимодействующих тел, от расстояния между ними и от их относительных скоростей. Силу принято измерять (в международной системе единиц СИ в **Ньютонах (Н)**).

### 2.2. Второй закон Ньютона. Масса.

Опыт показывает, что одна и та же сила сообщает различным телам разные ускорения. Более массивные тела приобретают меньшие ускорения. Для характеристики способности тел противостоять действию силы используется понятие **массы**. Чем меньше ускорение, которое получает тело, тем больше его масса, т.е. ускорения тел обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} = \frac{m_2}{m_1} . \quad (2-1)$$

Приняв какую-либо массу за эталон, с помощью этого соотношения можно измерять любую массу.

Величина ускорения, которое получает тело определенной массы, зависит от величины силы, - чем больше сила F, тем больше ускорение ( $a \sim F$ ), по-другому  $\vec{a} = k \cdot \vec{F}$ , где k - коэффициент пропорциональности. С учетом (2-1) имеем:

$$\vec{a} = \frac{k\vec{F}}{m} . \quad (2-2 \text{ а})$$

Выбор коэффициента пропорциональности зависит от выбора системы единиц. В настоящее время во всех существующих системах единиц принято считать  $k = 1$ , т.е.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} . \quad (2-2 \text{ б})$$

Если на тело действует несколько сил, то ускорение тела пропорционально их геометрической сумме:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (2-3)$$

Уравнение (2-3) представляет одну из форм записи второго закона Ньютона. В механике это уравнение принято называть *уравнением движения*. Второй закон Ньютона формулируется следующим образом: *ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).*

### 2.3. Третий закон Ньютона.

Понятие силы определено как мера взаимодействия тел, т.е. при рассмотрении движения какого-нибудь тела учитывается только одна сторона этого взаимодействия. Ясно, однако, что все тела надо рассматривать как равноправные, т.е. если второе тело воздействует на первое, то и первое тело воздействует на второе. Третий закон Ньютона устанавливает соотношение между этими воздействиями: *Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и направлены пр одной прямой в разные стороны.*

Пример: книга лежит на столе; она притягивается к Земле и вследствие этого давит на стол. Однако книга не проваливается к центру Земли, т.к. стол со своей стороны действует на книгу с силой равной по величине силе давления книге на стол. Эта сила со стороны стола носит название реакции опоры. К самой книге приложено две силы: сила притяжения и сила реакции опоры. Они равны по величине и противоположно направлены, т.е. их сумма равна нулю, поэтому книга никуда не двигается.

### 2.4. Импульс. Закон сохранения импульса.

Импульсом принято называть величину  $\vec{p} = m\vec{V}$ .

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется *механической системой*. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются *внутренними*. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются *внешними*. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой* (или *изолированной*). Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т.е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  тел, масса и скорость которых соответственно равны  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ . Пусть  $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$  — равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  — равнодействующие внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из  $n$  тел механической системы:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{V}_1) = \vec{F}'_1 + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{V}_2) = \vec{F}'_2 + \vec{F}_2,$$

.....

$$\frac{d}{dt}(m_n\vec{V}_n) = \vec{F}'_n + \vec{F}_n.$$

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \dots + m_n\vec{V}_n) = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Но так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \dots + m_n\vec{V}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (2-4)$$

где  $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{V}_i$  импульс системы. Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i\vec{V}_i) = 0.$$

$$\text{т.е. } \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{V}_i = 0. \quad (2-5)$$

Это выражение и является **законом сохранения импульса: импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.**

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются

законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный характер, т. е. закон сохранения импульса — **фундаментальный закон природы.**

## 2.5. Силы в природе.

Из кинематики известно, что знание величины и направления ускорения позволяет вычислить значения радиуса - вектора материальной точки в любой последующий момент времени, т.е. предсказать положение точки. Законы динамики позволяют сделать это, если известна правая часть уравнений (2-3). Другими словами, нужно уметь определять силы, действующие на тело, положение которого требуется описать. Взаимодействие между макроскопическими телами физика сводит к взаимодействию между элементарными частицами. Таких элементарных частиц в настоящее время известно более сотни. Среди них наиболее популярны электрон, протон и нейтрон. Для характеристики всех частиц вводятся такие понятия как масса покоя, электрический заряд, собственный механический момент (спин), а также **четность, странность, красивость, барионный заряд, цветовой заряд, слабый заряд и т.д.** Установлено, что между элементарными частицами существует четыре фундаментальных взаимодействия: **сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное.** Сравнительные характеристики этих взаимодействий приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

Название взаимодействия	вза-	Относительная интенсивность	Частица, «переносящая» взаимодействие	Характеристика частицы
Сильное		1	$\pi$ -мезоны (глюоны)(8 типов)	$m \sim 250 m_{\text{элект}}$ <i>разнообразные</i>
Электромагнитное		$10^{-2}$	фотон	$E = h\nu$
Слабое		$10^{-13}$	W - частицы Z - частицы	$E \sim 10^2 c^2 m_{\text{протон}}$ <i>гипотетичны</i>
Гравитационное		$10^{-40}$	гравитон	<i>гипотетичен</i>

Из таблицы 2.1 видно, что гравитационные силы являются слабейшими из всех фундаментальных взаимодействий, однако они обладают свойствами аддитивности и достигают значительных величин в космическом масштабе (притяжение Луны, строение Солнечной системы и т.п.). Величина гравитационной силы притяжения двух точечных масс  $m_1$  и  $m_2$  определена Ньютоном и известна как **закон всемирного тяготения**:

$$F_{\text{грав}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2-6)$$

где  $r$  - расстояние между массами, а  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{ м}^2/\text{кг}^2$  - гравитационная постоянная. Чтобы подчеркнуть, что сила - вектор, закон записывают несколько иначе, рассматривая силу, действующую на  $m_2$  со стороны  $m_1$ :

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (2-7)$$

откуда видно направление силы (она направлена вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие массы). Модуль силы притяжения  $P$  тела массы  $m$  к Земле, которую называют силой тяжести можно записать так:

$$P = G \frac{M_3}{R_3^2} m = gm, \quad (2-8)$$

где величина  $g = G \frac{M_3}{R_3^2}$  - ускорение свободного падения,  $M_3$ - масса Земли, а  $R_3$  - радиус Земли. Из

выражения  $g$  видно, что оно не зависит от массы выбранного тела и поэтому одинаково для всех тел в определенной точке земной поверхности.

Кроме гравитационных сил в механике рассматриваются упругие силы и силы трения, которые обусловлены электрическими силами. **Силы упругости** обусловлены деформациями. Деформации связаны с изменением взаимного расположения молекул, образующих рассматриваемое тело, причем силы возникают лишь тогда, когда деформации носят упругий характер. В этом случае справедлив закон Гука так, что

$$F_{\text{упр}} = -k\xi,$$

где  $\xi$  обозначает величину упругой деформации, а  $k$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств деформируемого тела и вида деформации. Частным примером проявления упругих сил служат силы реакции опор, направление которых считается всегда нормальным (перпендикулярным) к деформируемой поверхности. Другим примером действия упругих сил могут служить так называемые силы связи (силы натяжения).

**Силы трения** препятствуют скольжению соприкасающихся тел друг относительно друга. Силы трения зависят от относительных скоростей тел. Силы трения могут быть разной природы, но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

Различают внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение. **Внешним трением** называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, говорят о **трении покоя**, если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения говорят о **трении скольжения, качения** или **верчения**.

**Внутренним трением** называется трение между частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от внешнего трения здесь отсутствует трение покоя. Если тела скользят относительно друг друга и разделены прослойкой вязкой жидкости (смазки), то трение происходит в слое смазки. В таком случае говорят о **гидродинамическом трении** (слой смазки достаточно толстый) и **граничном трении** (толщина смазочной прослойки  $\sim 0,1$  мкм и меньше).

Обсудим некоторые закономерности внешнего трения. Это трение обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей; в случае же очень гладких поверхностей трение обусловлено силами межмолекулярного притяжения.

Рассмотрим лежащее на плоскости тело (рис.2.1), к которому приложена горизонтальная сила  $F$ .

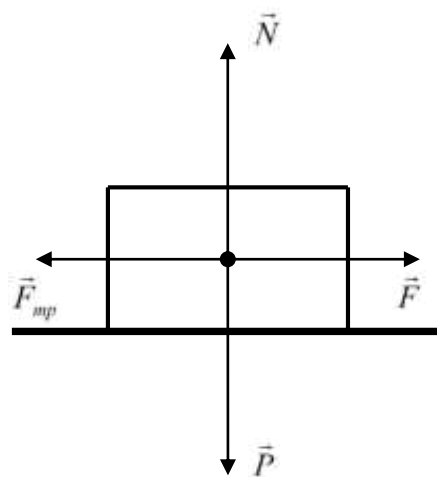


Рис.2.1

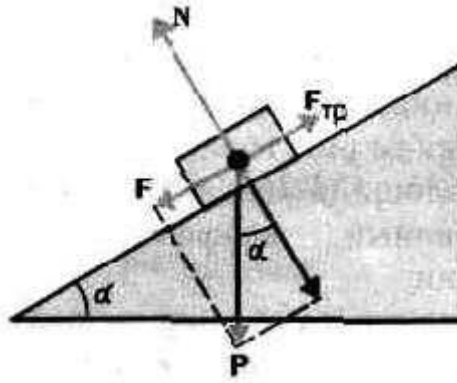


Рис.2.2

Тело придет в движение лишь тогда, когда приложенная сила  $\vec{F}$  будет больше силы трения  $\vec{F}_{тр}$ . Французские физики *Г. Амонтон* (1663—1705) и *Ш. Кулон* (1736—1806) опытным путем установили следующий закон: **сила трения скольжения  $F_{тр}$  пропорциональна силе  $N$  нормального давления, с которой одно тело действует на другое:**

$$F_{тр} = fN,$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

Найдем значение коэффициента трения. Если тело находится на наклонной плоскости с углом наклона (рис.2.2), то оно приходит в движение только когда тангенциальная составляющая  $F$  силы тяжести  $\vec{P}$  больше силы трения  $\vec{F}_{тр}$ . Следовательно, в предельном случае (начало скольжения тела)

$$F = F_{тр}$$

$$\text{или } P \sin \alpha_0 = fN = fP \cos \alpha_0, \text{ откуда } f = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла  $\alpha_0$ , при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Для гладких поверхностей определенную роль начинает играть межмолекулярное притяжение. Поэтому Б. В. Дерягиным (р. 1902) предложен **закон трения скольжения**

$$F_{тр} = f_{ист} (N + Sp_0),$$

где  $p_0$  — добавочное давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, которые быстро уменьшаются с увеличением расстояния между частицами;  $S$  — площадь контакта между телами;  $f_{ист}$  — истинный коэффициент трения скольжения.

Трение играет большую роль в природе и технике. Благодаря трению движется транспорт, удерживается забитый в стену гвоздь и т. д.

В некоторых случаях силы трения оказывают вредное действие, и поэтому их надо уменьшать. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку (сила трения уменьшается примерно в 10 раз), которая заполняет неровности между этими поверхностями и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят друг относительно друга отдельные слои жидкости. Таким образом, внешнее трение твердых тел заменяется значительно меньшим внутренним трением жидкости.

Радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения (шариковые и роликовые подшипники и т. д.). **Сила трения качения** определяется по закону Кулона:

$$F_{тр} = f_k N / r,$$

где  $r$  — радиус катящегося тела;  $f_k$  — коэффициент трения качения.

## 2.6. Реактивное движение. Уравнение движения тела переменной массы.

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы, например масса ракеты уменьшается за счет истечения газов, образующихся при сгорании топлива, и т. п.

Выведем уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты. Если в момент времени  $t$  масса ракеты  $m$ , а ее скорость  $v$ , то по истечении времени  $dt$  ее масса уменьшится на  $dm$  и станет равной  $m-dm$ , а скорость станет равной  $\vec{V} + d\vec{V}$ . Изменение импульса системы за отрезок времени  $dt$

$$d\vec{p} = [(m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) + dm(\vec{V} + \vec{u})] - m\vec{V}$$

где  $\vec{u}$  — скорость истечения газов относительно ракеты. Тогда

$$d\vec{p} = m d\vec{V} + \vec{u} dm$$

( $dm d\vec{V}$  — малый высшего порядка малости по сравнению с остальными).

Если на систему действуют внешние силы, то  $d\vec{p} = \vec{F} dt$ , поэтому

$$\vec{F} dt = m d\vec{V} + \vec{u} dm,$$

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{dm}{dt}, \quad (2-9)$$

где  $\vec{u} \frac{dm}{dt} = \vec{F}_p$  - реактивная сила.

Если  $\vec{u}$  противоположен  $\vec{V}$ , то ракета ускоряется, а если совпадает с  $\vec{V}$ , то тормозится.

Таким образом, мы получили **уравнение движения тела переменной массы**

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p. \quad (2-10)$$

Это уравнение впервые было выведено И. В. Мещерским (1859—1935).

Идея применения реактивной силы для создания летательных аппаратов высказывалась в 1881 г. Н. И. Кибальчичем (1854—1881). К. Э. Циолковский (1857—1935) в 1903 г. опубликовал статью, где предложил теорию движения ракеты и основы теории жидкостного реактивного двигателя. Поэтому его считают основателем отечественной космонавтики.

Применим уравнение (2-10) к движению ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая  $\vec{F} = 0$  и считая, что скорость выбрасываемых газов относительно ракеты постоянна (ракета движется прямолинейно), получим

$$m \frac{dV}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \Rightarrow V = -u \int \frac{dm}{m} = -u \ln m + C.$$

Значение постоянной интегрирования  $C$  определим из начальных условий. Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее стартовая масса  $m_0$ ,  $C = u \ln m_0$ . Следовательно,

$$V = u \ln \frac{m}{m_0}. \quad (2-11)$$

(2-11) называется *формулой Циолковского*. Из этой формулы следует, что: 1) чем больше конечная масса ракеты  $m$ , тем больше должна быть стартовая масса ракеты; 2) чем больше скорость истечения  $u$  газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

## 2.7. Работа и мощность

Пусть тело под действием постоянной силы совершило перемещение  $s$  (Рис.2.3). Перемещение тела обусловлено касательной составляющей силы  $F \cos \alpha$ , которая называется движущей силой. Нормальная составляющая силы  $F \sin \alpha$  не вызывает перемещение тела по пути  $s$ .

*Произведение движущей силы на перемещение называется работой:*

$$A = (F \cos \alpha)S = FS \cos \alpha. \quad (2-12)$$

При  $0 < \alpha < 90^\circ$  работа положительна и сила вызывает перемещение тела;

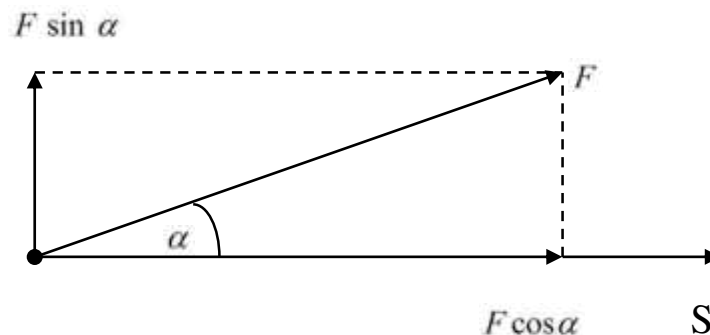


Рис.2.1

при  $90 < \alpha < 180^\circ$  работа отрицательна и сила препятствует движению тела; при  $\alpha = 90^\circ$  сила не совершает работы по перемещению; при  $\alpha = 90^\circ$   $A = FS$ .

В случае переменной силы и криволинейного пути формулой (2-12) пользоваться нельзя. В этом случае, рассматривая элементарное перемещение  $d\vec{r}$ , силу  $\vec{F}$  можно считать постоянной и движение прямолинейным. Элементарной работой силы  $\vec{F}$  на перемещение  $d\vec{r}$  называется величина

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = FS \cos \alpha dS = F_s dS,$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ ;  $F_s$  - проекция вектора  $\vec{F}$  на  $d\vec{r}$  (рис.2.1).

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 определяется интегрированием

$$A = \int_1^2 F dS \cos \alpha = \int_1^2 F_s dS.$$

Работа является скалярной величиной и измеряется в Джоулях.

$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н при перемещении тела на расстояние 1 м в направлении действия силы.

Для того, чтобы знать как быстро совершается работа, вводят понятие *мощности*:



$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Если тело под действием постоянной силы движется с постоянной скоростью, то мощность можно выразить в виде

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{V}.$$

Мощность тоже скалярная величина. Единица мощности – ватт. 1Вт – мощность, при которой за 1 с совершается работа, равная 1 Дж.  $1Вт = \frac{1Дж}{1с}$ .

## 2.8. Энергия. Закон сохранения энергии

Энергия характеризует состояние системы, способность системы к совершению работы при переходе из одного состояния в другое.

Изменение энергии выражается работой, которую может совершить система, переходя из одного состояния в другое, т.е.:

$$A = W_0 - W_n,$$

где  $W_0$  и  $W_n$  - энергии системы в исходном и конечном состояниях.

**Кинетическая энергия** механической системы – это энергия механического движения этой системы. Определим эту энергию.

Пусть тело под действием силы  $\vec{F}$  тело изменило свою скорость от 0 до  $\vec{V}$ . Тогда

$$dA = dW_{кин}.$$

Согласно второго закона Ньютона  $\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$ . Умножая обе части этого равенства на  $d\vec{r}$ , получим

$$\vec{F}d\vec{r} = m \frac{d\vec{V}}{dt} d\vec{r} = dA.$$

Если учесть, что  $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , то  $dA = m\vec{V}d\vec{V} = mVdV = dW_{кин} \Rightarrow$

$$W_{кин} = \int_0^V mVdV = \frac{mV^2}{2}.$$

Кинетическая энергия зависит только от скорости и массы тела.

Потенциальная энергия – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Силы, работа которых не зависит от формы пути, называются **потенциальными**, а поле этих сил – **потенциальным**. Тело, находясь в потенциальном поле, обладает **потенциальной энергией**. Работа, совершенная в этом поле равна приращению потенциальной энергии:

$$dA = -dW_{кин}.$$

$$\vec{F}d\vec{r} = -dW_{кин} \Rightarrow W_{кин} = -\int \vec{F}d\vec{r} + C.$$

Потенциальная энергия тела массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$  над поверхностью Земли, равна

$$W_{кин} = mgh.$$

Определим потенциальную энергию упругодеформированного тела. Элементарная работа при бесконечно малой деформации

$$dA = F_x dx = kx dx \Rightarrow A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Таким образом,  $W_{кин.упр} = \frac{kx^2}{2}.$

Полная энергия системы складывается из всех присущих системе видов энергии.

**Закон сохранения и превращения энергии в изолированной системе:**

Полная энергия изолированной системы остается постоянной. При этом, будучи несоздаваемой и неуничтожаемой, энергия может превращаться из одних видов энергии в другие.

**Закон сохранения и превращения энергии в неизолированной системе:**

Изменение энергии неизолированной системы равно работе, совершаемой системой:

$$\Delta W = -A.$$

Если работа совершается внутренними силами самой системы, то работа положительна и энергия системы убывает. Если же работа совершается внешними силами над системой, то работа отрицательна и энергия системы возрастает.

Закон сохранения и превращения энергии раскрывает физический смысл понятий энергии и работы. Таким образом, энергия является количественной и качественной характеристикой движения материи, а работа – количественная характеристика превращения одних форм движения материи в другие.

### Лекция № 3

**Динамика вращательного движения.** Понятие абсолютно твердого тела. Поступательное и вращательное движение тела. Центр масс. Момент силы. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, его момент инерции и кинетическая энергия. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса. Второй закон динамики для вращательного движения.

#### 3.1. Понятие абсолютно твердого тела. Поступательное и вращательное движение тела. Центр масс.

**Твердое тело** можно рассматривать как систему материальных точек, жестко скрепленных друг с другом. Твердое тело не поддающиеся деформации называется **абсолютно твердым**. Отсутствие такого закрепления существенно затруднило бы описание движения всего конгломерата точек. Для полного описания движения одной точки необходимо знать ее три координаты, поэтому для  $N$  точек число необходимых координат, а следовательно, и число уравнений для их определения составило бы  $3N$ . Так как число  $N$  может быть как угодно большим, то возможности строгого решения системы из  $3N$  уравнений весьма ограничены. Кроме того характер движения тела как целого может быть различным. Обычно различают **поступательное, вращательное и плоское движения**. При поступательном движении все точки тела движутся по параллельным траекториям, так что для описания движения тела в целом достаточно знать

закон движения одной точки. В частности, такой точкой может служить **центр масс** твердого тела. В этом случае задача описания движения тела решается с помощью теоремы о движении центра масс. При вращательном движении все точки тела описывают концентрические окружности, центры которых лежат на одной оси. Скорости точек на любой из окружностей связаны с радиусами этих окружностей и угловой скоростью вращения:  $\vec{V}_i = [\vec{\omega} \vec{r}_i]$ . Так как твердое тело при вращении сохраняет свою форму, радиусы вращения остаются постоянными и

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}_i \right] = [\vec{\beta} \vec{r}_i]. \quad (3-1)$$

### 3.2. Момент силы.

Для описания динамики вращательного движения твердого тела необходимо ввести понятие момента силы. При этом надо различать понятия момента силы относительно точки и относительно оси. Если сила  $\vec{F}$  приложена к материальной точке А (рис.3.1), то **моментом силы  $\vec{M}$  относительно произвольной точки О** называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки О к точке А, и вектора силы:

$$\vec{M} = [\vec{F} \vec{r}]. \quad (3-2)$$

Модуль векторного произведения  $|\vec{M}| = Fr \sin \alpha = Fl$ , а направление вектора момента силы определяется правилом правого буравчика: направление первого вектора  $\vec{r}$  по кратчайшему пути вращается к направлению вектора силы  $\vec{F}$ , а движение оси буравчика при этом вращении показывает направление вектора  $\vec{M}$ .

направлению вектора силы  $\vec{F}$ , а движение оси буравчика при этом вращении показывает направление вектора  $\vec{M}$ .

**Моментом силы относительно произвольной оси z** называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$  и составляющей силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке А (рис.3.2):

$$\vec{M}_z = [\vec{F} \vec{r}]_z \quad (3-2)$$

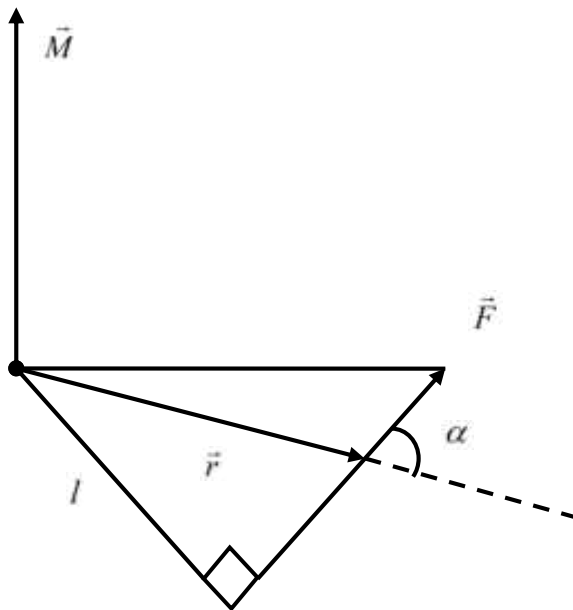


Рис.3.1

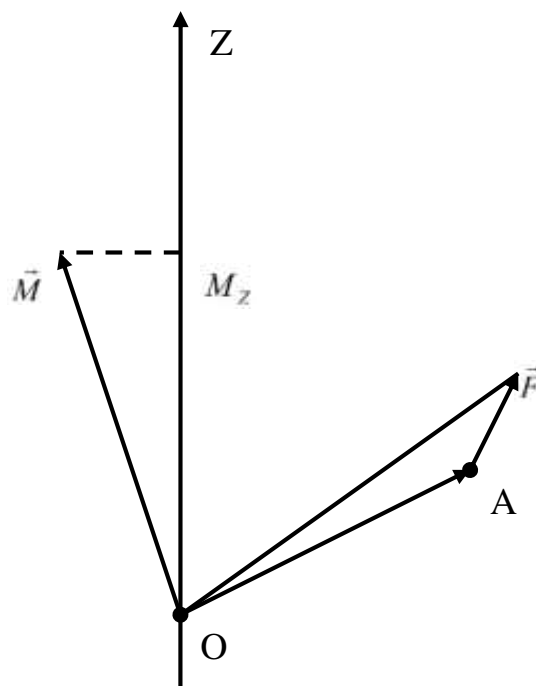


Рис.3.2

### 3.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, его момент инерции и кинетическая энергия.

*Моментом инерции* системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J = \int r^2 dm,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина  $r$  в этом случае есть функция положения точки с координатами  $x, y, z$ .

Если ось, относительно которой вычисляется момент инерции, проходит через центр симметрии тела, то вычисление такого интеграла представляет сравнительно несложную задачу, но в общем случае задачу решить трудно. Для упрощения вычислений полезной оказывается теорема о параллельном переносе осей инерции (*теорема Гюйгенса - Штейнера*), формулировка которой гласит, что момент инерции относительно любой оси равен сумме момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния  $d$  между осями, т.е.

$$J_{\text{произ}} = J + md^2.$$

Моменты инерции некоторых тел:

Форма тела	Расположение оси	Величина момента инерции
Обруч		$mR^2$
Цилиндр		$\frac{1}{2}mR^2$
Шар		$\frac{2}{5}mR^2$

**Примечание:**  $m$  - масса тела,  $R$  - его радиус

Вычислим кинетическую энергию вращающегося тела. Кинетическая энергия одной частицы вращающегося тела массой  $\Delta m_i$ , движущейся со скоростью  $V_i$  по окружности радиусом  $r_i$ , равна

$$\Delta W_i = \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\Delta J_i \omega^2}{2},$$

где  $\Delta J_i$  - момент инерции частицы,  $\omega$  - угловая скорость вращения тела. Тогда энергия вращающегося тела

$$W_{\text{к.ер.}} = \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n \Delta J_i = \frac{J \omega^2}{2}.$$

### 3.4. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса. Второй закон динамики для вращательного движения.

**Моментом импульса (количества движения)** материальной точки  $A$  **относительно неподвижной точки**  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}m\vec{V}].$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ ;  $\vec{p} = m\vec{V}$  — импульс материальной точки (рис.3.3); Модуль вектора момента импульса

$$L = rp \sin \alpha = pl$$

**Моментом импульса относительно неподвижной оси**  $z$  называется скалярная величина  $L_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси. Значение момента импульса  $L_z$  не зависит от положения точки  $O$  на оси  $z$ .

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$  каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса  $r_i$  с некоторой скоростью  $\vec{V}_i$ . Скорость и импульс перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора  $m_i\vec{V}_i$ . Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы

$$L_{iz} = m_i V_i r_i$$

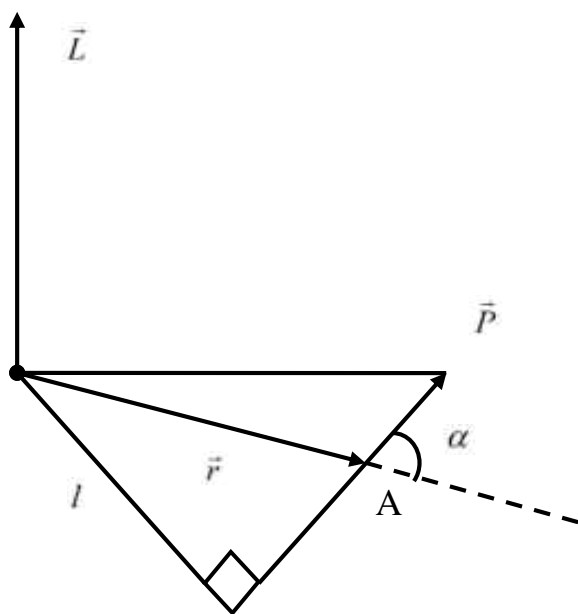


Рис.3.3

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ ;  $\vec{p} = m\vec{V}$  — импульс материальной точки (рис.3.3); Модуль вектора момента импульса

$$L = rp \sin \alpha = pl$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

**Момент импульса твердого тела** относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i V_i r_i$$

Учитывая, что  $V_i = \omega r_i$ , получим

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega, \text{ т. е.}$$

$$L_z = J_z \omega$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Продифференцируем последнее уравнение по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \beta = M_z, \text{ т. е.}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Это выражение — является **основным уравнением (законом) динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси.

Это уравнение можно выразить следующим образом:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \beta.$$

Если ось z совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то можно написать:

$$\vec{M} = \vec{J}\vec{\beta},$$

т.е. момент силы, приложенной к телу, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение.

В замкнутой системе момент внешних сил  $\vec{M} = 0$  и  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$ . Данное выражение

представляет собой **закон сохранения момента импульса**: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

#### Лекция № 4

**Механика жидкостей и газов.** Описание движения жидкости и газа. Вязкость жидкостей и газов. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли и выводы из него.

##### 4.1. Описание движения жидкости и газа. Вязкость жидкостей и газов.

В отличие от материальных точек, когда для описания их движения задавались координаты этих точек, а затем определялись их скорости и ускорения, для описания движения жидкости применяется несколько иной метод. Развитие этого метода связано с практическими успехами гидро- и аэродинамики. Аналитические формулы, описывающие движения тел в жидкости, очень громоздки, к тому же они содержат большое количество параметров. На практике более эффективным оказался метод моделирования, когда уменьшенные модели самолетов и судов в неподвижном состоянии помещались

в аэродинамические трубы или испытательные бассейны. При этом измерялись скорости и ускорения потока жидкости или газа в различных точках испытываемой модели. При таком методе описания движения жидкости или газа измеряется не скорость (ускорение) различных частиц, а скорости и ускорения в некоторых фиксированных точках, через которые проходят отдельные частицы (или отдельные выделенные малые объемы). Если в любой такой выбранной точке значения скорости (или ускорения) не меняются с течением времени, то такое движение называется стационарным.

Обычно различают два типа движения жидкости: ламинарное и турбулентное. При ламинарном течении жидкость перемещается слоями, причем один слой скользит по другому, но слои не перемешиваются между собой, в турбулентном же движении наиболее характерным признаком является наличие вихрей.

Характер движения на первый взгляд зависит от величины скорости жидкости, но в действительности важную роль играют и другие факторы, в частности, вязкость или внутреннее трение. Это свойство органически присуще почти всем реальным жидкостям и является следствием взаимодействия молекул между собой. При ламинарном движении слои жидкости с трением скользят друг по другу. Чем сильнее силы сцепления между частицами жидкости, тем больше различие скоростей двух соседних слоев. Иначе говоря, степень быстроты изменения скорости слоев жидкости при перемещении перпендикулярно ее движению характеризует величину силы трения между слоями. Если же в жидкости движется твердое тело, то слой жидкости, непосредственно к нему прилегающий, движется с ним вместе, следующий слой скользит по первому слою с меньшей скоростью, следующий за вторым слоем имеет еще меньшую скорость и т.д. Слой же, граничащий со стенками, ограничивающими поток жидкости, прилипает к стенкам так, что его скорость равна нулю. Величина силы трения при движении тела в жидкости установлена еще Ньютоном, который нашел ее аналитическое выражение:

$$\mathbf{F} = \eta \frac{dv}{dz} \mathbf{S}, \quad (4-1)$$

где первый множитель характеризует вязкость жидкости (коэффициент вязкости), второй отражает быстроту изменения скорости в направлении, перпендикулярном потоку (производная по направлению), и третий представляет площадь соприкосновения жидкости и тела, т.е. зависит от формы тела. Очевидно, что величина силы трения для каждого тела имеет свою определенную величину, но конкретный учет всех особенностей тела связан с серьезными математическими трудностями. Наиболее простой вид силы трения получается при движении шара:

$$\mathbf{F}_{тр} = 6\pi\eta r v, \quad (4-2)$$

где  $r$  - радиус шара,  $v$  - его скорость,  $\eta$  - коэффициент вязкости. Это выражение впервые получено Стоксом и известно как **формула Стокса**.

Степень влияния вязкости на характер движения жидкости можно оценить, если сравнить величину кинетической энергии движущегося тела с работой сил вязкого трения. Эта оценка производится весьма приближенно, с точностью до численных коэффициентов. Для обтекания вязкой жидкостью

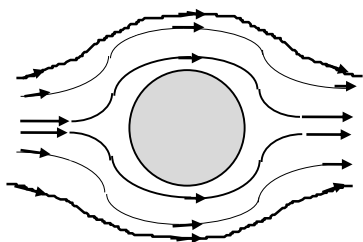


Рис.4.1

неподвижного шара (рис.4.1) величина кинетической энергии жидкости оценивается в предположении, что объем жидкости, где происходит возмущение потока, по своей величине примерно равен объему шара, так что величина кинетической энергии этого объема примерно равна:

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2} \sim \rho_{ж} l^3 v^2, \quad (4-3)$$



где  $l$  - линейные размеры шара. Для оценки величины работы силы вязкого трения предположим, что площадь поверхности шара  $S \sim l^2$ , и изменение скорости от значения  $v$  до нуля также происходит на расстоянии  $l$ , т.е.  $\Delta v \sim v$ ,  $\Delta z \sim l$  и

$$F_{\text{тр}} \sim \eta \frac{v}{l} l^2 \sim \eta v l, \quad (4-4)$$

откуда следует, что работа силы трения  $A_{\text{тр}}$  равна:

$$A_{\text{тр}} \sim F_{\text{тр}} l \sim \eta v l^2. \quad (4-5)$$

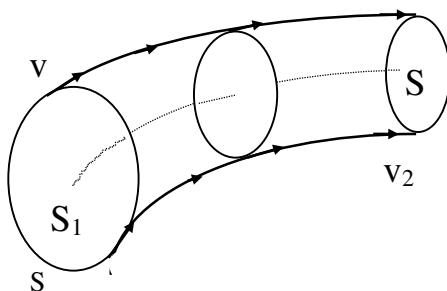
Сравнивая (4-3) и (4-5), нетрудно получить:

$$\frac{E_{\text{кин}}}{A_{\text{тр}}} \sim \frac{\rho_{\text{ж}} l^3 v^2}{\eta v l^2} \sim \frac{\rho_{\text{ж}} v l}{\eta} = \text{Re}. \quad (4-6)$$

Подобные рассуждения можно провести для тела любой формы, поэтому безразмерная величина  $\text{Re}$  получившая название числа Рейнольдса, позволяет оценить влияние вязкости жидкости на характер ее движения. Если число Рейнольдса велико, то трением в жидкости можно пренебречь и считать жидкость **идеальной**. Хотя введение числа Рейнольдса проведено в некотором приближении, тем не менее, по его величине можно судить не только о роли трения, но и о характере движения жидкости. Так, например, при  $\text{Re} \sim 1000$  движение жидкости в трубах остается ламинарным, но при  $\text{Re} \sim 2200$  оно становится турбулентным. При малых значениях чисел Рейнольдса роль вязкости жидкости достаточно велика и вихревого движения возникнуть не может.

#### 4.2. Уравнение неразрывности.

Как уже отмечалось, при стационарном движении жидкости (или газа) скорость ее частиц не изменяется с течением времени. Для наглядности вводится понятие **линии тока**, которые представляют собой линии, касательные к которым в любой точке совпадают по направлению с вектором скорости в этой же точке. В случае стационарного движения линии тока неподвижны и совпадают с траекториями частиц жидкости. Кроме того, для облегчения изучения движения жидкости вводится понятие **трубки тока**. Эти трубки образуются так, что линия тока, проходящая через какую-либо точку, лежащую на поверхности трубки тока, целиком лежит на этой поверхности (рис.4.2).



При стационарном течении жидкости стенки трубки тока неподвижны. Жидкость, вошедшая в трубку, в дальнейшем движется все время внутри ее. Поэтому выделенную трубку можно рассматривать независимо от остальной жидкости.

Предположим, что выделенная трубка тока настолько тонка, что в каждой точке ее поперечного сечения величину скорости частиц жидкости можно

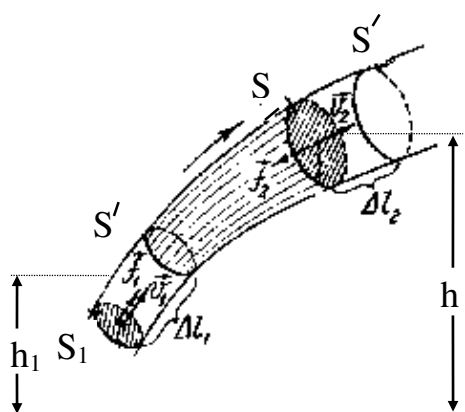
Рис. 4.2

было бы считать одинаковой. Пусть в сечении  $S_1$  (рис.4.2) скорость частиц жидкости равна  $v_1$ . За промежуток времени  $\Delta t$  через сечение пройдет объем жидкости  $V_1 = v_1 \Delta t S_1$ . Если плотность жидкости в этом сечении равна  $\rho_1$ , то через сечение проходит масса  $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 v_1 \Delta t S_1$ . Аналогично через сечение  $S_2$  за время  $\Delta t$  проходит масса  $m_2 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2$ . При стационарном движении количество вещества, проходящее через сечения  $S_1$  и  $S_2$ , должно быть одинаковым, т.е.  $m_1 = m_2$ . Поэтому  $\rho_1 v_1 \Delta t S_1 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2$ . При несжимаемости жидкости  $\rho_1 = \rho_2$ , откуда следует, что  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ , или в общем виде

$$vS = \text{const}. \quad (4-7)$$

Выражение (4-7) носит название **уравнения неразрывности**. Примером проявления свойств жидкости, описываемых этим уравнением, может служить течение рек: в узких местах скорость течения возрастает и, наоборот, в широких местах скорость течения становится меньше.

### 4.3. Уравнение Бернулли и выводы из него



Выделим в трубке тока (рис.4.3) элемент, ограниченный плоскими сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . Пусть скорости движения жидкости в этих сечениях равны  $v_1$  и  $v_2$ , а давления  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. За время  $\Delta t$  выделенный элемент перемещается в направлении, указанном стрелкой, так, что сечения  $S_1$  и  $S_2$  смещаются на расстояния  $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$  и  $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$  соответственно, занимая новые положения  $S_1'$  и  $S_2'$ . При перемещении изменяется кинетическая и потенциальная энергии выделенного элемента. По закону сохранения энергии величина этого изменения определяется

Рис.4.3

работой сил давления  $f_1 = p_1 S_1$  и  $f_2 = p_2 S_2$ , которые действуют на плоскости  $S_1$  и  $S_2$ . Как видно из рис., часть элемента между сечениями  $S_1'$  и  $S_2$  остается неподвижной так, что изменение положения выделенного элемента сводится к перемещению отрезка, ограниченного сечениями  $S_1$  и  $S_1'$  в новое положение между плоскостями  $S_2$  и  $S_2'$ . Пусть плотность жидкости в сечении  $S_1$  равна  $\rho_1$ , а в сечении  $S_2$  -  $\rho_2$ . Масса отрезка между сечениями  $S_1$  и  $S_1'$  равна  $m_1 = \rho_1 v_1 S_1 \Delta t$ , тогда как масса между  $S_2$  и  $S_2'$  равна  $m_2 = \rho_2 v_2 S_2 \Delta t$ ; поэтому кинетическая и потенциальная энергии массы  $m_1$  равны:

$$E_{\text{кин}}^{(1)} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{\rho_1 S_1 v_1^3 \Delta t}{2}; \quad E_{\text{пот}}^{(1)} = m_1 g h_1 = \rho_1 v_1 S_1 \Delta t g h_1. \quad (4-8)$$

Аналогично для массы  $m_2$ :

$$E_{\text{кин}}^{(2)} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{\rho_2 S_2 v_2^3 \Delta t}{2}; \quad E_{\text{пот}}^{(2)} = m_2 g h_2 = \rho_2 v_2 S_2 \Delta t g h_2; \quad (4-9)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  - высоты центров тяжести первого и второго элементов относительно выбранного уровня отсчета потенциальной энергии.

На основании закона сохранения механической энергии можно записать:

$$E_{\text{кин}}^{(2)} + E_{\text{пот}}^{(2)} - E_{\text{кин}}^{(1)} - E_{\text{пот}}^{(1)} = f_1 \Delta l_1 - f_2 \Delta l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (4-10)$$

Работа силы  $f_2$  взята со знаком минус потому, что направление силы и направление перемещения противоположны друг другу.

Подставляя в уравнение (4-10) значения кинетических и потенциальных энергий (4-8) и (4-9), получаем:

$$\frac{\rho_2 S_2 v_2^3 \Delta t}{2} + \rho_2 v_2 S_2 \Delta t g h_2 - \frac{\rho_1 S_1 v_1^3 \Delta t}{2} - \rho_1 v_1 S_1 \Delta t g h_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t, \quad (4-11)$$

откуда после сокращения на величину  $\Delta t$  (с учетом того, что  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ ) следует:

$$\frac{\rho_2 v_2^2}{2} + \rho_2 g h_2 + p_2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{2} + \rho_1 g h_1 + p_1, \quad (4-12)$$

или в общем виде:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \quad (4-13)$$

Выражения (4-12) и (4-13) представляют различные формы записи **уравнения Бернулли**, имеющего ряд важных следствий практического характера. Если движение жидкости или газа происходит на постоянной высоте, то уравнение (4-13) упрощается:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \text{ или } \frac{\rho_2 v_2^2}{2} + p_2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{2} + p_1. \quad (4-14)$$

Из этого уравнения следует, что давление внутри трубки тока зависит от скорости: там, где скорость меньше, давление больше, при увеличении скорости потока давление в нем уменьшается. Это утверждение называют принципом Бернулли.

Приложения уравнения Бернулли: подъемной силы крыла самолета, гидротрубина, гидротаран, водоструйный насос, аэрация почвы и т. д.

## Лекция №5

**Основные характеристики и закономерности колебаний.** Гармонические колебания. Сложение гармонических колебаний. Сложение перпендикулярных колебаний. Дифференциальное уравнение колебаний. Свободные колебания. Затухающие колебания. Энергетические соотношения в колебательных процессах. Колебания математического и физического маятников

### 5.1. Гармонические колебания.

**Колебаниями** называются такие изменения какой - либо физической величины, когда эта величина через определенные промежутки времени принимает одни и те же значения. Любое колебание может быть охарактеризовано такими параметрами:

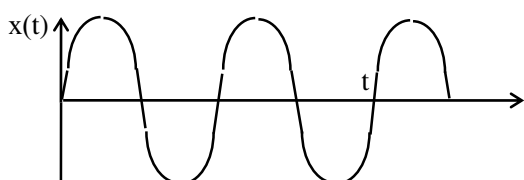
1. амплитудой колебаний, т.е. величиной наибольшего отклонения от положения равновесия;

2. периодом колебаний, т.е. временем одного полного колебания; величина, обратная периоду называется частотой;

3. законом изменения колеблющейся величины со временем; гармоническое колебание происходит по закону синуса или косинуса;

4. фазой колебаний, характеризующей состояние колебаний в любой момент времени.

Гармоническое колебание может быть представлено в трех видах: графическом, аналитическом и векторным.



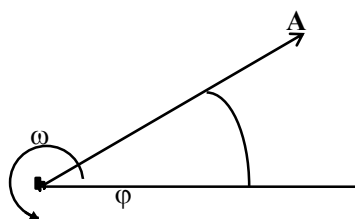
Графическое представление колебаний изображено на рис.5.1. Аналитическое представление гармонических колебаний не менее известно:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (5-1)$$

где  $\varphi$  - начальная фаза колебаний, а весь аргумент синуса ( $\omega t + \varphi$ ) - фаза колебания,

**Рис.5.1**

$A$  - амплитуда колебаний, а  $\omega = 2\pi/T$  - угловая частота колебаний ( $T$  - период колебаний).



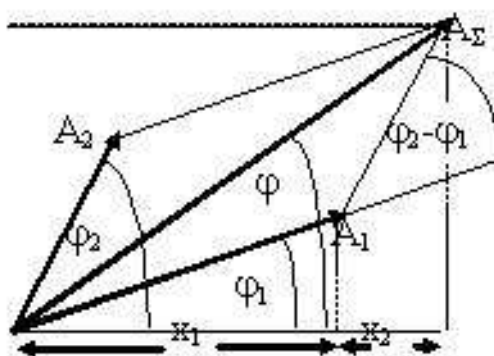
Наконец, в векторном представлении колебание представляется в виде вектора, длина которого пропорциональна амплитуде колебаний (рис.5.2). Сам вектор вращается в плоскости чертежа с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через начало вектора колебания. Первоначальное отклонение вектора от горизонтали изображает начальную фазу колебания.

**Рис.5.2**

Этот вид представления колебаний особенно удобен для сложения колебаний, когда результирующее колебание находится как векторная сумма всех слагаемых.

### 5.2. Сложение гармонических колебаний.

Наиболее простым примером является сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты, каждое из которых можно представить в аналитическом виде  $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  и  $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$  и векторном виде (рис.5.3).



**Рис.5.3**

Поскольку оба слагаемых вращаются с одинаковой частотой, суммарный вектор также вращается с этой же частотой, т.е. результатом суммы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  будет гармоническое колебание той же частоты, амплитуда которого находится как диагональ параллелограмма  $A_\Sigma$ , построенного на векторах  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (5-2)$$

разность  $\varphi_2 - \varphi_1$  определяется из рис.5.3. Величина начальной фазы  $\varphi$  результирующего колебания определяется из величины тангенса этого угла:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_{\Sigma y}}{A_{\Sigma x}},$$

где  $A_{\Sigma y}$  и  $A_{\Sigma x}$  представляют собой проекции амплитуды суммарного колебания на оси Y и X соответственно. Как следует из рисунка, значение  $A_{\Sigma x}$  равно сумме проекций на ось X каждого из слагаемых колебаний:

$$A_{\Sigma x} = X_2 + X_1 = A_2 \cos \varphi_2 + A_1 \cos \varphi_1. \quad (5-3)$$

Аналогичное выражение может быть получено и для суммарной проекции на ось Y ( для простоты Y - проекции на рис.5.3 не показаны):

$$A_{\Sigma y} = Y_2 + Y_1 = A_2 \sin \varphi_2 + A_1 \sin \varphi_1. \quad (5-4)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (5-5)$$

Таким образом, определены основные параметры суммарного колебания: амплитуда, частота и начальная фаза. Несколько сложнее найти сумму двух колебаний, если их частоты отличаются друг от друга. Практически интересным является случай, когда это различие незначительно, т.е.  $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$  и  $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$ , причем  $\Omega \ll \omega_0$ . Пусть для простоты амплитуды обоих колебаний и их начальные фазы одинаковы. Тогда  $x_1(t) = A \sin(\omega_0 + \Omega)t$  и  $x_2(t) = A \sin(\omega_0 - \Omega)t$ . Суммируя эти выражения, получим

$$x_1(t) + x_2(t) = A \{ \sin(\omega_0 + \Omega)t + \sin(\omega_0 - \Omega)t \} = [2A \cos \Omega t] \sin \omega_0 t, \quad (5-6)$$

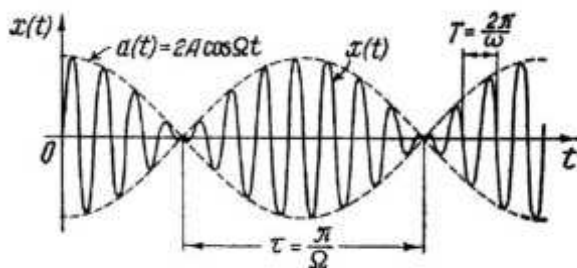


Рис.5.4

где величину, стоящую в квадратных скобках, можно рассматривать как медленно меняющуюся амплитуду. Результат суммы таких колебаний, представленный на рис.5.4, называется **биениями**. Если амплитуды слагаемых колебаний неодинаковы, то картина наблюдающихся биений отличается от

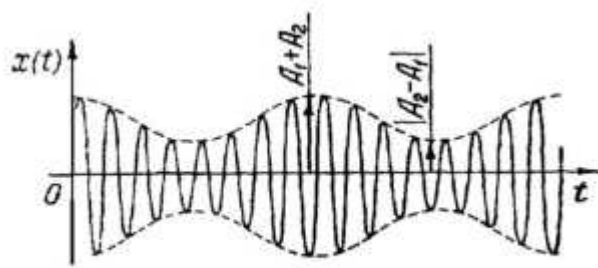


Рис.5.5

предыдущей, т.к теперь суммарная амплитуда изменяется от значения  $A_1+A_2$  до минимума  $A_1-A_2$ . Важно отметить, что в обоих случаях суммарное колебание не является гармоническим, хотя оно и записывается в виде произведения гармонических функций, т.к. его амплитуда не остается постоянной и медленно изменяется с течением времени (рис.5.5).

### 5.3. Сложение перпендикулярных колебаний.

Пусть имеются два гармонических колебания одинаковой частоты, направления колебаний которых взаимно перпендикулярны друг другу.

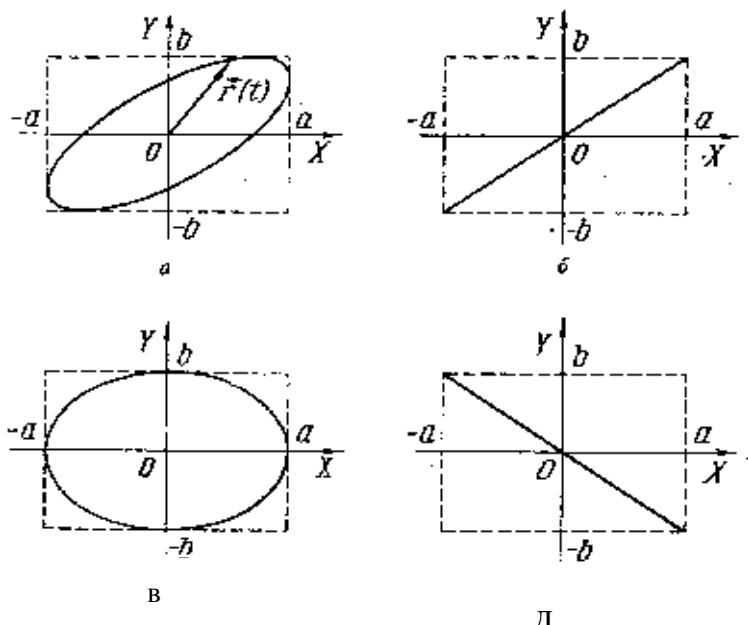


Рис.5.6

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза одного из колебаний была равна нулю. При таком условии колебания можно записать так:

$$x = a \sin \omega t,$$

$$y = b \sin(\omega t + \varphi),$$

где величина  $\varphi$  представляет разность фаз обоих колебаний. Первое уравнение можно переписать так:

$$\sin \omega t = \frac{x}{a}; \quad (5-7)$$

тогда как второе после преобразования по формуле

суммы синусов двух углов принимает вид  $\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi = \frac{y}{b}$ . (5-8)

Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (5-9)$$

Заменяя в уравнении (5-8)  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  их эквивалентами из уравнений (5-7) и (5-9), можно найти:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \varphi \mp \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

или 
$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \varphi = \mp \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (5-10)$$

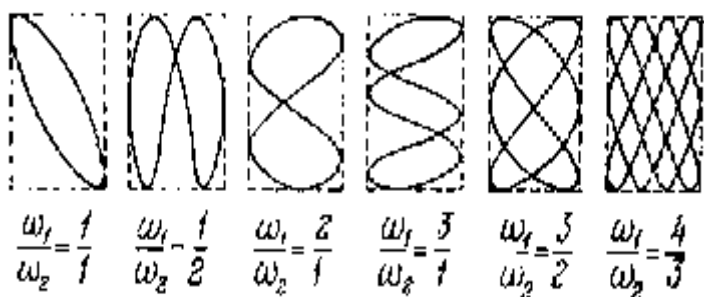
Возводя обе части уравнения (5-10) в квадрат и учитывая, что  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (5-11)$$

Уравнение (5-11) является уравнением эллипса, оси которого повернуты относительно осей координат (рис.5.6а)). При  $\sin \varphi = 0$  и  $\sin \varphi = \pi$  эллипс вырождается в прямую (рис.5.6 в) и д)

$$y = \pm \frac{bx}{a}. \quad (5-12)$$

При разности фаз между колебаниями  $\pi/2$  оси эллипса совпадают с осями



координат (рис.5.6в). Если частоты складываемых колебаний отличаются друг от друга, то форма кривой, которую описывает радиус-вектор суммарного колебания, становится очень сложной и зависит от соотношения складываемых частот. Для некоторых соотношений частот складываемых колебаний получающиеся фигуры, называемые **фигурами Лиссажу**, показаны

на рис.5.7.

Рис.5.7

#### 5.4. Дифференциальное уравнение колебаний.

**Свободные колебания.** Рассмотрим колебания груза массы  $m$ , висящего на пружине, жесткость которой. Направим ось координат  $X$  вертикально вниз,

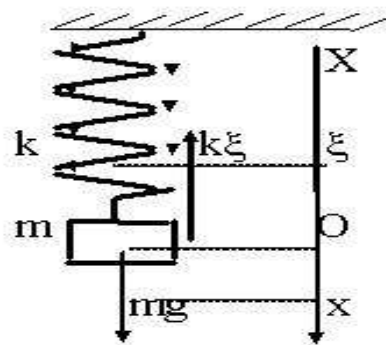


Рис.5.8

причем за начало отсчета примем точку  $O$  (рис.5.8), лежащую на одном уровне с центром масс  $m$ , когда груз неподвижен. При этом пружина растянута на величину  $\xi$  по сравнению с недеформированном состоянием. Величина упругой силы, действующей на массу  $m$ , равна  $k\xi$ . В положении равновесия

$$mg - k\xi = 0. \quad (5-13)$$

Если теперь сместить груз из положения равновесия, то он начнет совершать колебательное движение. Колебания, которые происходят в системе, выведенной из положения равновесия и затем предоставленной самой себе, называются **свободными или собственными колебаниями**, а частота, с которой происходят эти колебания, называется **собственной частотой**. Пусть в некоторый момент времени смещение груза равно  $x$ . Тогда второй закон Ньютона в проекции на ось  $X$  может быть записан в следующем виде:

$$ma_x = mg - k(x + \xi) \text{ или с учетом (5-13)}$$

$$ma_x = -kx. \quad (5-14)$$

В свою очередь, уравнение (5-14) можно записать иначе, если представить ускорение тела через вторую производную смещения по времени  $a_x = d^2x/dt^2$  и обозначить величину  $k/m = \omega_0^2$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x. \quad (5-15)$$

Уравнение (5-15) является дифференциальным уравнением второго порядка, однако его решение можно просто угадать простым перебором всех элементарных функций, из которых только функции синуса и косинуса удовлетворяют решению этого уравнения. Действительно, если

$$\text{смещение} \quad x = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (5-16)$$

$$\text{то скорость тела} \quad \frac{dx}{dt} = v = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (5-17)$$

$$\text{и ускорение тела} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (5-18)$$

Сравнение (5-16) и (5-18) показывает, что действительно (5-16) является решением уравнения (5-15). Величины  $A$  и  $\varphi$  остаются произвольными, для их определения необходимо использовать **начальные условия**, т.е. значения смещения и скорости тела в начальный момент времени. Например, если при  $t = 0$   $x(0) = 0$ , а  $v(0) = v_0$ , то из (5-16) следует, что  $\sin\varphi = 0$  и  $\varphi = 0$ , а из (5-17) величина  $A = v_0/\omega_0$ . При этих

условиях решением уравнения (5-15) служит функция  $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ . Задание тех или иных

начальных условий обычно определяется конкретными условиями поставленной задачи.

**Затухающие колебания.** В реальной жизни любой колебательный процесс постепенно затухает из-за наличия сил трения. Для колебаний груза на пружине существенную роль играет так называемое вязкое трение, сила которого при малых смещениях оказывается пропорциональной величине скорости тела:

$$F_{\text{тр}} = -bv = -b \frac{dx}{dt}. \quad (5-19)$$

В этом случае второй закон Ньютона (уравнение движения) для груза, колеблющегося на пружине, приобретает такой вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} + mg - k(x + \xi). \quad (5-20)$$



Вводя обозначения  $\beta = \frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{m}}$ , это уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{x} = 0, \quad (5-21)$$

где по-прежнему  $\omega_0^2 = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}$ . Решение этого дифференциального уравнения может быть получено обычным способом, но можно показать, что уравнение (5-21) можно свести к уравнению типа (5-15). Для этого достаточно ввести замену переменных  $x(t) = z(t)e^{-\beta t}$ . Проводя операцию дифференцирования, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{d\mathbf{z}}{dt} e^{-\beta t} - \beta \mathbf{z} e^{-\beta t}; & 2\beta \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= 2\beta \frac{d\mathbf{z}}{dt} e^{-\beta t} - 2\beta^2 \mathbf{z} e^{-\beta t}; \\ \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} e^{-\beta t} - 2 \frac{d\mathbf{z}}{dt} e^{-\beta t} + \beta^2 \mathbf{z} e^{-\beta t}, & \omega_0^2 \mathbf{x} &= \omega_0^2 \mathbf{z} e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

С учетом этого уравнение (5-21) может быть записано в таком виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} e^{-\beta t} - 2 \frac{d\mathbf{z}}{dt} e^{-\beta t} + \beta^2 \mathbf{z} e^{-\beta t} + 2\beta \frac{d\mathbf{z}}{dt} e^{-\beta t} - 2\beta^2 \mathbf{z} e^{-\beta t} + \omega_0^2 \mathbf{z} e^{-\beta t} = 0$$

После сокращения на величину  $e^{-\beta t}$  и приведения подобных членов получаем:

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) \mathbf{z} = 0. \quad (5-22)$$

Сравнивая полученное уравнение с выражением (5-15), нетрудно заметить их почти полную идентичность; различие состоит лишь в том, что частота колебаний в (5-22) определяется из формулы  $\omega_3^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ . Таким образом решение уравнения (5-21) имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} e^{-\beta t} \sin(\omega_3 t + \varphi), \quad (5-23)$$

где как и ранее величины  $A$  и  $\varphi$  определяются из начальных условий. В большинстве случаев  $\beta \ll \omega_0$  и  $\omega_3 \approx \omega_0$ . Решение (5-23) представляет уже негармоническое колебание, т.к. его амплитуда  $A e^{-\beta t}$  уменьшается с течением времени. Относительное изменение амплитуды за период колебания характеризуется **декрементом затухания**  $\Delta$ , величина которого находится из выражения:

$$\Delta = \frac{A e^{-\beta t}}{A e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}, \quad (5-24)$$

т.е. декремент затухания равен относительному уменьшению амплитуды за время, равное периоду колебания. Натуральный логарифм  $\Delta$  называют логарифмическим декрементом затухания  $\delta$ , т.е.  $\delta = \ln \Delta = \beta T$ .

## 5.5. Энергетические соотношения в колебательных процессах.

Для груза, совершающего гармонические колебания, значение кинетической энергии  $mv^2/2$  находится прямой подстановкой в величину кинетической энергии выражения для скорости колебательного движения, определяемой выражением (5-17):

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \mathbf{m} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{m} \omega_0^2 \mathbf{A}^2 \cos^2(\omega_0 \mathbf{t} + \varphi). \quad (5-25)$$

Максимальное значение этой энергии, очевидно, равно

$$E_{\text{кин}}^{\text{max}} = \frac{1}{2} \mathbf{m} \omega_0^2 \mathbf{A}^2 \quad (5-26) \text{ и достигается в}$$

момент, когда тело проходит положение равновесия. Пройдя это положение тело продолжает двигаться по инерции и вызывает деформацию пружины. При этом кинетическая энергия движущегося тела переходит в потенциальную энергию деформированной пружины  $E_{\text{пот}}$ :

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{x}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{A}^2 \sin^2(\omega_0 \mathbf{t} + \varphi). \quad (5-27)$$

Максимальное значение этого вида механической энергии равно:

$$E_{\text{пот}}^{\text{max}} = \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{A}^2. \quad (5-28)$$

При незатухающих колебаниях  $\omega_0^2 = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}$ , поэтому имеет место сохранение механической энергии:

$E_{\text{пот}}^{\text{max}} = E_{\text{кин}}^{\text{max}}$ . В этом случае суммарная энергия сохраняет свою величину в любой момент времени (выражения (5-25) и (5-27)):

$$\frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{A}^2 \sin^2(\omega_0 \mathbf{t} + \varphi) + \frac{1}{2} \mathbf{m} \omega_0^2 \mathbf{A}^2 \cos^2(\omega_0 \mathbf{t} + \varphi) = \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{A}^2, \quad (5-29)$$

где учтено, что  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  и  $\mathbf{m} \omega_0^2 = \mathbf{k}$ .

Если колебания являются затухающими, за каждый период колебаний суммарная энергия колеблющегося тела уменьшается на величину работы против сил трения. В этом случае колеблющееся тело или любая система, в которой происходят колебания, характеризуется так называемым **качеством или добротностью системы Q**, которая определяется как способность системы к превращениям одного вида механической энергии в другой (т.е. кинетической в потенциальную или наоборот). Количественно добротность определяется (с точностью до коэффициента  $2\pi$ ) как отношение максимальной энергии упругой деформации (или максимальной кинетической энергии колеблющейся системы) к средней величине потерь энергии в системе за период. Известно, что среднее значение любой переменной величины  $\langle y \rangle$  за период определяется соотношением:

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

Мгновенное значение силы вязкого трения  $F_{\text{тр}} = b \frac{dx}{dt} = b \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , тогда среднее значение работы  $\langle A_{\text{тр}} \rangle$  за единицу времени против этой силы равно:

$$\langle A_{\text{тр}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{b} \omega_0 \mathbf{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) dx = \frac{\mathbf{A}^2}{T} \int_0^T \mathbf{b} \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt.$$

Выразим  $\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$  через функцию двойного угла:  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$  и подставим его в выражение

для  $\langle A_{\text{тр}} \rangle$ :

$$\langle A_{\text{тр}} \rangle = \frac{\mathbf{b} \omega_0^2}{2T} \mathbf{A}^2 \int_0^T dt + \frac{\mathbf{b} \omega_0^2}{2T} \mathbf{A}^2 \int_0^T \cos 2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{\mathbf{b} \omega_0^2}{2} \mathbf{A}^2, \quad (5-30)$$

поскольку значение второго интеграла в (5-30) равно нулю (среднее значение за период любой гармонической функции равно 0, т.к. эта функция половину периода положительна, а половину - отрицательна).

Очевидно, что за весь период  $T$ , на преодоление силы трения будет затрачена энергия  $W_{\text{потер}} = \langle A_{\text{тр}} \rangle T$ , и добротность колебательной системы может быть определена как:

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{упр}}}{W_{\text{потер}}} = 2\pi \frac{(1/2)kA^2}{(1/2)\mathbf{b}\omega_0^2 A^2 T} = \omega_0 \frac{k}{\mathbf{b}\omega_0^2} = \frac{\sqrt{km}}{\mathbf{b}}, \quad (5-31)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Из выражения (5-31) видно, что добротность системы определяется ее упругими,

инерционными и диссипативными свойствами. Можно сказать также, что добротность - это число, показывающее, за сколько периодов колебаний вся энергия, запасенная в системе, будет превращена в работу против сил трения, т.е. в тепло.

Как правило, добротность механических систем довольно высока. Здесь уместно вспомнить о звучании музыкальных инструментов: отдельная нота может звучать несколько секунд, хотя частота колебаний составляет несколько килогерц.

## 5.6. Колебания математического и физического маятников

Из школьного курса физики известно, что математический маятник представляет собой точечную массу, подвешенную на длинной невесомой и нерастяжимой нити. На первый взгляд раскачивание такой системы связано с изменением по меньшей мере двух координат сразу так, что для описания такого движения надо записывать второй закон Ньютона для каждой из координат в отдельности, а затем искать связь между ними. Однако задача может быть упрощена, если обратить внимание на то, что движение математического маятника происходит при постоянной длине нити подвеса, т.е. его можно рассматривать как частный случай вращательного движения, когда в качестве единственной переменной выбирается угол отклонения от положения равновесия. В этом случае вместо уравнения движения в форме второго закона Ньютона необходимо использовать основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M, \quad (5-32)$$

где  $I$  - момент инерции точечной массы относительно точки подвеса,  $M$  - момент всех внешних сил, действующих на эту массу, и  $\frac{d\omega}{dt} = \beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  - угловое ускорение массы, которое, в свою очередь, определяется как вторая производная по времени от угла  $\varphi$  отклонения от вертикали (рис.5.9).

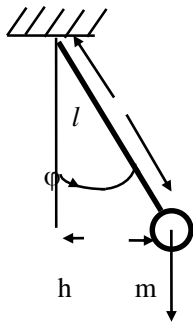


Рис.5.9

Момент инерции точечной массы  $m$ , находящейся на расстоянии  $l$  от оси вращения, по определению равен

$I = ml^2$ , а единственной силой, момент которой относительно оси вращения отличен от нуля, является сила тяжести. Ее момент относительно оси, проходящей через точку подвеса, равен  $M = mgh \sin \varphi$ , и уравнение динамики вращательного движения принимает вид:

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgh \sin \varphi, \quad (5-33)$$

или после сокращения обеих частей на величину  $ml$  :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (5-34)$$

Знак минус в уравнениях (5-33) и (5-34) появился потому, что направление отсчета угла  $\varphi$  взято против часовой стрелки, тогда как момент силы тяжести стремится повернуть маятник по часовой стрелке.

Для малых углов отклонения  $\varphi$  синус угла можно разложить в ряд Тэйлора по малому параметру  $\varphi$ :

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} \frac{df(0)}{dx} x + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(0)}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f(0)}{dx^3} x^3 + \dots$$

Поскольку  $\sin 0 = 0$ , то в разложении синуса исчезнут члены, содержащие  $f(0)$  и

вторую производную  $\frac{d^2f(0)}{dx^2}$  и синус угла  $\varphi$  равен:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 + \dots$$

Даже для углов отклонения около  $30^\circ$ , т.е. 0,5 рад ( в математике угол обычно измеряется в радианах; один радиан  $\approx 57^\circ$ ), вторая поправка в разложении синуса дает величину, чуть большую двух процентов, поэтому с достаточной степенью точности функцию синуса можно заменить его аргументом так, что уравнение (5-34) приобретает такой вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0, \quad (5-35)$$

что полностью совпадает с уравнением движения груза на пружине. Поэтому нетрудно прийти к заключению, что частота колебаний математического маятника определится так же, как частота собственных колебаний груза на пружине:

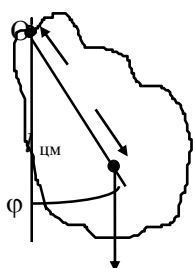
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5-36)$$

Если в качестве маятника используется тело произвольной формы, то уравнение вращательного движения для такого **физического** маятника записывается аналогично уравнению для математического маятника:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg l_{\text{цм}} \sin\varphi, \quad (5-37)$$

где  $l_{\text{цм}}$  обозначает расстояние, на котором расположен центр масс тела от оси вращения (рис.5.10). Однако те-

теперь момент инерции такого маятника требует специального вычисления, которого в рамках нашего курса производиться не будет.



mg  
**Рис.5.10**

Частота собственных колебаний физического маятника равна:

$$\Omega = \sqrt{\frac{mg}{I} l_{\text{цм}}}. \quad (5-38)$$

### 5.7. Уравнение вынужденных колебаний. Резонанс

Вынужденными называются колебания, которые происходят под действием внешней периодической силы. В этом случае частота колебаний не определяется параметрами самой системы, а задается внешним источником. Для груза на пружине уравнение движения может быть получено формальным введением в уравнение (5-20) еще одной - внешней периодической силы  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} + mg - k(x + \xi) + F_0 \sin \omega t; \quad (5-39)$$

после преобразований и обозначений, аналогичных прошлой лекции, получим:

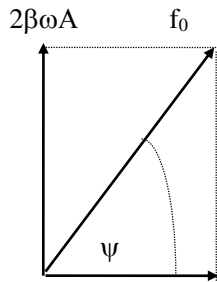
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t, \quad (5-40)$$

где  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ . Остальные обозначения сохраняют свой смысл. Т.к. груз колеблется с частотой

вынуждающей силы, решение дифференциального уравнения (5-40) может быть записано в следующем виде:  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ . Появление фазового сдвига между колебаниями груза и внешним воздействием связано с определенной инерционностью системы, реагирующей на внешнее воздействие с некоторым опозданием. Однако, для упрощения последующих выкладок, удобнее изменить начало отсчета сдвига фаз: пусть колебания груза происходят по закону  $x(t) = A \sin \omega t$ , а внешняя сила получает некоторое опережение по фазе, т.е.  $f_0 \sin(\omega t - \varphi) = f(t)$  или заменяя  $\varphi$  на  $(-\psi)$ ,  $f(t) = f_0 \sin(\omega t + \psi)$ . Тогда неизвестной величиной в выражении  $x(t) = A \sin \omega t$  остается только амплитуда колебаний. Для ее определения используем векторный способ решения уравнения (5-40). Вычислим последовательно первую и вторую

производные от  $x(t)$  и подставим эти производные в (5-40):  $\frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t = A \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

;  $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$ ; после приведения подобных получим:



$$(\omega_0^2 - \omega^2)A \sin \omega t + 2\beta\omega A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = f_0 \sin(\omega t + \psi). \quad (5-41).$$

Вспоминая, что колебания можно представлять в векторном виде, рассмотрим уравнение (5-41) как векторное: два вектора, стоящие в его левой части в сумме дают вектор в правой части (рис.). Из рисунка по теореме Пифагора следует:  $4\beta^2\omega^2 A^2 + A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = f_0^2$ . Тогда

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)$$

5.11

Рис.

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (5-42)$$

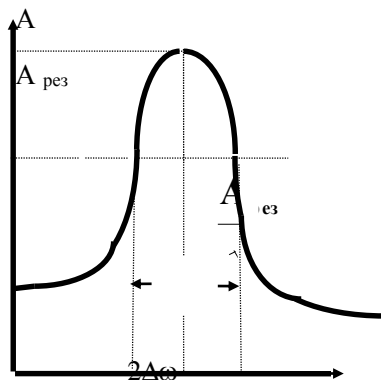
и

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5-43)$$

Из найденного выражения для амплитуды вынужденных колебаний (5-42) видно, что величина  $A$  зависит от частоты вынуждающего воздействия. Для нахождения экстремального значения этой амплитуды найдем производную знаменателя и приравняем ее к нулю:  $4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega - 8\beta^2\omega = 0$ , откуда следует, что «экстремальное» или **резонансное** значение частоты определяется как:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (5-44)$$

Если частота внешнего воздействия может изменяться, то в тот момент, когда ее значение совпадает с  $\omega_{\text{рез}}$ , знаменатель (5-42) становится минимальным, а амплитуда вынужденных колебаний достигает максимальной величины. На практике очень часто наблюдается, что колеблющаяся система обладает слабым затуханием и  $\beta \ll \omega_0$ . В этом случае  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ , т.е. значение резонансной частоты совпадает с собственной частотой системы. Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний до максимума, когда частота внешнего воздействия приближается к собственной частоте колебаний называется **резонансом**.



$\omega$

Изменение амплитуды вынужденных колебаний в области частот, близких к резонансной - резонансная кривая - показана на рис.5.12. Чтобы оценить относительное изменение амплитуды при резонансе, необходимо знать величину амплитуды на двух частотах - на резонансной и на частоте, достаточно далекой от  $\omega_{\text{рез}}$ . Рассматривая (5-42) нетрудно заметить, что такой «далекой» частотой удобно выбрать  $\omega = 0$ . В этом случае

$$A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

$\omega_{рез}$

**Рис.5.12**

На резонансной частоте при условии, что  $\beta \ll \omega_0$  и  $\omega_{рез} \approx \omega_0$ , амплитуда колебаний равна

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}, \text{ поэтому отношение выбранных амплитуд } \frac{A_{рез}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\sqrt{km}}{b} = Q, \text{ т.е. амплитуда}$$

при резонансе увеличивается в Q раз (Q - добротность системы). При достаточно высокой добротности смещение отдельных частей системы может превышать пределы допустимых деформаций, что приведет к разрушению системы. Особенно опасны такие явления там, где разрушение колеблющейся системы может повлечь за собой гибель людей, - например, на механическом транспорте. Вращение винтов, валов с определенной частотой может вызвать резонансные колебания корпусов самолетов, судов и машин. Чтобы предотвратить подобные явления, конструктора вынуждены заранее тщательно рассчитывать как собственные частоты транспортных средств, так и возможные частоты, возникающие при различных режимах работы двигателей.

Важной характеристикой резонансной кривой является так называемая ширина кривой. Шириной резонансной кривой называют область частот, близких к резонансной частоте, на которых относительное уменьшение «реакции» системы на внешнее воздействие не превышает 30% (точнее в  $1/\sqrt{2}$  раза) относительно «реакции» на резонансной частоте (рис.5.12). Степень задаваемого ослабления носит субъективный характер и связана со слухом человека. Многочисленные измерения показали, что человек «на слух» различает громкости различных источников звука, если их амплитуды отличаются на 30%. Если громкости отличаются на меньшую величину, то человек воспринимает как одинаковые. Другими словами, все звуки при их резонансном усилении, лежащие в области ширины резонансной кривой, будут казаться человеку звуками с одинаковой громкостью. Это важно учитывать при конструировании и изготовлении музыкальных инструментов.

## Лекция №6

**Основные характеристики и закономерности волновых процессов.** Волны в упругих средах и их виды. Фронт волны, плоские и сферические волны. Энергия волны. Упругие волны в твердом теле.

### 6.1. Волны в упругих средах и их виды. Фронт волны, плоские и сферические волны.

Волной принято называть распространение в пространстве изменений какой-либо физической величины. Изменения величины могут носить как периодический, так и непериодический характер. Для того, чтобы эти изменения могли распространяться в некоторой области пространства, необходимо наличие некоторых условий; в частности, в каждой точке рассматриваемой области физическая величина должна иметь определенное значение (принято говорить, что величина имеет полевой характер). Кроме того должна осуществляться взаимосвязь изменения физической величины в одной точке пространства с изменением этой же величины в соседних точках. Скорость распространения изменения определяется как природой изменяемой величины, так и свойствами **среды**, в которой распространяется это изменение. При этом определенную роль играет направление колебаний в волне. Если направление колебаний совпадает с направлением распространения волны, то такие волны называют **продольными**. Если же колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, то такие волны являются **поперечными**. Если относительное изменение величины (т.е. изменение, деленное на саму величину) мало по сравнению с единицей, то такое изменение называют **возмущением** физической величины. Примером распространения возмущения могут служить волны на поверхности воды, возникающие при бросании в воду камешка. Образовавшиеся искажения поверхности воды (рис.6.1) начнут распространяться во все стороны, образуя своеобразные кольцевые структуры. Возникшая волна достигнет некоторой точки, отстоящей на расстояние x от места попадания

камня в воду через время  $\tau = \frac{x}{v}$ , где v - скорость распространения возмущения по поверхности воды.

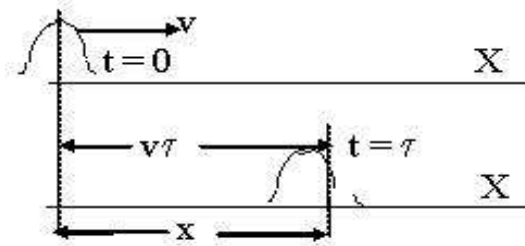


Рис.6.1

Пусть в точке попадания камня в воду профиль образовавшегося возмущения является некоторой функцией от времени  $f(t)$ . Ясно, что в любой точке поверхности, куда доходит образовавшееся возмущение, величина  $f(t)$  будет зависеть не только от времени, но также и от расстояния, однако для упрощения предположим, что возмущение сохраняет свою форму вне зависимости от пройденного расстояния. Тогда в любой точке поверхности, отстоящей от начальной точки на расстояние  $x$ , профиль возмущения  $f(t)$  будет изменяться во времени с некоторым запаздыванием на величину  $\tau = x/v$ , т.е. аргументом функции  $f(t)$  станет величина  $(t - x/v)$ . Независимость величины возмущения от координаты означает, что  $f(t) = f(t - x/v)$ . Волны, для которых имеет место последнее равенство называются плоскими. Если в начальной точке возмущение изменяется по гармоническому закону, то такая волна называется **синусоидальной**. Синусоидальная плоская волна записывается в таком виде:

$$f(x, t) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \left( \omega t - \frac{\omega x}{v} \right) = A \sin (\omega t - kx), \quad (6-1)$$

где  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T v} = \frac{2\pi}{\lambda}$  - так называемое волновое число, а величина  $\lambda = vT$  называется длиной

волны. Аргумент синуса в уравнении (6-1) определяет фазу волны  $\Phi(x, t)$ . Поверхность, соединяющая все точки, фазы которых одинаковы, называется волновой поверхностью или **фронтом волны**. Если волна плоская, то фронтом волны является плоская поверхность. Волна, распространяющаяся во все стороны от точечного источника, называется **сферической**; очевидно, что для такой волны волновая поверхность представляет собой сферу. Если на какой-либо поверхности фаза постоянна, т.е.  $\Phi(x, t) = \text{const}$ , скорость перемещения координаты, для которой фаза постоянна можно определить

дифференцируя условие постоянства фазы:  $\frac{d\Phi}{dt} = \omega - \mathbf{k} \frac{dx}{dt} = 0$ , откуда

$$v_{\text{фаз}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\mathbf{k}}, \quad (6-2)$$

т.е. скорость распространения волны совпадает со скоростью распространения постоянной фазы. Направление колебаний в распространяющейся волне может совпадать с направлением волны - в этом случае волна называется **продольной**, но может быть и так, что распространение волны происходит в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой совершаются колебания; тогда волны называются **поперечными**. Например, распространение звука - это продольные волны. Примером поперечных волн могут служить волны на поверхности воды.

## 6.2. Энергия волны

Распространение синусоидальной волны в пространстве сопровождается переносом энергии; в этом легко убедиться, вспомнив о разрушительной силе ударной волны при взрывах. Известно также, что волны морского прибоя способны разрушать крепчайшие каменные набережные. При изучении колебаний было установлено, что энергия колебательного движения пропорциональна квадрату



амплитуды. Поэтому можно считать, что и в любом выбранном малом объеме пространства в области существования волны сосредоточена колебательная энергия, величина которой также пропорциональна квадрату амплитуды колебаний в волне. Для количественной характеристики энергии колебательного движения в волне обычно относят величину этой энергии к единице объема среды, через которую проходит волна. В этом случае принято говорить о плотности колебательной энергии  $w$ . Т.к. волна связана с «переносом» колебаний в пространстве, причем скорость этого «переноса» равна скорости распространения волны  $v$ , то плотность «перенесенной» энергии  $\mathfrak{S}$  через единичную площадку в единицу времени равна:

$$\mathfrak{S} = v \cdot \vec{w} \quad \vec{v} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \quad (6-3)$$

Из (6-3) видно, что величина  $\mathfrak{S}$  должна быть вектором, направление которого совпадает с направлением скорости. Впервые этот вектор был введен профессором Московского Университета Н.А. Умовым, поэтому вектор  $\mathfrak{S}$  принято называть вектором Умова.

### 6.3. Упругие волны в твердом теле

Пусть имеется однородный стержень. Направим ось  $X$  вдоль стержня и выберем два сечения стержня, координаты которых (рис.6.2) равны  $x_1$  и  $x_2$  соответственно так, что между ними оказывается отрезок стержня длиной  $l_0 = x_2 - x_1 = \Delta x$ . Под действием внешних сил в стержне произойдут упругие деформации, так что в новом - деформированном состоянии - выбранные сечения имеют координаты  $(x_1 + \xi_1)$  и  $(x_2 + \xi_2)$ , т.е. первое сечение сместилось на величину  $\xi_1$ , а второе - на  $\xi_2$ . Длина выбранного отрезка теперь равна  $(x_2 + \xi_2) - (x_1 + \xi_1) = l_0 + \Delta l$ , поэтому величина относительной деформации отрезка равна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \quad (6-4)$$

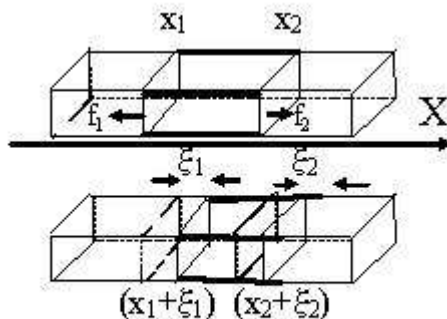


Рис.6.2

Чтобы написать уравнение движения для выделенного отрезка стержня необходимо вычислить вторую производную смещения по времени. Как видно из выражения (6-1), выражение для распространяющейся волны зависит от двух переменных, поэтому вычисление производной от функции  $f(x,t)$  должно происходить несколько иначе, чем в случае одной переменной. Производную от функции  $f(x,t)$  по одной из двух переменных можно вычислять так же, как и в случае функции одной переменной, считая вторую переменную при этом постоянной, но эта производная называется **частной производной**. Например, если  $f(x,y) = x^5 y^5$ , то  $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 y^5$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^5 y^4$  (здесь и далее наклонные  $\partial$  означают знак частной производной).

С учетом этого для бесконечно малого отрезка величина относительной деформации получается формальным предельным переходом к бесконечно малым величинам. Тогда уравнение (9-10) приобретает такой вид:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (6-5)$$

Если по стержню распространяется продольная упругая волна, то в нем действуют попеременно внутренние силы растяжения и сжатия. Выбирая длину отрезка достаточно малой можно добиться, чтобы на его концы действовали одинаковые силы - сжатия или растяжения. Пусть для определенности это будут силы растяжения  $f_1$  и  $f_2$  (рис.6.2). Второй закон Ньютона для элемента длины  $\Delta x$  можно написать, используя теорему о движении центра масс:

$$\Delta m a_{ц.м.} = f_2 - f_1. \quad (6-6)$$

Силы упругого растяжения представляем с помощью закона Гука:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{1}{E} \frac{f}{S}, \quad (6-7)$$

где  $E$  - модуль упругости (модуль Юнга),  $S$  - площадь сечения стержня, а  $\frac{\Delta \xi}{\Delta x}$  - величина относительной деформации. Величина  $\sigma = f/S$  называется упругим напряжением; масса  $\Delta m = \rho S \Delta x$ , где  $\rho$  - плотность стержня. Если смещение центра масс  $\xi_{ц.м.}$ , то уравнение (6-6) становится таким:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = f_2 - f_1 = \sigma_2 S - \sigma_1 S.$$

Деля обе части последнего равенства на величину объема  $S \Delta x$ , получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\Delta x} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta x}.$$

При переходе к бесконечно малым величинам последнее уравнение становится уравнением для производных:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (6-8)$$

Правую часть (6-8) выразим через закон Гука (6-7), переходя к бесконечно малым элементам :

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

С учетом последнего соотношения из (6-8) получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (6-9)$$

Соотношение (6-9) называется **волновым уравнением**. Хотя оно получено для частного случая продольных упругих волн, оно имеет достаточно общий вид. Его можно получить сравнением вторых производных любой функции по координате и времени соответственно, если эта функция зависит от

аргумента вида  $\alpha = t - \frac{x}{v}$ . Опуская математические действия, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{1}{\mathbf{v}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{t}^2},$$

откуда следует, что скорость распространения продольных упругих волн равна:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{E}}{\rho}}.$$

Таким образом, решением волнового уравнения являются функции от аргумента  $\alpha = \mathbf{t} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{v}}$ . Эти функции характеризуют плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ .

### Лекция №7

**Молекулярно-кинетическая теория газов.** Основные положения МКТ. Опытные законы идеального газа. Основное уравнение МКТ. Уравнение состояния идеального газа. Закон Максвелла для распределения молекул по скоростям. Барометрическая формула.

#### 7.1. Основные положения МКТ.

Молекулярная физика изучает физические свойства **макроскопических систем**. Предметом её изучения являются молекулярные формы движения больших совокупностей молекул.

В основе молекулярной физики лежит понятие молекулы. Основные положения молекулярно-кинетической теории поясняют суть этой теории. Эти положения подтверждены практикой.

#### 1. *Все вещества состоят из частиц (молекул)*

Опытное подтверждение этого положения:

- Смешивание разных жидкостей, например, воды и спирта, показывает, что объём смеси меньше суммарного объёма, занимаемого двумя жидкостями до их смешивания. Это можно объяснить тем, что между молекулами жидкостей есть пустоты, и при смешивании жидкостей молекулы одной из них проникают в свободное пространство между молекулами другой жидкости.
- Расширение тел при нагревании и сжатие при охлаждении также можно объяснить тем, что вещества состоят из молекул, расположенных друг от друга на некотором расстоянии. При нагревании расстояния между молекулами увеличиваются, а при охлаждении уменьшаются.
- Проявление дискретной структуры при наблюдении веществ под электронными или ионными микроскопами.

#### 2. *Частицы (молекулы) взаимодействуют друг с другом.*

Факты, подтверждающие это положение:

- наличие сил притяжения и отталкивания;
- существование трех агрегатных состояний: из-за разного взаимодействия молекул проявляются разные свойства агрегатных состояний, отражённые в таблице:

газ	не имеет собственной формы и объема
жидкость	не имеет собственной формы, но имеет собственный объём
твёрдое тело	имеет собственную форму и объём

#### 3. *Частицы (молекулы) непрерывно и беспорядочно движутся*

Некоторые факты, подтверждающие это положение:

- молекулы газа распространяются по всему объёму сосуда;
- броуновское движение;
- диффузия.

Что представляют собой те частицы, из которых составлены вещества?

**Молекула** - это наименьшая частица вещества, сохраняющая все его химические свойства. Различают молекулу в физическом смысле (**физическую молекулу**), которую можно уподобить упругому шарик, и **химическую молекулу**, выраженную формулой атомного состава. Молекулы не всех веществ можно рассматривать как физические, например, молекулы веществ с ионной связью (в частности, NaCl – поваренная соль). Это важно, когда рассматриваются соударения молекул или их тепловое движение. Поэтому в формулировке основных положений МКТ чаще всего используют термин «частица».

**Размеры молекул** очень малы. Если представить молекулу в виде малого шарика, то его радиус имеет порядок величины  $10^{-8} \text{ см} = 10^{-10} \text{ м}$ . Молекулы состоят из атомов. Частицы, образующие атомы - электроны и ядра. Принято считать, что электрон имеет радиус порядка величины  $10^{-11} \text{ см} = 10^{-13} \text{ м}$ , а ядра имеют радиусы примерно  $\approx 10^{-12} \div 10^{-13} \text{ см} = 10^{-14} \div 10^{-15} \text{ м}$ .

Массы атомов и молекул

В качестве **единичной атомной массы**  $m_{am}$  принимается 1/12 массы атома ядра изотопа углерода

$${}^1_6\text{C}: \quad m_{am} = \frac{\text{масса изотопа углерода } {}^{12}_6\text{C}}{12} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

**Относительная молекулярная масса**, или относительная масса молекулы, есть отношение массы молекулы к единичной атомной массе:

$$m_r = \frac{m_{\text{мол}}}{m_{am}} = \frac{\text{масса молекулы}}{\text{масса } {}^{12}_6\text{C}} \cdot 12$$

Аналогично определяют и относительную атомную массу.

**Абсолютные значения** атомных масс по порядку величины заключаются в пределах  $10^{-25} \div 10^{-27}$  кг, а относительные атомные массы в пределах  $1 \div 10^2$ . Пределы относительных молекулярных масс  $m_r$  от 1 до  $10^5$ .

**Количество вещества.** Количество вещества характеризуется числом его структурных элементов. В СИ оно выражается в молях. Моль является основной единицей измерения, так же как метр и секунда.

**Моль** равен количеству вещества рассматриваемой системы, которое содержит столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 0,012 кг изотопа углерода  ${}^{12}_6\text{C}$ .

Понятие моля относится к числу структурных элементов вещества. Поэтому нужно говорить: «моль молекул», «моль атомов», «моль электронов» и т.п.

Таким образом, моль любого вещества содержит одинаковое число структурных элементов. Это число называется **постоянной Авогадро** или **числом Авогадро**:

$$N_A = \frac{0.012}{12 m_{am}} \text{ моль}^{-1} = \frac{10^{-3} \text{ кг}}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Отсюда следует:  $m_{am} \cdot N_A = 10^{-3} \text{ кг/моль} \Rightarrow N_A = \frac{10^{-3}}{m_{am}}$

**Молярная масса** – масса одного моля молекул вещества.

$$\mu = m_{\text{мол}} \cdot N_A$$

Её определяют через относительную массу молекулы:

$$\mu = \frac{m_{\text{мол}} \cdot 10^{-3}}{m_{am}} \text{ кг/моль} = m_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

Число молей молекул  $\nu$  связано с числом молекул  $N$  некоторого вещества формулой:

$$\nu = \frac{N}{N_A} \quad \text{или} \quad \nu = \frac{m_{\text{мол}} N}{m_{\text{мол}} N_A} = \frac{m}{\mu}, \quad \text{где} \quad m = m_{\text{мол}} \cdot N - \text{масса вещества.}$$

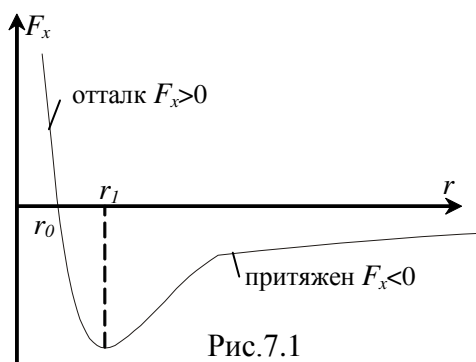


Рис. 7.1

### Агрегатные состояния вещества

Наличие разных агрегатных состояний вещества объясняется различным взаимодействием молекул. На рис. 7.1 приведена зависимость сил межмолекулярного взаимодействия от расстояния.

На больших расстояниях преобладает действие сил притяжения, на малых - отталкивания. По природе эти силы - электромагнитные. С энергетической точки зрения, чем больше кинетическая энергия атомов, тем сильнее тенденция к разъединению, отталкиванию; чем больше потенциальная энергия сцепления, тем больше тенденция к соединению.

Если суммарная кинетическая энергия атомов и молекул много больше суммарной потенциальной энергии их взаимного притяжения, то вещество находится в газообразном состоянии; если много меньше, то в твердом. Жидкое состояние образуется при примерном равенстве этих энергий.

## 7.2. Опытные законы идеального газа

Газовые законы установлены в 17 веке экспериментально. Однако, их можно получить, используя уравнение Менделеева - Клапейрона.

**Закон Бойля-Мариотта.** Для данного количества вещества при изотермическом процессе произведение давления на объём есть величина постоянная.

$$PV = const \quad (7-1).$$

Для построения диаграммы  $P(V)$  выразим давление через объём

$$P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}.$$

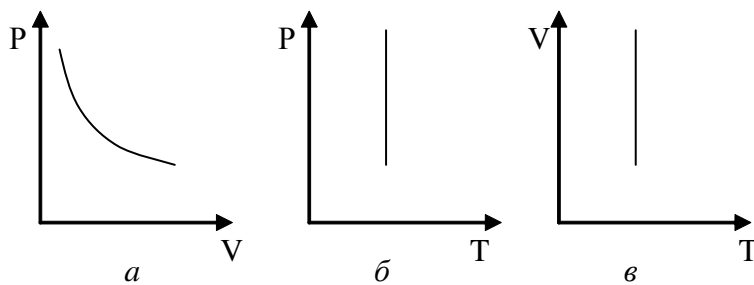


Рис. 7.2

Зависимость между давлением и объёмом - обратно пропорциональная, графически представлена гиперболой на рис. 7.2 а. Температурные зависимости давления и объёма представлены на рис. 7.2 б и в, соответственно.

**Закон Гей-Люссака.** Для данного количества вещества при изобарическом процессе отношение объёма к температуре (или наоборот) есть постоянная величина.

$$\frac{V}{T} = const \quad (7-2)$$

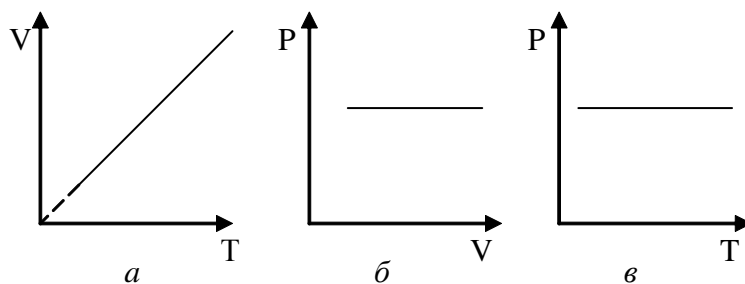


Рис.7.3

Изобарический закон можно записать и в виде:  $V = V_0(1 + \alpha t)$ . Здесь  $V_0$  - объём газа при  $t=0^\circ\text{C}$ ,  $t$  - температура в  $^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  - термический коэффициент объёмного расширения;  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dT} \right)_P$ . Для идеального газа  $V = \nu \frac{RT}{P}$ ,  $\left( \frac{dV}{dT} \right)_P = \frac{\nu R}{P}$ , но  $\frac{\nu R}{P} = \frac{V}{T}$ , тогда  $\alpha = \frac{1}{T}$  - термический коэффициент объёмного расширения идеального газа равен величине, обратной температуры. Изображение этого процесса приведено на рис. 7.3.

**Закон Шарля.** Для данного количества вещества при изохорическом процессе отношение давления к температуре (или наоборот) есть величина постоянная.

$$\frac{P}{T} = const, \quad (7-3)$$

Изображение этого процесса приведено на рис. 7.4

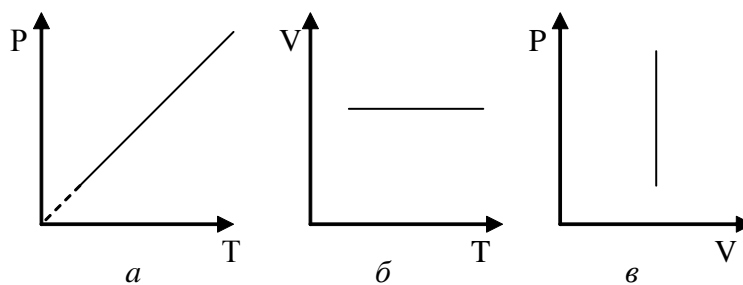


Рис.7.4

### Закон Авогадро

При одинаковых давлениях ( $P$ ) и температурах ( $T$ ) в равных объемах ( $V$ ) любого газа содержится одинаковое число молекул.

**Закон Дальтона (для смеси газов)**

Давление смеси газов равно сумме парциальных давлений

$$P_{см} = P_1 + P_2 + \dots + P_k \quad (7-4)$$

**Парциальное давление** - давление, которое оказывал бы данный компонент газа, если бы он один занимал весь объем, предоставленный смеси.

### 7.3. Уравнение состояния идеального газа

Наиболее простой моделью является модель *идеального газа*. Это газ, состоящий из точечных материальных частиц с конечной массой, силами взаимодействия между которыми можно пренебречь, и которые сталкиваются между собой по законам соударения упругих шаров. Следовательно, молекулы идеального газа обладают только кинетической энергией, поскольку потенциальной энергией взаимодействия молекул можно пренебречь. Молекулы движутся непрерывно и беспорядочно, следовательно, в среднем скорости молекул газа в разных направлениях одинаковы. Тот факт, что частицы точечные, позволяет считать, что газ занимает весь предоставленный ему объём, то есть, любая молекула в любой момент времени может находиться в любом месте предоставленного объёма.

Уравнение состояния идеального газа или уравнение Менделеева - Клапейрона является обобщением законов идеального газа, открытых экспериментально до создания МКТ.

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad (7-5)$$

$R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  - молярная газовая постоянная или универсальная газовая постоянная.

Уравнение состояния газа часто удобно использовать в записи, предложенной *Клапейроном*, если

количество вещества не изменяется  $\frac{PV}{T} = \frac{m}{\mu} R$  или

$$\frac{PV}{T} = \text{const} \quad (7-6)$$

Уравнение (7-6) часто называют *обобщённым газовым законом*.

#### 7.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа связывает макроскопический параметр газа с микроскопическими характеристиками, относящимися к его структурным элементам - молекулам. Учитывая беспорядочное непрерывное движение молекул и их соударения со стенками сосуда и друг с другом, макроскопическим параметром может быть давление газа, которое связано с изменением импульса молекул (микроскопический параметр).

Как известно, величина давления определяется силой, действующей перпендикулярно на единицу площади поверхности:  $P = \frac{F}{S}$ .

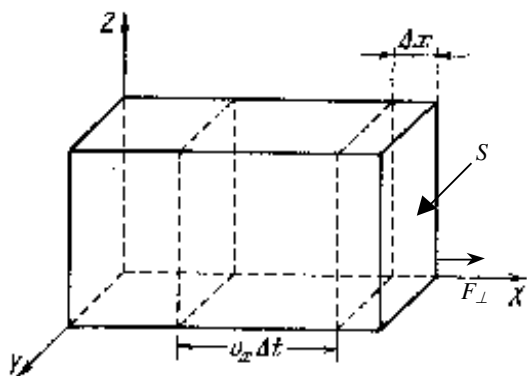


Рис. 7.5

Давление газа на стенки обусловлено огромным числом столкновений молекул газа со стенками,

согласно второму закону Ньютона:  $\vec{F} = \frac{\Delta(m_0 \vec{v})}{\Delta t}$

Импульс одной молекулы: вдоль оси  $X$  равен  $m_0 v_x$ , где  $m_0$  - масса одной молекулы. Пусть в единице объема сосуда находится  $n$  молекул, из них половина движется вдоль оси  $X$ , а другая половина - в противоположном направлении. За время  $\Delta t$  в слой  $\Delta x$  ( $\Delta x$  - расстояние, на котором проявляется действие молекул на стенку) слева

направо входит  $\frac{1}{2} n S v_x \Delta t$  молекул. Каждая из них обладает импульсом  $m_0 v_x$ , следовательно, общий импульс, вносимый ими в слой, равен:  $\frac{1}{2} n m_0 v_x^2 S \Delta t$ .

За это же время слой покидает, двигаясь, справа налево, такое же число молекул с таким же общим импульсом, но противоположного знака. Общее изменение импульса:  $\frac{1}{2} n m_0 v_x^2 S \Delta t - \left( -\frac{1}{2} n m_0 v_x^2 S \Delta t \right) = n m_0 v_x^2 S \Delta t$ .

Импульс силы, действующей на стенку, площадью  $S$ , равен изменению импульса частиц  $F \Delta t = n m_0 v_x^2 S \Delta t$ . Тогда давление на стенку, будет определяться формулой:

$$P = n m_0 v_x^2 \quad (7-7)$$

Двигаясь беспорядочно в пространстве, молекулы имеют составляющие скоростей и вдоль других осей. Полная скорость молекулы может быть выражена через её составляющие по трём независимым направлениям:  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ .

Поскольку в движении участвует множество молекул, то необходимо использовать средние квадраты скоростей:  $\overline{v^2} = \overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ .

Так как движение беспорядочное, то все три компоненты скоростей равноправны  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ . Отсюда  $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$ . После подстановки в уравнение (7-7) получим:  $P = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2}$  (7-8)

Уравнение (7-8) связывает макроскопический параметр давление и микроскопические – массу и средний квадрат скорости молекулы, поэтому его можно считать **основным уравнением МКТ идеальных газов**. Однако, часто это уравнение используют в другом виде:  $P = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$ . Здесь  $\frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \overline{E_0}$  - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы. Таким образом, давление идеального газа определяется средней кинетической энергией поступательного движения молекулы и является среднестатистической величиной

$$P = \frac{2}{3} n \overline{E_0} \quad (7-9)$$

**Давление газа пропорционально средней кинетической энергии поступательного движения молекулы.**

Единица давления в СИ:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$

### 7.5. Закон Максвелла для распределения молекул по скоростям.

Распределение большого числа молекул идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, по модулям скоростей подчиняется закону **распределения Максвелла**. Для получения дифференциального распределения Максвелла будем искать число частиц, скорости которых лежат в очень малом интервале  $d\mathcal{G}$  вблизи некоторой скорости  $\mathcal{G}$ . Пусть  $dn$  – число частиц в единице объёма, скорости которых лежат в интервале от  $\mathcal{G}$  до  $d\mathcal{G}$ . Это число



пропорционально интервалу скоростей  $d\mathcal{G}$ , а также пропорционально числу частиц в единице объёма. Можно записать так:

$$dn = nf(\mathcal{G})d\mathcal{G}, \quad (7-10)$$

где  $f(\mathcal{G})$  - плотность вероятности скорости, которая означает долю частиц в единице объёма, скорости которых лежат в единичном интервале скоростей вблизи скорости  $\mathcal{G}$ . Тогда доля частиц, скорости которых лежат в интервале от  $\mathcal{G}$  до  $\mathcal{G} + d\mathcal{G}$  может быть найдена как

$$\frac{dn}{n} = f(\mathcal{G})d\mathcal{G} \quad (7-11)$$

Поскольку число частиц, даже в малых объёмах вещества, очень велико, то  $\frac{dn}{n}$  имеет смысл вероятности того, что любая частица идеального газа в единице объёма имеет скорость, лежащую в интервале скоростей от  $\mathcal{G}$  до  $\mathcal{G} + d\mathcal{G}$ . Распределение Максвелла в дифференциальной форме имеет вид:

$$f(\mathcal{G}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \mathcal{G}^2 e^{-\frac{m_0\mathcal{G}^2}{2kT}} \quad (7-12)$$

Вид дифференциального распределения Максвелла при разных значениях температуры представлен на рис.7.6. Площадь заштрихованной криволинейной трапеции численно равна доле частиц, скорости которых лежат в интервале от  $\mathcal{G}$  до  $\mathcal{G} + d\mathcal{G}$ . Скорость  $\mathcal{G}_H$ , соответствующая максимуму плотности вероятности  $f(\mathcal{G})$ , называется **наиболее вероятной скоростью**. При  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_H$  выполняется равенство  $\frac{df(\mathcal{G})}{d\mathcal{G}} = 0$ . Отсюда получаем, что наиболее вероятная скорость равна:

$$\mathcal{G}_H = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \quad \text{или} \quad \mathcal{G}_H = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad (7-13)$$

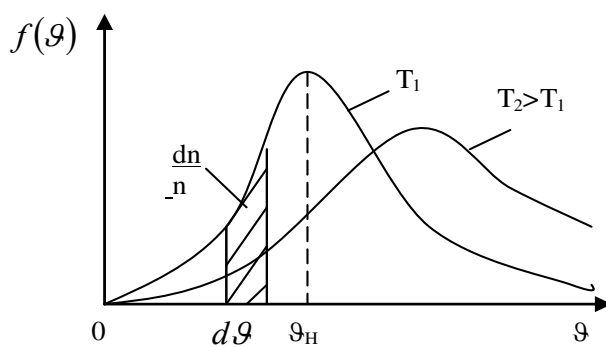


Рис. 7.6

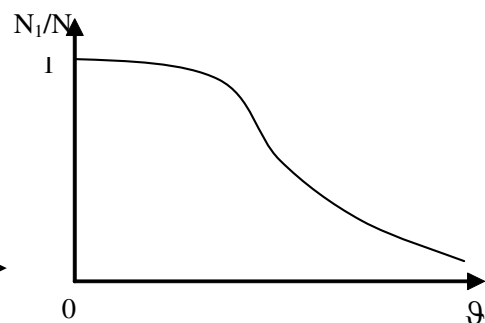


Рис.7.7

В отличие от распределения Гаусса, распределение Максвелла не симметрично относительно абсциссы максимума функции распределения. Это обусловлено наличием в формуле (7-12) квадрата модуля скорости, кроме экспоненты. При малых скоростях  $\mathcal{G} < \mathcal{G}_H$  преобладает вклад  $\mathcal{G}^2$ , поэтому при этих скоростях вид кривой дифференциального распределения (рис.7-6) близок к параболе, при  $\mathcal{G} > \mathcal{G}_H$  основной вклад вносит экспонента, которая убывает гораздо быстрее, чем растёт парабола. Площадь фигуры под кривой ( $0 < \mathcal{G} < \infty$ ) на рис.7.6 равна единице (условие нормировки) и выражает факт существования молекулы. При возрастании температуры увеличивается наиболее вероятная скорость, а плотность вероятности, соответствующая этой скорости, уменьшается, но площадь фигуры под кривой остаётся неизменной. Интегральное распределение Максвелла показано на рисунке 7.7. Здесь  $N_1/N$  – доля частиц, скорости которых превышают скорость  $\mathcal{G}$ .

Таким образом, распределение Максвелла – это равновесное распределение идеального газа. Оно устанавливается благодаря столкновениям молекул, которые приводят систему к тепловому равновесию.

Распределение Максвелла позволяет определить несколько средних скоростей: наиболее вероятную скорость, среднюю арифметическую скорость и среднюю квадратичную скорость.

Скорость  $\mathcal{G}_H$ , соответствующая максимуму плотности вероятности  $f(\mathcal{G})$ , называют **наиболее вероятной скоростью**. Для идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ , она определяется из условия  $\frac{df(\mathcal{G})}{d\mathcal{G}} = 0$  и равна  $\mathcal{G}_H = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$  или

$$\mathcal{G}_H = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

**Средняя квадратичная скорость** определяется как квадратный корень из среднего квадрата скорости  $\overline{\mathcal{G}} = \sqrt{\overline{\mathcal{G}^2}}$  и связана со средней кинетической энергией поступательного движения молекул. Чтобы найти её с помощью распределения Максвелла, нужно определить отношение суммы квадратов скоростей молекул, содержащихся в единице объёма, к числу молекул в этом объёме:

$$\overline{\mathcal{G}^2} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} n \mathcal{G}^2 f(\mathcal{G}) d\mathcal{G} = \int_0^{\infty} \mathcal{G}^2 f(\mathcal{G}) d\mathcal{G}.$$

Для идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ , она равна

$$\overline{\mathcal{G}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \quad \text{или} \quad \overline{\mathcal{G}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad (7-14)$$

**Среднюю арифметическую скорость**  $\overline{\mathcal{G}}$  определяют как отношение суммы всех скоростей всех молекул в единице объёма к числу молекул в единице объёма:  $\overline{\mathcal{G}} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} n \mathcal{G} f(\mathcal{G}) d\mathcal{G} = \int_0^{\infty} \mathcal{G} f(\mathcal{G}) d\mathcal{G}$ .

Для идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ , она равна :

$$\bar{g} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \quad \dots \quad (7-15)$$

Эти скорости мало отличаются друг от друга по своим численным значениям :  
 $\bar{g} = 1,09\bar{g} = 1,22\bar{g}_u$ .

Экспериментально равновесное распределение частиц по скоростям было обнаружено Штерном, Истерманом и Симпсоном в 1947 году.

### 7.6. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

Барометрическая формула выражает закон изменения атмосферного давления при изменении высоты воздушного столба..

Известно, что атмосферное давление с высотой уменьшается. Установим закон изменения атмосферного давления в зависимости от высоты. Упростим задачу, считая температуру постоянной и не изменяющейся с высотой. При возрастании высоты на небольшую величину  $dx$  давление уменьшается на малую величину  $dP = -\rho g dx$ , где  $\rho$  - плотность газа,  $\rho = m_0 n$ ,  $m_0$  - масса молекулы. Удобно выразить плотность газа через макропараметры – температуру и давление. Для этого воспользуемся формулой (2.5) и получим  $n = \frac{P}{kT}$ , тогда

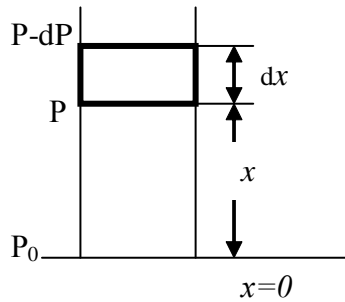


Рис.7.8

$$\rho = \frac{m_0 P}{kT}, \quad \text{а} \quad dP = -\frac{m_0 P g}{kT} dx.$$

Разделим переменные  $\frac{dP}{P} = -\frac{m_0 g}{kT} dx$

Интегрируя, получаем:

$\ln P = -\frac{m_0 g}{kT} x + \ln C$ , где  $C$  - постоянная интегрирования, которую находим из условия : при  $x=0$  и  $C=P_0$ . Тогда

$$\ln P - \ln P_0 = -\frac{m_0 g x}{kT} \quad \text{или} \quad \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{m_0 g x}{kT}.$$

После потенцирования получим барометрическую формулу

$$P = P_0 e^{-\frac{m_0 g x}{kT}}. \quad (7-16)$$

Учитывая, что масса молекулы может быть выражена через молярную массу и число Авогадро  $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$ , а  $N_A k = R$ , показатель экспоненты можно записать через молярную массу и универсальную газовую постоянную:

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g x}{RT}} \quad (7-16')$$

Так как при постоянной температуре  $P \sim n$ , то можно получить выражение для **распределения Больцмана**  $n = n_0 e^{-\frac{\mu g x}{RT}}$  или  $n = n_0 e^{-\frac{m_0 g x}{kT}}$ . Числитель показателя экспоненты представляет

собой потенциальную энергию частицы, находящейся в поле силы тяжести, а знаменатель пропорционален тепловой энергии. Распределение Больцмана справедливо, если частица находится в любом потенциальном поле, поэтому можно обозначить потенциальную энергию частицы через  $U(x)$ . Тогда распределение Больцмана будет иметь вид

$$n = n_0 e^{-\frac{U(x)}{kT}} \quad (7-17)$$

Распределение Больцмана – это распределение частиц по потенциальным энергиям. Потенциальная энергия зависит от выбора начала отсчёта, и может быть выражена как  $U(x) = U_0 + \tilde{U}(x)$ . Здесь  $U_0$  – потенциальная энергия частиц в начале отсчёта,  $\tilde{U}(x)$  – потенциальная энергия в положении  $x$ ,  $\tilde{U}(x)$  – изменение потенциальной энергии или рассматриваемый интервал потенциальных энергий. Число частиц, потенциальные энергии которых лежат в малом интервале  $\tilde{U}(x)$  от  $U_0$  до  $U(x)$ , согласно (3.16), равно:

$$\Delta n = n_0 e^{-\frac{U_0}{kT}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta U(x)}{kT}} \right).$$

Число частиц, потенциальные энергии которых лежат в малом интервале  $\tilde{U}(x)$  вблизи  $U(x)$ , равно:

$$\Delta n = n_0 e^{-\frac{U(x)}{kT}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta U(x)}{kT}} \right).$$

Доля частиц, потенциальные энергии которых лежат в малом интервале  $\tilde{U}(x)$  вблизи  $U(x)$ , определяется выражением:  $\frac{\Delta n}{n_0} = e^{-\frac{U(x)}{kT}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta U(x)}{kT}} \right)$ . Отсюда видно, что доля частиц  $\frac{\Delta n}{n_0}$ , потенциальная энергия которых лежит в заданном интервале  $\tilde{U}$  с ростом  $U$  уменьшается, а с ростом интервала  $\tilde{U}$  вблизи некоторого значения энергии  $U$  увеличивается.

При большом числе частиц  $n_0$  и бесконечно малом интервале энергий  $dU$  доля частиц  $\frac{dn}{n_0}$ , потенциальная энергия которых лежит в интервале  $dU$  вблизи потенциальной энергии  $U$ , имеет смысл вероятности того, что любая частица может иметь потенциальную энергию в указанном интервале вблизи заданного значения потенциальной энергии.

Таким образом, барометрическая формула и распределение Больцмана по потенциальным энергиям имеет вид распределения Гаусса.

## Лекция №8

**Статистика газов.** Микроскопические и макроскопические явления. Статистический и термодинамический методы исследования. Идеальный газ как статистическая система многих частиц. Основы молекулярно-кинетической теории. Давление, объем и температура газа как обобщенные характеристики состояния газа. Явления переноса в газах. Столкновение молекул. Средняя длина свободного пробега молекул. Диффузия. Осмос. Теплопроводность. Вязкое трение.

**8.1. Микроскопические и макроскопические явления. Статистический и термодинамический методы исследования. Идеальный газ как статистическая система многих частиц. Основы молекулярно-кинетической теории. Давление, объем и температура газа как обобщенные характеристики состояния газа.**

**Системой** называют конечную область пространства с находящимися в ней физическими объектами исследования.

Граница системы может быть как материальной (стенки сосуда), так и воображаемой; неподвижной или движущейся; проницаемой или непроницаемой. Система характеризуется не только особенностями своей границы, но и физическими или химическими свойствами вещества, находящегося в занимаемой системой области пространства.

**Макроскопическими системами** называют системы, содержащие большое количество физических объектов. **Термодинамические макроскопические системы** содержат большое количество молекул (атомов, ионов). Различают разные виды термодинамических систем (ТС): закрытые, открытые, адиабатные и изолированные.

**Закрытые ТС** это системы, не обменивающиеся веществом с другими системами.

**Открытые ТС** это системы, обменивающиеся веществом и энергией с другими системами.

**Адиабатные ТС** это системы, в которых нет теплообмена с другими системами.

**Изолированные ТС** это системы, не обменивающиеся с другими системами ни энергией, ни веществом.

Для описания макросистем в молекулярной физике используют основные параметры состояния – **температуру, давление, объём**. Любое теоретическое описание реальных систем возможно только на основе той или иной модели, в которой учитывают определённые особые свойства, а второстепенными пренебрегают. В молекулярной физике рассматривают следующие **основные модели: идеальный газ, реальный газ, идеальная жидкость, реальная жидкость, твёрдое тело, плазма**.

Макросистемы могут находиться в равновесном и неравновесном состоянии.

**Равновесными** состояниями называют такие, при которых макроскопические величины, описывающие поведение изолированной системы, остаются неизменными во времени и одинаковыми в пространстве.

В **неравновесном** состоянии макровеличины, характеризующие состояние системы, изменяются в пространстве и во времени, при этом в системе возникают потоки вещества и энергии (явления переноса).

Неравновесные состояния сложных систем изучают, используя методы **физической кинетики**.

Макроскопические системы могут быть **линейными** и **нелинейными**. В слабо неравновесных состояниях, где градиенты величин малы, переносимые потоки и силы, вызывающие их, **линейно** зависят от градиентов. В сильно неравновесных состояниях, где градиенты величин велики, потоки являются более сложными функциями градиентов.

При изучении состояния систем используют **термодинамический** и **статистический** подходы.

**Термодинамический подход.** Систему рассматривают без учёта её внутренней структуры. При этом используют понятия и величины, относящиеся к системе в целом. Например, идеальный газ в состоянии равновесия характеризуют объёмом, давлением и температурой ( $V$ ,  $P$  и  $T$ ). Экспериментально устанавливают связь между этими величинами. Для термодинамического подхода характерно использование термодинамических потенциалов для описания систем, находящихся в равновесном или слабо неравновесном состоянии. Для сильно неравновесных нелинейных систем описание состояния через потенциалы невозможно.

**Статистический подход.** Динамическое описание системы, содержащей большое число частиц, невозможно. Для изучения макросистем применяют статистические методы, использующие понятия и величины, относящиеся не к отдельным частицам, а к большим совокупностям частиц. Законы поведения совокупностей большого числа частиц, использующие статистические методы, называются статистическими закономерностями. Эти закономерности, как и величины, описывающие состояние системы, зависят от того, в каком состоянии находится система: равновесном или неравновесном.

## 8.2. Столкновения молекул и явления переноса в идеальном газе

Взаимодействие молекул, в частности столкновение между молекулами газа, играет важную роль в процессе установления равновесного состояния.

Практически в земных условиях из-за наличия сил сопротивления (сил трения) все системы, в которых не происходит притока энергии извне, являются диссипативными. Если диссипативную систему вывести из состояния равновесия, а затем предоставить самой себе, то она постепенно перейдет в равновесное состояние. Время, в течение которого система достигает равновесного состояния, называют **временем релаксации**. Время релаксации различно относительно разных параметров, по которым система может отклоняться от равновесного состояния.

Взаимодействия молекул, их столкновения, являются тем механизмом, который приводит систему (газ) в равновесное состояние. В идеальном газе столкновения происходят в основном между парами молекул, одновременным столкновением трёх и более молекул можно пренебречь.

Вывести систему, представляющую собой идеальный газ, из равновесного состояния можно, например, нагрев одну часть газа, то есть нарушить тепловое равновесие. Если газ после этого предоставить самому себе, то через некоторое время температура снова станет одинаковой во всех частях газа. Это выравнивание происходит благодаря непрерывному тепловому движению молекул. В нагретой части больше быстрых молекул, имеющих большую тепловую энергию, чем в других частях газа, поэтому быстрые молекулы переходят туда, где их меньше, таким образом, их число становится равным повсюду. Одновременно происходит перемещение молекул и в нагретую область, благодаря соударениям, так что число частиц в единице объема в среднем не изменяется. Происходит только перенос энергии из той части газа, где она больше, туда, где она меньше. Этот процесс называется **теплопроводностью**.

Если систему вывести из равновесия, добавив примесь другого газа, так, чтобы при одинаковых во всем объеме давлении и температуре, концентрация примеси в одной части была выше, чем во всех других, то спустя определенное время система перейдет в равновесное состояние за счет перемещения молекул примеси из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией. В данном процессе, который называется **диффузией**, происходит перенос массы примеси. Время релаксации системы в этом случае не равно времени релаксации системы, стремящейся к тепловому равновесию.

Равновесие газа может быть нарушено, если одной из его частей сообщена скорость, отличная от скорости течения соседних частей. В этом случае через некоторое время, благодаря переносу импульса упорядоченного движения от более быстрых слоев к менее быстрым, скорости слоев выравниваются. Этот процесс называется **вязкостью**.

Все эти процессы можно рассматривать как **явления переноса**, подходя к их изучению с формальной стороны одинаково: выделяя переносимую величину, выделяя причину переноса, вводя уравнение переноса и времена релаксации.

Как уже было отмечено выше, механизм, который приводит систему (газ) в равновесное состояние, обусловлен столкновениями молекул. Столкновения молекул являются случайными событиями. Они зависят от скоростей молекул, их размеров и концентрации. Чтобы анализ явлений переноса можно было провести количественно, необходимо определить основные количественные характеристики молекулярного движения.

**Поперечное сечение столкновений.** Молекулы газа непрерывно и беспорядочно движутся. Беспорядочное движение обусловлено многочисленными столкновениями молекул. Изменение направления движения молекулы на заметный угол под действием другой молекулы называют столкновением молекул или рассеянием. Так как столкновения молекул являются случайными событиями, то результаты столкновений могут быть предсказаны лишь вероятностно. Вероятность

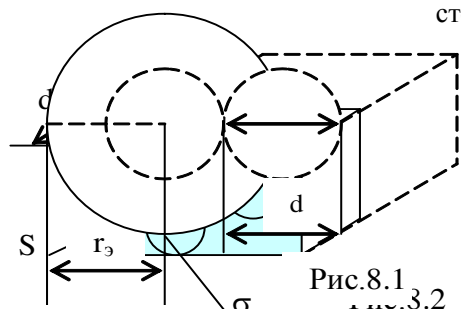


Рис.8.1  
...3.2

столкновения описывают с помощью поперечного сечения  $\sigma$  (или эффективной площади сечения или сечения рассеяния). Падающая частица считается точечной, а частицы-мишени, с которыми она сталкивается, имеют такие пространственные размеры, что максимальная площадь их поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной направлению движения падающей частицы, равна  $\sigma$ , а её эффективный радиус  $r_0$ , равен

диаметру молекулы  $d$  (рис.8.1). Тогда поперечное сечение рассеяния можно выразить через эффективный диаметр молекулы:

$$\sigma = \pi d^2 \quad (8-1)$$

Это воображаемая, а не геометрическая площадь. Пусть  $S$  – площадь поперечного сечения (на рис.8.2 выделена цветом) некоторого объёма газа. В слое объёмом  $dV=Sdx$  находится  $N=n_0Sdx$  частиц-мишеней, где  $n_0$  – концентрация молекул газа. Сумма их поперечных сечений  $dS$ , которая закрывает часть площади  $S$ , равна:

$$dS = \sigma n_0 S dx.$$

Следовательно, вероятность того, что падающая частица попадёт в одну из частиц-мишеней в слое толщиной  $dx$ , равна:

$$W = \frac{dS}{S} = \sigma n_0 dx \quad (8-2)$$

Отсюда можно выразить сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{W}{n_0 dx} \quad (8-3)$$

Видно, что  $\sigma$  – воображаемая площадь и определяется вероятностью столкновения частиц. Вероятность столкновения тем выше, чем выше концентрация частиц. Следует отметить слабую зависимость  $\sigma$  от температуры. Чем выше температура, тем выше кинетическая энергия теплового движения молекул, тем меньше отклонения от первоначального движения испытывают молекулы, то есть тем меньше вероятность столкновения и, следовательно, тем меньше сечение рассеяния.

### 8.3. Среднее число столкновений и среднее время свободного пробега молекул

Определим среднее число столкновений молекулы газа за одну секунду. Положим, что молекулы-мишени равномерно распределены по объёму с концентрацией  $n$ . Пусть все молекулы, кроме одной, покоятся. Тогда движущаяся молекула за одну секунду пройдёт расстояние, численно равное средней скорости  $\bar{g}$ , и столкнётся со всеми молекулами, которые окажутся на её пути. Это будут те молекулы, центры которых расположены в объёме цилиндра, длиной  $\bar{g}$  и площадью основания  $\sigma$  (рис.8.3). Объём этого цилиндра равен  $V = \sigma \bar{g}$ , а число молекул в нём равно  $N = n \sigma \bar{g}$ . Таким же будет

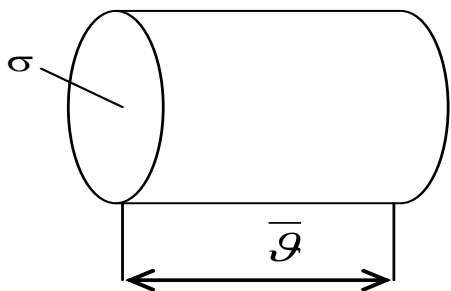


Рис.8.3

число столкновений, которое испытывает молекула. Если учесть, что движутся все молекулы в выделенном объёме, то при подсчёте числа столкновений нужно учитывать не абсолютную скорость (относительно стенок сосуда), а относительную скорость молекулы, то есть скорость относительно тех молекул, с которыми она сталкивается. Определим относительную скорость двух молекул, движущихся со скоростями  $\vec{g}_1$  и  $\vec{g}_2$ :  $\vec{g}_{отн} = \vec{g}_1 - \vec{g}_2$ . Возведём в квадрат обе части последнего равенства и получим:

$$g_{отн}^2 = g_1^2 + g_2^2 - 2g_1g_2 \cos(\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2).$$

Усредним это уравнение и получим:  $\overline{g_{отн}^2} = \overline{g_1^2 + g_2^2 - 2g_1g_2 \cos(\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2)}$ . Учтём, что  $\overline{\cos(\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2)} = 0$ , а  $\overline{g_1} = \overline{g_2}$ , получим  $\overline{g_{отн}} = \bar{g}\sqrt{2}$ .

Учитывая это, среднее число столкновений молекулы за одну секунду равно:

$$Z_0 = \sqrt{2}\sigma\bar{g}n \quad (8-4)$$

С учётом формулы (8-1) получим:

$$Z_0 = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{g}n \quad (8-5)$$

В системе интернациональной единица измерения  $Z_0$  равна  $\text{с}^{-1}$ .

**Среднее число столкновений за секунду**, испытываемое **всеми  $N$  молекулами** определяют с учётом того, что в столкновениях участвуют пары молекул, а вероятностью столкновения трёх и более молекул пренебрегают:

$$Z = \frac{Z_0 N}{2} \quad (8-6)$$

**Среднее число столкновений молекул за время  $t$ :**

$$Z_t = \frac{Z_0 N}{2} t \quad (8-7)$$

Зная среднее число столкновений одной молекулы за секунду  $Z_0$ , можно найти время между двумя последовательными соударениями молекулы – **время свободного пробега** :

$$\tau = \frac{1}{Z_0} \quad (8-8)$$

#### 8.4. Средняя длина свободного пробега молекул

Расстояние, которое молекула проходит между двумя последовательными столкновениями, называется **длиной свободного пробега**. Так как молекул много, их движения беспорядочны и столкновения случайны, то длины свободного пробега на зигзагообразном пути молекулы могут быть разными. Поэтому целесообразно говорить о **средней длине свободного пробега  $\bar{\lambda}$** . Величины сечения рассеяния и концентрации молекул не зависят от пути, пройденного частицей, поэтому вероятность столкновения растёт пропорционально пройденному частицей пути. Длина пути  $\lambda$ , при которой вероятность столкновения равна единице, называется **средней длиной свободного пробега**. Для математической записи  $\bar{\lambda}$  используем формулу (8-2), заменив  $dx$  на  $\bar{\lambda}$  и приравняв вероятность столкновения единице, получим:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{Z_0} \quad (8-9)$$

Средняя длина свободного пробега может быть выражена через среднюю скорость молекул и среднее время свободного пробега, учитывая то, что молекулы идеального газа движутся равномерно и прямолинейно между двумя последовательными соударениями:

$$\bar{\lambda} = \bar{g}\tau = \frac{\bar{g}}{Z_0} \quad (8-10)$$

Учитывая формулу (8-5), получим:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad (8-11)$$

Среднюю длину свободного пробега  $\bar{\lambda}$  можно выразить через параметры состояния газа – давление и температуру, учитывая, что  $n = \frac{p}{kT}$ , получим:

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \quad (8-12)$$

Средняя длина свободного пробега при фиксированной температуре обратно пропорциональна давлению, а при фиксированном давлении – прямо пропорциональна температуре.



## 8.5. Диффузия в газах

**Диффузией** называется явление взаимного проникновения двух или нескольких соприкасающихся веществ. Каждый из компонентов смеси переходит из области с большей концентрации в область с меньшей концентрацией. При диффузии, таким образом, происходит перенос вещества. Диффузия в газах возникает и в том случае, если они неоднородны по концентрации или плотности (**самодиффузия**). Для количественного описания этого явления используют понятие диффузионного потока. Диффузионный поток можно выразить через массу переносимого вещества или через число молекул (или молей) переносимого вещества.

**Диффузионный поток** как **поток массы** определяется массой вещества, перенесённого через площадку  $dS$ , перпендикулярную направлению переноса, в единицу времени. Часто используют понятие плотности диффузионного потока. **Плотность диффузионного потока** определяется массой вещества, перенесённого через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса, в единицу времени. Плотность диффузионного потока равна:

$$d\Pi = \frac{dM}{dSdt}, \quad (8-13)$$

где  $dM$ - элемент массы вещества, переносимого через бесконечно малую площадку  $dS$ , перпендикулярную направлению переноса, за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ .

**Диффузионный поток** как **поток частиц** определяется числом частиц вещества, перенесённого через площадку  $dS$ , перпендикулярную направлению переноса, в единицу времени. **Плотность диффузионного потока** определяется числом частиц вещества, перенесённого через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса, в единицу времени. В этом случае плотность диффузионного потока равна:

$$d\Pi = \frac{dN}{dSdt}, \quad (8-14)$$

где  $dN$ - элементарное число частиц вещества, переносимого через бесконечно малую площадку  $dS$ , перпендикулярную направлению переноса, за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ .

Основной закон диффузии – **закон Фика**:

*плотность диффузионного потока какого-либо компонента вещества прямо пропорциональна градиенту концентрации (плотности) этого компонента со знаком «минус»:*

$$\frac{dM}{dSdt} \vec{n} = -D \text{grad} \rho \quad (8-15)$$

Здесь  $\vec{n}$  - вектор положительной нормали к площадке, через которую переносится вещество; его направление совпадает с направлением переноса вещества. **Градиент плотности**  $\text{grad}$  - это вектор, который, характеризует быстроту изменения скалярной величины – плотности - в пространстве и направлен в сторону наиболее быстрого возрастания данной плотности.  $D$  - коэффициент диффузии. Знак «минус» показывает, что направление потока вещества противоположно градиенту плотности.

Градиент плотности можно записать так:

$$\text{grad} \rho = \frac{d\rho}{dx} \vec{i} + \frac{d\rho}{dy} \vec{j} + \frac{d\rho}{dz} \vec{k}, \quad (8-16)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - единичные вектора, направленные вдоль осей  $x, y, z$ , соответственно.

Для одномерного случая  $\text{grad}\rho = \frac{d\rho}{dx} \vec{i}$  и уравнение (8-15) может быть переписано в скалярном виде при условии, что направления векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{i}$  совпадают:

$$\frac{dM}{dSdt} = -D \frac{d\rho}{dx} \quad (8-17)$$

Аналогично можно записать закон Фика и через поток частиц:

$$\frac{dN}{dSdt} \vec{n} = -D \text{grad}n \quad (8-18)$$

**Коэффициент диффузии** численно равен плотности диффузионного потока при единичном градиенте концентрации (плотности) и СИ измеряется в  $\frac{м^2}{с}$ .

В идеальных газах механизм переноса вещества обусловлен соударениями молекул, поэтому, чем выше температура газа, тем больше диффузионный поток и коэффициент диффузии. Коэффициент диффузии, а точнее самодиффузии (диффузии вещества самого в себя, обусловленной неоднородностью концентрации) для идеальных газов можно выразить так:

$$D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \quad (5-19)$$

Здесь  $\bar{\lambda}$  - средняя длина свободного пробега молекул идеального газа,  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  - средняя

арифметическая скорость молекул. При фиксированной температуре  $\bar{\lambda}$  обратно пропорциональна давлению, а скорость является постоянной, поэтому коэффициент диффузии. обратно пропорционален давлению. При фиксированном давлении  $\bar{\lambda}$  прямо пропорциональна T, а средняя арифметическая скорость  $\sim \sqrt{T}$ , поэтому коэффициент диффузии в этом случае пропорционален  $\sqrt{T^3}$ .

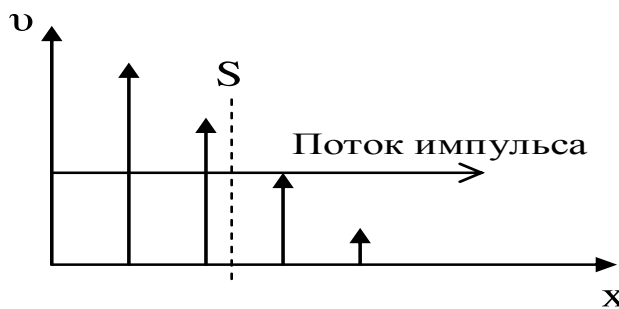


Рис.8.4

## 8.6. Вязкость газов

**Вязкость газов** – это свойство, благодаря которому выравниваются скорости упорядоченного движения разных слоёв газа. Можно дать и другое определение. **Вязкость газов** – это явление переноса, при котором происходит перенос импульса упорядоченного движения от слоёв, движущихся с большей

скоростью, к слоям, движущимся с меньшей скоростью.. Переносимый импульс можно количественно оценить с помощью **потока импульса**, равного импульсу упорядоченного движения слоёв, переносимому через площадку  $dS$ , параллельную слоям и перпендикулярную к направлению переноса (рис.8.4), в единицу времени. Плотность элементарного потока импульса можно записать так:

$$d\Pi_u = \frac{dP}{dSdt} \quad (8-20)$$

Основной закон вязкости:

*плотность потока импульса прямо пропорциональна градиенту скорости со знаком «минус».*

Знак «минус» показывает, что направление потока импульса противоположно направлению градиента скорости упорядоченного движения.

$$\frac{dP}{dSdt} \vec{n} = -\eta \text{grad} \vartheta \quad (8-21)$$

Здесь  $\vec{n}$  - вектор положительной нормали к площадке S, через которую переносится импульс, его направление совпадает с направлением переноса импульса,  $\text{grad} \vartheta$  - *градиент скорости*, направлен в сторону наиболее быстрого возрастания скорости,  $\eta$  - *коэффициент динамической вязкости*. Для одномерного случая, когда направления векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{i}$  совпадают:

$$\frac{dP}{dSdt} = -\eta \frac{d\vartheta}{dx} \quad (8-22)$$

Динамический коэффициент вязкости численно равен потоку импульса при единичном градиенте скорости. В СИ он измеряется в  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$  или в Па·с.

Для идеальных газов коэффициент динамической вязкости можно выразить следующим образом:

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{\vartheta} \rho \quad (8-23)$$

Коэффициент вязкости зависит прямо пропорционально от  $\sqrt{T}$  и не зависит от давления, поскольку в формулу (8-22) входят как множители средняя длина свободного пробега, обратно пропорциональная давлению при фиксированной температуре, и плотность газа, прямо пропорциональная давлению.

Можно записать основной закон вязкости и через силу вязкого трения, которая направлена по касательной к слоям (к площадке S), используя второй закон Ньютона, согласно которому  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{вяз}}$ .

Для одномерного случая получим:

$$\vec{F}_{\text{вяз}} = -\eta \frac{d\vartheta}{dx} dS \quad (8-24)$$

Явление вязкости бывает стационарным и нестационарным. О стационарной вязкости говорят, когда градиент скорости поддерживают постоянным. Нестационарная вязкость происходит с изменением градиента, в результате выравниваются скорости взаимодействующих слоёв.

Для измерения коэффициента вязкости используют приборы – *вискозиметры*. Для измерения коэффициента вязкости необходимо, чтобы движение газа было *ламинарным*, то есть плавным, без завихрений. Этого можно достичь в очень узких трубках – капиллярах. Поэтому такие вискозиметры, в которых используют капилляры, называют *капиллярными вискозиметрами*.

## 8.7. Теплопроводность газов

Явление возникновения потока тепла в газе (или любом другом веществе) называется *теплопроводностью*. Перенос количества теплоты можно описать с помощью потока теплоты.

*Потоком теплоты* называется количество теплоты, перенесённое через площадку, перпендикулярную направлению переноса, в единицу времени. Плотность потока теплоты, как количество теплоты, перенесённое через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса, в единицу времени, можно выразить так:

$$d\Pi_T = \frac{dQ}{dSdt} \quad (8-25)$$

Основной закон теплопроводности – **закон Фурье**:  
 плотность потока теплоты прямо пропорциональна градиенту температуры со знаком «минус»:

$$\frac{dQ}{dSdt} \vec{n} = -\chi \text{grad}T \quad (8-26)$$

Здесь  $\vec{n}$  – вектор положительной нормали к площадке  $dS$ , через которую переносится количество теплоты, его направление совпадает с направлением переноса количества теплоты,  $\text{grad}T$  – *градиент температуры*, направлен в сторону наиболее быстрого возрастания температуры,  $\chi$  – *коэффициент теплопроводности*. Для одномерного случая, когда направления векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{i}$  совпадают:

$$\frac{dQ}{dSdt} = -\chi \frac{dT}{dx} \quad (8-27)$$

Коэффициент теплопроводности численно равен потоку теплоты при единичном градиенте температуры. Для идеальных газов он может быть выражен так:

$$\chi = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{\rho} C_{mv} \quad (8-28)$$

Здесь  $C_{mv}$  – удельная теплоёмкость при постоянном объёме. Коэффициент теплопроводности прямо пропорционален  $\sqrt{T}$  и не зависит от давления. В СИ коэффициент теплопроводности измеряется в  $\frac{Вт}{м \cdot К}$ .

### 8.8. Осмос. Осмотическое давление

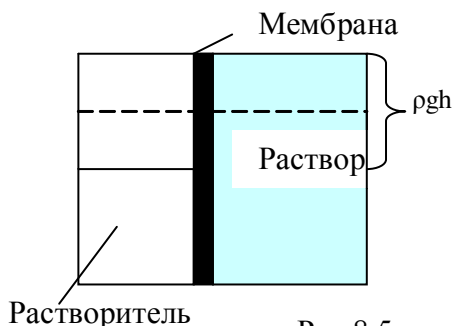


Рис.8.5

Явление проникновения растворителя в раствор через пористую перегородку (мембрану), непроницаемую для растворённого вещества и отделяющую раствор от чистого растворителя, называется *осмосом*.

Через мембрану осуществляется обмен молекулами растворителя, находящегося по обе стороны от мембраны. В результате преимущественного движения молекул растворителя в сторону раствора равновесие в системе растворитель – мембрана – раствор поддерживается с помощью осмотического давления (рис.8.5), производимого растворённым веществом в растворе. Осмотическое давление можно измерить с помощью гидростатического давления раствора, поскольку подъём уровня жидкости раствора будет происходить до тех пор, пока гидростатическое давление, равное  $\rho gh$ , не окажется равным осмотическому.

Это явление было открыто в середине 19 века. Количественное исследование осмоса проводил ботаник Пфеффер в 1877 году. А первый нобелевский лауреат по химии Якоб Хендрик Вант-Гофф (1852-1911; премия 1901 года за вклад в термодинамику и химию) вывел простое уравнение, аналогичное уравнению состояния идеального газа:

$$P_{oc} V = \nu RT \quad (8-29)$$

Здесь  $P_{oc}$  – осмотическое давление,  $V$  – объём раствора,  $\nu$  – число молей молекул растворённого вещества,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура. Осмотическое давление не зависит от вида мембраны или от рода растворителя. Закон Вант-Гоффа не справедлив

для электролитов.

Осмотическое давление играет большую роль в жизни животных и растений. Различают *статический и динамический методы измерения осмотического давления*. Статический метод основан на измерении избыточного гидростатического давления по высоте столба жидкости раствора. Динамический метод заключается в измерении скоростей всасывания и выдавливания растворителя из осмотической ячейки при различных значениях избыточного давления. В качестве *мембран* обычно применяют плёнку из целлофана, природных и синтетических полимеров, пористые керамические и стеклянные перегородки. Осмотическое давление может достигать значительной величины. Например, 4%-ный раствор сахара при комнатной температуре имеет осмотическое давление около 0,3 МПа, а 10%-ный – около 10 МПа. Осмотическое давление морской воды составляет 0,27 МПа.

Осмотическое давление необходимо учитывать и в медицине, например, при вливании в вены раствора поваренной соли (физиологический раствор), необходимо рассчитывать концентрацию соли в растворе, чтобы воспрепятствовать разбуханию красных кровяных телец и разрыву их оболочек. Известно, что давление внутри красных кровяных шариков равно 0,8 МПа, а также то, что кровь является электролитом, поэтому формула Вант-Гоффа даёт большие погрешности при расчётах и завышенное количество требуемой поваренной соли. Потому для расчёта концентрации поваренной соли используется адаптированная для электролитов формула Вант-Гоффа, где учитывается поправка к осмотическому давлению за счёт электрических сил. Осмотическое давление должно быть равно 0,7 МПа, поскольку вместе с внешним давлением оно должно уравнивать давление внутри красных кровяных телец. В результате рассчитанная концентрация поваренной соли в физиологическом растворе должна быть равна 8,9 г/л.

#### ЛЕКЦИЯ №9

**Основы термодинамики.** Распределение энергии по степеням свободы молекул. Внутренняя энергия. Первое начало термодинамики. Работа газа при его расширении. Теплоемкость. Уравнение Майера. Адиабатический и политропный процессы. Второе начало термодинамики. Круговые, необратимые и обратимые процессы. Принцип действия тепловой машины. Цикл Карно и его КПД. Энтропия. Второе начало термодинамики и его статистический смысл. Связь энтропии и вероятности.

#### 9.1. Распределение энергии по степеням свободы молекул

*Термодинамика* – наука о наиболее общих свойствах физических макросистем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и о процессах перехода между этими состояниями. Термодинамика построена на основе фундаментальных начал (законов), которые являются обобщением большого числа наблюдений и выполняются независимо от конкретной природы тел, образующих систему. Однако рассматривая основные понятия термодинамики, мы будем использовать и статистическую интерпретацию.

**Основными понятиями термодинамики** являются такие понятия как состояние, процесс, цикл, внутренняя энергия, работа, количество теплоты, теплоёмкость, энтропия, свободная энергия, энтальпия, функция Гиббса.

Среднюю кинетическую энергию движения молекулы идеального газа можно определить по формуле:

$$\bar{E} = \frac{i}{2} kT \quad (9-1)$$

**Число степеней свободы  $i$**  определяется числом независимых координат и осей, описывающих движение частицы в пространстве. На каждую степень свободы статистической системы приходится одна и та же энергия, равная  $\frac{1}{2} kT$ . В этом состоит суть **теоремы о равномерном распределении тепловой энергии по степеням свободы**. Для сложных молекул, состоящих из нескольких атомов, число степеней свободы увеличивается за счёт вращательных и колебательных. Если пренебречь изменением

потенциальной энергии взаимодействия частиц, то молекулы можно рассматривать как «жесткие». Для жестких **двухатомных** молекул число степеней свободы  $i$  равно 5, из них 3 – поступательных (три независимые координаты  $x, y, z$ , описывающие положение частицы в пространстве) и 2 вращательных (две независимых оси вращения). Для жестких **трехатомных** и **многоатомных** молекул число степеней свободы равно 6, из них 3 поступательных и 3 вращательных. Для жестких одноатомных молекул число степеней свободы равно 3 и все они поступательные.

Энергия – величина аддитивная. Поэтому среднюю кинетическую энергию одного моля молекул можно определить, усреднив энергии всех частиц одного моля:  $\overline{E}_\mu = \frac{i}{2} N_a kT$ , где  $N_a$  – число молекул в одном моле вещества (число Авогадро). Учитывая, что произведение числа Авогадро и постоянной Больцмана равно универсальной газовой постоянной, получим энергию одного моля молекул:

$$\overline{E}_\mu = \frac{i}{2} RT \quad (9-2)$$

Среднюю кинетическую энергию любого количества идеального газа можно определить, усреднив энергии всех рассматриваемых частиц. Учитывая, что количество молекул в одном моле вещества очень велико, следовательно, средние кинетические энергии разных молей молекул практически одинаковы. Тогда средняя кинетическая энергия любого количества вещества может быть определена по формуле:

$$\overline{E} = \frac{i}{2} RT \nu \quad (9-3)$$

## 9.2. Внутренняя энергия

Под **внутренней энергией системы** понимают полную суммарную энергию всех её структурных элементов.

Внутренняя энергия идеального газа складывается только из кинетических энергий молекул, так как потенциальной энергией их взаимодействия можно пренебречь.

Внутренняя энергия идеального газа  $U$  для любого количества молей  $\nu$  может быть определена через среднюю кинетическую энергию, определяемую формулой (9-3). Так как средняя кинетическая энергия идеального газа зависит только от температуры и числа степеней свободы молекулы, то и внутренняя энергия идеального газа также зависит от температуры и числа степеней свободы молекулы:

$$U = \frac{i}{2} \nu RT \quad (9-4)$$

Изменение внутренней энергии идеального газа определяется только изменением температуры и не зависит ни от давления, ни от объёма:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T \quad (9-5)$$

Изменить внутреннюю энергию газа можно, например, совершив над ним работу. Но независимо от того, каким способом совершают работу, изменение внутренней энергии идеального газа зависит только от изменения температуры. Другими словами, изменение внутренней энергии зависит только от параметров начального и конечного состояния, а именно от температуры начального  $T_1$  и конечного состояния  $T_2$ , и не зависит от процесса перехода из начального в конечное состояние. Поэтому **внутренняя энергия – функция состояния**. Если газ вернули в первоначальное состояние, то изменение внутренней энергии равно нулю.

Для элементарного процесса  $dU = \frac{i}{2} \nu R dT$ . Можно внести постоянные  $\nu$  и  $R$  под знак дифференциала

$dU = d\left(\frac{i}{2} \nu RT\right)$ . Таким образом, изменение внутренней энергии является полным дифференциалом величины, стоящей в скобках, и этот факт может служить признаком функции состояния.

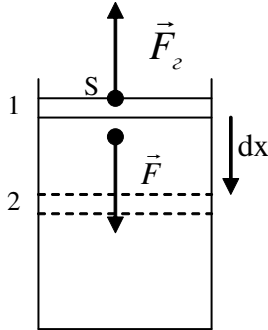


Рис.9.1

### 9.3. Работа газа при его расширении

Рассмотрим сжатие идеального газа, находящегося под поршнем (рис.9.1). Под действием внешней силы  $\vec{F}$  переместим поршень на бесконечно малую величину  $d\vec{x}$ , настолько малую, что будем считать силу  $\vec{F}$  постоянной. Назовём работу постоянной силы по перемещению поршня на бесконечно малую величину *элементарной работой* и обозначим  $\delta A$ .

Элементарная работа может быть определена как работа постоянной силы через скалярное произведение силы на перемещение:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{x} \quad (9-6)$$

Поскольку направление силы и перемещения совпадают, то  $\delta A = F dx$ . Газ, находящийся под поршнем, препятствует сжатию и давит на поршень силой  $\vec{F}_2$ , равной по величине, противоположной по направлению и приложенной к поршню (рис.4.1). Элементарная работа самого газа  $\delta A_2 = \vec{F}_2 d\vec{x}$ . Так как сила  $\vec{F}_2$  и перемещение  $d\vec{x}$  направлены в противоположные стороны, работа самого газа при равномерном сжатии отрицательна и равна по величине работе внешней силы, сжимающей газ  $\delta A_2 = -\delta A$ . Сила, действующая на единицу площади поверхности поршня  $S$  со стороны газа, есть давление газа  $P$ . Поэтому можно выразить величину силы  $\vec{F}_2$  через давление:  $F_2 = PS$ . Тогда элементарная работа газа будет равна:  $\delta A_2 = -PS dx$ . Но  $dV = S dx$  есть величина приращения объёма газа. Тогда элементарная работа газа равна:

$$\delta A_2 = -PdV, \quad (9-7)$$

а работа внешней силы по сжатию газа равна  $\delta A = PdV$ .

Для определения работы по перемещению поршня на значительную величину  $\Delta x$ , в результате которой объём газа изменяется на  $\Delta V$ , нужно учесть процесс, происходящий с газом. Работу в этом случае определяют через интеграл:

$$A_{12} = \int \delta A = \int_{V_1}^{V_2} PdV \quad (9-8)$$

**Работа газа** (или над газом) зависит от процесса (т.е. от последовательности промежуточных состояний) и поэтому является *функцией процесса*. Работа не является полным дифференциалом, отсюда и обозначение элементарной работы  $\delta A$ , а не  $dA$ .

Рассмотрим работу, совершаемую газом, при различных процессах. Будем обозначать в дальнейшем элементарную работу газа просто через  $\delta A$  и считать её положительной, если газ расширяется ( $dV > 0$ ), и отрицательной, если газ сжимают ( $dV < 0$ ).

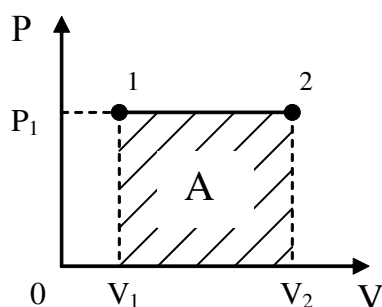


Рис.9.2

Рассмотрим **изохорический процесс**. При изохорическом процессе объём газа не изменяется, приращение объёма равно нулю, следовательно, работа газа равна нулю.

Поскольку работу в любом случае можно определить, пользуясь формулой (9-8), для математической интерпретации работы удобно изображать любой процесс на диаграмме (P,V). Работа на такой диаграмме равна площади фигуры под кривой, изображающей тот или иной процесс, происходящий с газом.

Рассмотрим **изобарический процесс** (рис. 9.2). Используя формулу (9-8) найдём работу газа при переходе из состояния 1 в состояние 2:  $A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV$ .

Так как для данного количества вещества давление остаётся постоянным при изобарическом процессе, то его можно вынести за знак интеграла, тогда получим :

$A_{12} = P \int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1)$ . Обозначим  $\Delta V = V_2 - V_1$ . С учётом этой записи работа при изобарическом процессе определяется по формуле:

$$A_{12} = P\Delta V \quad (9-9)$$

Используя рис.9.2, можно записать работу через указанные параметры состояния:  $A_{12} = P_1(V_2 - V_1)$ . Такую же формулу мы получим, находя площадь заштрихованного прямоугольника. Часто бывает удобно выражать работу через изменение температуры. Для этого нужно использовать уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона) для 1 и 2 состояний:

$P_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1$  и  $P_1 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2$ . Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R \Delta T \quad (9-10)$$

При изобарическом сжатии конечный объём меньше начального и работа газа отрицательна, то есть газ препятствует сжатию.

Формула (9-7) позволяет выразить физический смысл молярной постоянной R. Для одного моля вещества ( $\frac{m}{\mu} = 1 \text{ моль}$ ) работа определяется как  $A = R\Delta T$ . Отсюда ясен **физический смысл R**, которая определяется работой изобарического расширения одного моля идеального газа при изменении температуры на один кельвин.



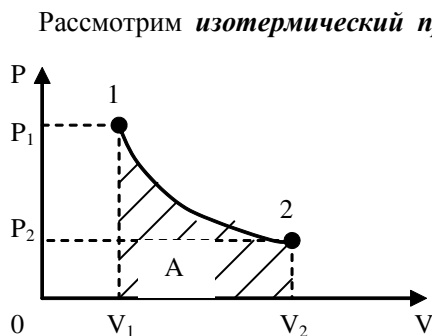


Рис.9.3

Рассмотрим *изотермический процесс* (рис.9.3). При изотермическом процессе температура остаётся постоянной, а давление и объём связаны между собой обратной пропорциональной зависимостью. В этом случае, используя формулу (9-8) для определения работы, уже нельзя вынести давление за знак интеграла. Давление выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$P = \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{V}.$$

Подставим правую часть этого уравнения в (9-8) и вынесем за знак интеграла все постоянные:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT (\ln V_2 - \ln V_1).$$

Учитывая, что разность логарифмов есть логарифм отношения, получим:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9-11)$$

Используя закон Бойля- Мариотта:  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$ , можем выразить работу и через отношение давлений:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (9-12)$$

Рассмотренные примеры подтверждают, что работа является функцией процесса.

#### 9.4. Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики учитывает энергетический баланс системы. В этом суть *первого начала термодинамики*. Можно сказать, что первое начало термодинамики является законом сохранения энергии для термодинамических систем.

Для элементарного процесса первое начало термодинамики можно записать следующим образом:  $dU = \delta Q + \delta A_{\text{внеш}}$ . Работа самого газа связана с работой внешних сил равенством  $\delta A_{\text{внеш}} = -\delta A$ . Тогда математическая запись первого начала термодинамики будет иметь вид:  $dU = \delta Q - \delta A$ . Однако в тех случаях, когда происходит теплообмен и система получает (или отдаёт тепло), удобно записывать первое начало в виде:

$$\delta Q = dU + \delta A \quad (9-13)$$

**Количество теплоты, полученное системой, в общем случае идёт на изменение внутренней энергии системы и на совершение системой работы.**

Для конечного процесса первое начало термодинамики можно записать так:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} \quad (9-14)$$

Первое начало термодинамики для *изобарического процесса* имеет вид:

для элементарного процесса  $\delta Q = dU + \delta A$ , для конечного процесса  $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$ , так как в ходе данного процесса изменяется температура газа и объём, следовательно, изменяется его внутренняя энергия и совершается работа.

Учитывая, что  $\Delta U$  - функция состояния и определяется формулой (9-5), а работа  $A_{12}$ —функция процесса и определяется формулой (9-10), получим для изобарического процесса:

$$Q_{12} = \left( \frac{i+2}{2} \right) \nu R \Delta T \quad (9-15)$$

При поступлении некоторого количества теплоты в систему, её температура возрастает,  $\Delta T > 0$ , и поступившее количество теплоты положительно  $Q_{12} > 0$ .

Если система отдаёт некоторое количество теплоты, её температура понижается,  $\Delta T < 0$ , и отданное количество теплоты отрицательно  $Q_{12} < 0$ .

Применим первое начало термодинамики к *изохорическому процессу*. При изохорическом процессе объём остаётся постоянным и  $\Delta V = 0$ , следовательно, работа газа равна нулю и первое начало термодинамики имеет вид для элементарного процесса  $\delta Q = dU$  и для конечного процесса  $Q_{12} = \Delta U_{12}$ . Всё количество теплоты, переданное системе (или отданное системой), идёт на изменение внутренней энергии системы. Учитывая выражение для изменения внутренней энергии, получим для изохорического процесса:

$$Q_{12} = \frac{i}{2} \nu R \Delta T \quad (9-16)$$

Применим первое начало термодинамики к *изотермическому процессу*, при котором температура неизменна, а, следовательно, внутренняя энергия системы не изменяется, всё полученное системой количество теплоты идёт на совершение системой макроскопической механической работы. В этом случае первое начало термодинамики имеет вид для элементарного процесса  $\delta Q = \delta A$  и для конечного процесса  $Q_{12} = A_{12}$ . С точки зрения преобразования теплоты в механическую работу, это самый выгодный процесс.

### 9.5. Теплоемкость. Уравнение Майера

**Удельная теплоемкость вещества** величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}$$

Единица удельной теплоемкости — джоуль на килограмм-кельвин (Дж/(кг•К)).

**Молярная теплоемкость**— величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT} \quad (9-17)$$

где  $\nu = m/M$  — количество вещества, выражающее число молей.

Единица молярной теплоемкости — джоуль на моль-кельвин (Дж/(моль•К)).

Удельная теплоемкость  $c$  связана с молярной  $C_m$  соотношением

$$C_m = cM, \quad (9-18)$$

где  $M$  — молярная масса вещества.

Различают теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается постоянным.

Запишем выражение первого начала термодинамики для 1 моля газа с:

$$C_m dT = dU_m + p dV_m. \quad (9-19)$$

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии:

$$C_v = \frac{dU_m}{dT}, \quad (9-20)$$

т. е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме  $C_v$  равна изменению внутренней энергии 1 моля газа при повышении его температуры на 1 К. Так как

$$dU_m = \frac{i}{2} R dT,$$

то

$$C_v = iR/2. \quad (9-21)$$

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение (9-21) можно записать в виде

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{p dV_m}{dT}.$$

Учитывая, что  $dU_m/dT$  не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от  $p$ , ни от  $V$ , а определяется лишь температурой  $T$ ) и всегда равна  $C_v$ , продифференцировав уравнение Клапейрона — Менделеева  $pV_m = RT$  по  $T$  ( $p = \text{const}$ ), получим

$$C_p = C_v + R. \quad (9-22) \quad \text{Выражение (9-22)}$$

называется **уравнением Майера**; оно показывает, что  $C_p$  всегда больше  $C_v$  на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа. Используя (9-21) выражение (9-22) можно записать в виде

$$C_p = \frac{i+2}{2} R$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное

для каждого газа отношение  $C_p$  к  $C_v$ :

$$\gamma = C_p/C_v = (i+2)/i.$$

## 9.6. Адиабатный процесс

Существует достаточно много явлений, например, нагревание ручного насоса при накачивании шин, понижение температуры воздуха после извержения вулкана, при котором быстро расширяются газы, изменение температуры воздуха при сильных порывах ветра, процессы, происходящие с веществом, заключенным в теплоизолирующую оболочку, распространение звуковых волн и многие другие, объяснить которые можно, используя понятие адиабатного процесса.

**Адиабатный процесс** это процесс, происходящий без теплообмена системы с окружающей средой.

Реализовать такой процесс на практике можно, быстро сжимая или расширяя газ, или заключая его в теплоизолирующую оболочку (термос, сосуд Дьюара). При адиабатном процессе  $\delta Q = 0$ , а, следовательно, первое начало термодинамики будет иметь вид:  $0 = dU + \delta A$  или  $\delta A = -dU$ . При адиабатном расширении газ совершает механическую работу за счёт убыли собственной внутренней энергии. При адиабатном сжатии внутренняя энергия газа растёт за счёт работы внешних сил, сжимающих его.

Получим уравнение адиабаты, используя первое начало термодинамики. Приращение внутренней энергии можно записать через молярную изохорическую теплоёмкость:  $dU = C_{\mu V} \nu dT$ , элементарную работу – через давление и приращение объёма:  $\delta A = PdV$ . Получим

$$C_{\mu V} \nu dT + PdV = 0 \quad (9-23)$$

Исключим из этого уравнения приращение температуры, используя уравнение Менделеева - Клапейрона  $PV = \nu RT$ . Продифференцируем его и получим:  $PdV + VdP = \nu R dT$ , отсюда выразим приращение температуры  $dT = \frac{PdV + VdP}{\nu R}$  и подставим его в (9-23), после приведения подобных получим:

$\frac{C_{\mu V} (PdV + VdP)}{R} + PdV = 0$ . Заменим в этом равенстве  $R$  на  $C_{\mu P} - C_{\mu V}$ , приведём к одному знаменателю, раскроем скобки и получим:

$$\frac{C_{\mu V} PdV + C_{\mu V} VdP + C_{\mu P} PdV - C_{\mu V} PdV}{C_{\mu P} - C_{\mu V}} = 0.$$

Так как знаменатель не равен нулю, то равенство будет выполняться, если числитель равен нулю. После приведения подобных получим:

$$C_{\mu V} VdP + C_{\mu P} PdV = 0.$$

Обозначим отношение теплоёмкостей  $\frac{C_{\mu P}}{C_{\mu V}} = \gamma$ . Это отношение  $\gamma$  принято называть показателем адиабаты или коэффициентом Пуассона. После введения  $\gamma$  получим:

$$VdP + \gamma PdV = 0.$$

Поделим обе части равенства на  $PV$  и получим уравнение с разделяющимися переменными:  $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$ . Проинтегрируем это уравнение и получим:  $\ln P + \gamma \ln V = const$  или  $\ln P + \ln V^\gamma = const$ . Воспользуемся свойством логарифмов: сумму логарифмов можно представить как логарифм произведения:  $\ln(PV^\gamma) = const$ . После потенцирования получим **уравнение адиабаты**:

$$PV^\gamma = const \quad (9-24)$$

Это уравнение показывает, что при адиабатном процессе с изменением объёма давление изменяется на большую величину, чем при изотермическом процессе, поскольку  $\gamma > 1$ . Рис.9.4, на котором приведены изотерма (пунктирная линия) и адиабата (сплошная линия) для случая, когда начальные параметры состояния газа одинаковы, наглядно показывает это.

Используя уравнение состояния идеального газа, можно записать уравнение адиабаты через объём и температуру. Для этого нужно из уравнения состояния идеального газа выразить давление и подставить в уравнение (9-24). После преобразований получим:

$$TV^{\gamma-1} = const \quad (9-25)$$

Можно записать уравнение адиабаты через давление и температуру, выразив из уравнения состояния идеального газа, объём через давление и температуру:

$$P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = const \quad (9-26)$$

При адиабатном процессе все три параметра состояния изменяются. Это изменение выражено формулами (9-24), (9-25), (9-26).

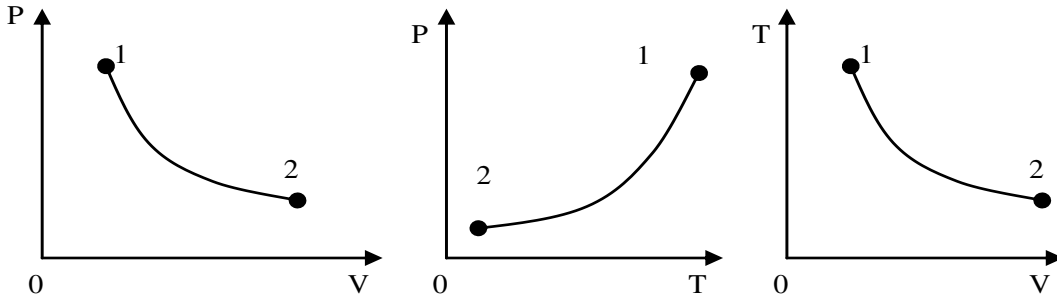


Рис. 9.5

Процесс адиабатного расширения изображён на рис.9.5 При адиабатном расширении газ совершает работу за счёт убыли собственной внутренней энергии:  $\delta A = -dU$ . Работу адиабатного процесса проще всего рассчитать через изменение внутренней энергии:  $A_{12} = -\int dU$ . Поскольку внутренняя энергия идеального газа – функция состояния и зависит только от температуры, то изменение внутренней энергии, а, следовательно, и работу можно найти по формуле:

$$A_{12} = \nu C_{\mu V} (T_1 - T_2) \quad (9-27)$$

Работу газа при адиабатном процессе можно определить и через элементарную работу:  $A_{12} = \int \delta A = \int P dV$ . Для этого будем считать известными начальные параметры состояния  $P_1, V_1, T_1$ . Из уравнения адиабаты  $P_1 V_1^\gamma = P V^\gamma$  выразим давление  $P$ :  $P = \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}$ . Тогда элементарная работа будет определяться формулой:  $\delta A = \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV$ . При определении работы адиабатного процесса вынесем за знак интеграла известные величины и получим:  $A_{12} = P_1 V_1^\gamma \int \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} \left[ \frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{2-\gamma} \right]$ . Вынесем за скобки  $\frac{1}{V_1^{\gamma-1}}$ , и после преобразования получим:

$$A_{12} = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) \quad (9-28)$$

Используя уравнение Менделеева – Клапейрона, можно получить другую формулу:

$$A_{12} = \frac{\nu R T_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) \quad (9-29)$$

Следует отметить, что само по себе расширение идеального газа не может привести к его охлаждению, если при расширении газ не производит работу. Это значит, что, если идеальный газ расширяется таким образом, что к сосуду, в котором он находится, присоединяется другой пустой сосуд, то температура газа не изменится. Неизменность температуры обусловлена тем, что внутренняя энергия идеального газа не зависит от объёма. При таком **расширении в пустоту идеальный газ не совершает работы**.

## 9.7. Политропический процесс

**Политропическим процессом** называется всякий процесс изменения состояния, при котором теплоёмкость газа  $C$  остаётся постоянной и равной  $C = \frac{\delta Q}{dT}$ .

Отсюда выразим количество теплоты через теплоёмкость газа при политропическом процессе:  $\delta Q = CdT$ . Используем первое начало термодинамики:  $\delta Q = C_V dT + PdV$ . Здесь  $C_V = \mu C_{\mu V}$  и  $C_P = \mu C_{\mu P}$  - теплоёмкости газа при постоянном объёме и давлении соответственно. С учётом выражения количества теплоты через теплоёмкость политропического процесса получим  $CdT = C_V dT + PdV$  или

$$(C - C_V)dT = PdV \quad (9-30)$$

Продифференцируем уравнение состояния идеального газа и выразим дифференциал температуры:  $dT = \frac{PdV + VdP}{\nu R}$ . Учтём, что  $R = C_{\mu P} - C_{\mu V}$ , а  $\nu R = \nu C_{\mu P} - \nu C_{\mu V} = C_P - C_V$ , получим:

$$\frac{dP}{P} + \frac{C - C_P}{C - C_V} \frac{dV}{V} = 0 \quad (9-31)$$

Обозначим  $\frac{C - C_P}{C - C_V} = n$  - **показатель политропы**. После интегрирования (9-31) и дальнейшего

потенцирования полученного результата, придём к **уравнению политропы**:

$$PV^n = const \quad (9-32)$$

Это уравнение может быть выражено и через другие пары параметров состояния, аналогично тому, как это было сделано для адиабатного процесса.

Рассмотренные изопроцессы и адиабатный процесс изменения состояния газа можно рассматривать как частные случаи более общего политропического процесса. Покажем, что из уравнения (9-32) можно получить уравнения известных нам процессов.

Для адиабатного процесса  $\delta Q = 0$ , следовательно, теплоёмкость  $C$  этого процесса равна нулю, а показатель политропы равен показателю адиабаты  $n = \gamma$ . Тогда уравнение (9-32) перейдёт в уравнение адиабаты  $PV^\gamma = const$ .

Для изотермического процесса  $dT = 0$ ,  $C \rightarrow \infty$ , показатель адиабаты  $n = 1$ , а уравнение (9-32) перейдёт в уравнение изотермы:  $PV = const$ .

Для изобарного процесса  $C = C_P$ ,  $n = 0$ , а уравнение (9-32) будет иметь вид  $PV^0 = const$  или  $P = const$ .

Для изохорического процесса  $C = C_V$ ,  $n \rightarrow \infty$ , а уравнение (9-32) можно переписать в виде:  $P^{\frac{1}{n}}V = const$ . При  $n \rightarrow \infty$   $P^{\frac{1}{n}} = 1$ , следовательно, уравнение (9-32) переходит в уравнение изохоры:  $V = const$ .

## 9.8. Принцип действия тепловой машины. Цикл Карно и его КПД.

Важным прикладным применением термодинамики являются тепловые машины. Под **тепловой машиной** понимают устройство, преобразующее некоторую часть внутренней энергии рабочего тела в механическую работу.

Тепловые машины делят на два класса: машины однократного действия (ракета, пушка и т.п.) и циклические машины (паровые машины, двигатели внутреннего сгорания).

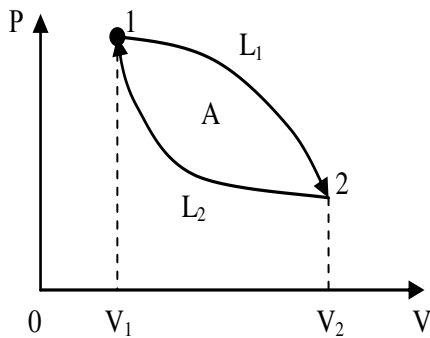


Рис. 9.6

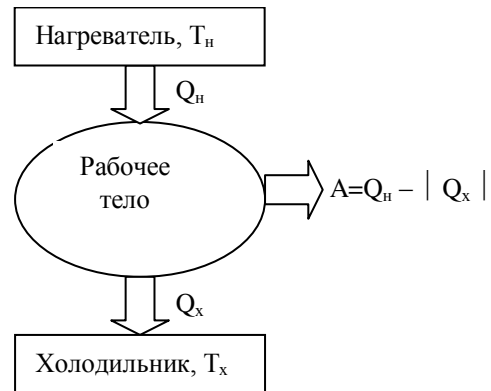


Рис.9.7

В циклических машинах процессы преобразования теплоты в работу периодически повторяются. Для этого нужно, чтобы рабочее тело после получения теплоты от источника, совершив работу, вернулось в исходное состояние, чтобы снова начать такой же круговой процесс.

**Циклом** называется процесс, начало и конец которого - совпадают. Примером циклического процесса является процесс, изображённый на рис.9.6. Работа цикла складывается из работы самой системы (участок 1L12) и работы над системой (участок 2L21):  $A = \int_{L_1}^2 PdV + \int_{L_2}^1 PdV$ . **Работа цикла**

численно равна площади фигуры, ограниченной кривой, изображающей цикл. Газ совершает работу на участке 1L12 за счёт полученного от **нагревателя** количества теплоты, а на участке 2L21 над газом совершается работа внешними силами. Чтобы работа внешних сил была меньше работы газа, необходимо её совершать при более низкой температуре, а, следовательно, некоторое количество теплоты должно перейти от **рабочего тела** –газа - к менее нагретому телу – **холодильнику**.

Утверждение о том, что для совершения полезной работы в циклической машине необходимо участие двух тел с различной температурой, называется **принципом Карно**.

Схема работы тепловой машины приведена на рис. 9.7.

Цикл, при помощи которого количество теплоты, отнятое от какого-нибудь тела, можно наилучшим образом преобразовать в механическую работу, называется **циклом Карно**. В качестве рабочего тела здесь выступает идеальный газ. Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис.9.8).

На участке 1-2 рабочее тело контактирует с нагревателем (телом с большой теплоёмкостью) и получает от него количество теплоты  $Q_H$ . При этом реализуется изотермическое расширение газа (из-за большой теплоёмкости нагревателя его температура не изменяется). Это самый выгодный однократный процесс, при котором всё полученное количество теплоты переходит в механическую работу, согласно первому началу термодинамики:

$$Q_H = A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9-33)$$

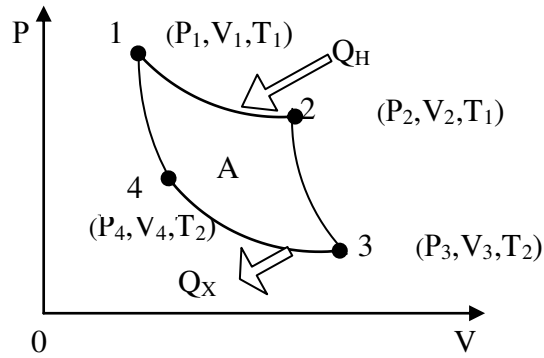


Рис. 9.8

Участок 2-3 соответствует адиабатному расширению идеального газа. На этом этапе разорван контакт с нагревателем и рабочее тело не обменивается количеством теплоты с другими телами. Это тоже выгодно, поскольку в этом случае газ совершает работу за счёт собственной внутренней энергии, вследствие чего она уменьшается, температура газа становится равной  $T_2$ . Согласно первому началу термодинамики,

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = C_{\mu V} \nu (T_1 - T_2) \quad (9-34)$$

На участке 3-4 рабочее тело приводится в тепловой контакт с холодильником, имеющим большую теплоёмкость и температуру  $T_2$ . Здесь при более низкой температуре газ сжимают изотермически, совершая над ним работу, численно равную отданному холодильнику количеству теплоты, работа же самого газа, так же, как и отданное количество теплоты, отрицательна:

$$Q_X = A_{34} = \nu R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (9-35)$$

При более низкой температуре, когда внутренняя энергия меньше первоначальной, газ сжимать легче, поэтому работа  $A_{34}$  меньше работы  $A_{12}$ . Изотермическое сжатие опять-таки является самым выгодным, поскольку не нужно изменять внутреннюю энергию газа, затрачивая на это дополнительную работу внешних сил. На последнем участке цикла Карно необходимо вернуть газ в первоначальное состояние наимыгоднейшим образом, то есть адиабатно сжать его. При адиабатном сжатии нет теплового контакта рабочего тела с холодильником, а работа внешних сил полностью идёт на увеличение внутренней энергии газа:

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = -C_{\mu V} \nu (T_1 - T_2) \quad (9-36)$$

Полезная работа за цикл равна алгебраической сумме работ каждого участка цикла Карно:  $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$ . Сравнение формул (9-33) и (9-36) позволяет заключить, что работа газа на участке 2-3 по величине равна работе газа на участке 4-1, но противоположна по знаку, следовательно, алгебраическая сумма работ на этих участках равна нулю, а работа за цикл будет определяться суммой работ участков 12 и 34:

$$A = \nu R \left( T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \right) \quad (9-37)$$

Для дальнейшего преобразования полезной работы рассмотрим уравнения адиабаты на участках 2-3 и 4-1, записанные через объём и температуру:  $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$  и  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$ . Поделим второе

уравнение на первое и получим:  $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$  или  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ . Учитывая это равенство, можно

вынести за скобки натуральный логарифм отношения объёмов в формуле (9-37) и получить выражение для полезной работы за цикл Карно:



$$A = \nu R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9-38)$$

Эффективность работы тепловых машин характеризуют **коэффициентом полезного действия**  $\eta$ , определяемым как отношение полезной работы, произведённой за цикл, к количеству теплоты, полученному от нагревателя за цикл:

$$\eta = \frac{A}{Q_H} \quad (9-39)$$

Подставим в эту формулу полезную работу, произведённую за цикл Карно, определяемую по формуле (9-38), и количество теплоты, полученное от нагревателя, определяемое по формуле (9-33), после преобразования получим выражение для расчёта коэффициента полезного действия (**КПД цикла Карно**):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (9-40)$$

Эта формула пригодна только для расчёта КПД цикла Карно. КПД других циклов рассчитывают, используя общую формулу (4.47). В случае, когда имеется несколько нагревателей, можно рассчитать полученное количество теплоты, суммируя количества теплоты от каждого нагревателя, по формуле:

$$Q_H = \sum_{i=1}^n Q_{Hi}.$$

Анализируя цикл, реализуемый в идеальной тепловой машине, Карно доказал два важных положения, известных как **теоремы Карно**.

**Первая теорема Карно:** КПД идеального цикла Карно не зависит от рода рабочего тела.

**Вторая теорема Карно:** цикл Карно обладает наибольшим КПД по сравнению со всеми другими циклами в том же интервале температур.

### 9.9. Энтропия. Физический смысл энтропии. Энтропия и вероятность.

Рассматривая КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно,  $\eta = 1 - \frac{|Q_X|}{|Q_H|} = 1 - \frac{T_X}{T_H}$ ,

можно отметить, что отношение температуры холодильника к температуре нагревателя равно отношению величин количества теплоты, отданного рабочим телом холодильнику, и количества теплоты, принятой от нагревателя. Это значит, что для идеальной тепловой машины, работающей по

циклу Карно, выполняется и такое соотношение:  $\frac{|Q_X|}{T_X} = \frac{|Q_H|}{T_H}$ . Отношение  $\frac{Q}{T}$  Лоренц назвал

**приведённой теплотой**. Для элементарного процесса приведённая теплота будет равна  $\frac{\partial Q}{T}$ . Значит,

при реализации цикла Карно (а он является обратимым циклическим процессом) приведённая теплота остаётся неизменной и ведёт себя как функция состояния, тогда, как известно, что количество теплоты является функцией процесса.

Используя первое начало термодинамики для обратимых процессов,  $\partial Q = C_{\mu V} \nu dT + PdV$  и деля обе части этого равенства на температуру, получим:

$$\frac{\partial Q}{T} = C_{\mu V} \nu \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV \quad (9-41)$$

Выразим из уравнения Менделеева - Клапейрона  $\frac{P}{T} = \frac{\nu R}{V}$ , подставим в уравнение (9-41) и получим:

$$\frac{\partial Q}{T} = C_{\mu V} \nu \frac{dT}{T} + \frac{\nu R}{V} dV \quad (9-42)$$

Учтём, что  $\frac{dT}{T} = d(\ln T)$ , а  $\frac{dV}{V} = d(\ln V)$ , подставим их в уравнение (9-42) и получим:

$$\frac{\partial Q}{T} = d(C_{\mu V} \ln T + \nu R \ln V) \quad (9-43)$$

Правая часть этого равенства является полным дифференциалом, следовательно, при обратимых процессах и приведённая теплота тоже является полным дифференциалом, что является признаком функции состояния.

Функция состояния, дифференциалом которой является  $\frac{\partial Q}{T}$ , называется *энтропией* и обозначается

$S$ . Таким образом, энтропия – функция состояния. После введения энтропии формула (9-43) будет иметь вид:

$$\frac{\partial Q}{T} = dS, \quad (9-44)$$

где  $dS$  – приращение энтропии. Равенство (9-44) справедливо только для обратимых процессов и удобно для расчёта изменения энтропии при конечных процессах:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\partial Q}{T} \quad (9-45)$$

Если система обратимым путём совершает круговой процесс (цикл), то  $\oint \frac{\partial Q}{T} = 0$ , а, следовательно,  $\oint dS = 0$ , то  $S = \text{const}$ .

Выражая количество теплоты через приращение энтропии для элементарного процесса, и подставляя его в уравнение для первого начала термодинамики, получим новый вид записи этого уравнения, которое принято называть *основным термодинамическим тождеством*:

$$TdS = dU + \delta A \quad (9-46)$$

Таким образом, для расчёта изменения энтропии при обратимых процессах удобно использовать приведённую теплоту.

В случае необратимых неравновесных процессов  $dS \neq \frac{\partial Q}{T}$ , а для необратимых круговых процессов выполняется *неравенство Клаузиуса*:

$$\oint \frac{\partial Q}{T} < 0 \quad (9-47)$$

Рассмотрим, что происходит с энтропией в изолированной термодинамической системе.

В изолированной термодинамической системе при любом обратимом изменении состояния её энтропия не изменится. Математически это можно записать так:  $S = \text{const}$ .

Рассмотрим, что происходит с энтропией термодинамической системы при необратимом процессе. Предположим, что переход из состояния 1 в состояние 2 по пути  $L_1$  обратим, а из состояния 2 в состояние 1 по пути  $L_2$  – необратим (рис.9.13). Тогда справедливо неравенство Клаузиуса (9-47). Запишем выражение для правой части этого неравенства, соответствующее нашему примеру:

$$\oint \frac{\partial Q}{T} = \int_{L_1}^2 \frac{\partial Q}{T} + \int_{L_2}^1 \frac{\partial Q}{T}.$$

Первое слагаемое в этой формуле может быть заменено на изменение энтропии, так как этот процесс обратимый. Тогда неравенство Клаузиуса можно записать в виде:

$$S_2 - S_1 + \int_2^1 \frac{\partial Q}{T} < 0.$$

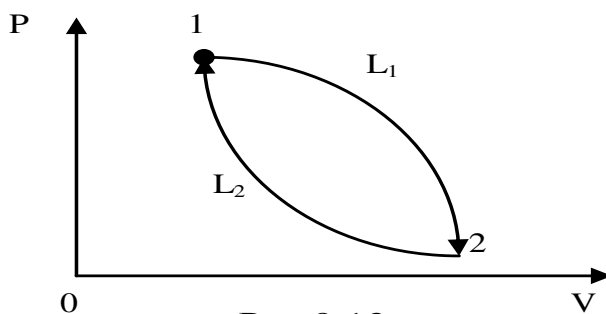


Рис.9.13

Отсюда  $S_2 - S_1 < \int_2^1 \frac{\partial Q}{T}$ . Так как  $\int_2^1 \frac{\partial Q}{T} = -\int_1^2 \frac{\partial Q}{T}$ , то окончательно можно записать:

$$S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{\partial Q}{T} \quad (9-48)$$

Если система изолирована, то  $\partial Q = 0$ , а неравенство (9-48) будет иметь вид:

$$S_2 - S_1 > 0, \quad (9-49)$$

то есть энтропия изолированной системы при необратимом процессе возрастает. Рост энтропии продолжается не беспрестанно, а до определённого максимального значения, характерного для данного состояния системы. Это максимальное значение энтропии соответствует состоянию термодинамического равновесия. Рост энтропии при необратимых процессах в изолированной системе означает, что энергия, которой обладает система, становится менее доступной для преобразования в механическую работу. В состоянии равновесия, когда энтропия достигает максимального значения, энергия системы не может быть преобразована в механическую работу.

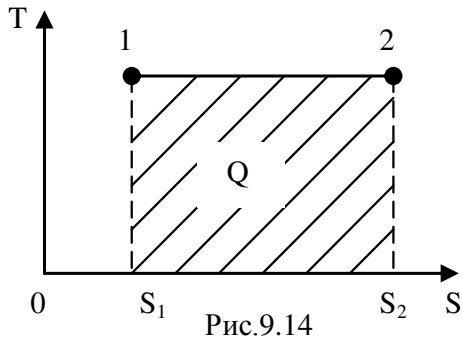


Рис.9.14

Если же система не изолирована, то энтропия может как убывать, так и возрастать в зависимости от направления теплообмена.

Энтропия как функция состояния системы, может служить таким же параметром состояния, как температура, давление, объём. Изображая тот или иной процесс на диаграмме (T,S), можно дать математическую интерпретацию количества теплоты, как площади фигуры под кривой, изображающей процесс. На рис.9.14 приведена диаграмма для изотермического процесса в координатах энтропия – температура.

Энтропия может быть выражена через параметры состояния газа – температуру, давление, объём. Для этого из основного термодинамического тождества (9-46) выразим приращение энтропии:

$$dS = C_{\mu V} \nu \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V}.$$

Проинтегрируем это выражение и получим:

$$\Delta S = C_{\mu V} \nu \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9-50)$$

Изменение энтропии можно выразить и через другую пару параметров состояния – давление и объём. Для этого нужно выразить температуры начального и конечного состояний из уравнения состояния идеального газа через давление и объём и подставить в (9-50):

$$\Delta S = C_{\mu V} \nu \ln \frac{P_2}{P_1} + C_{\mu P} \nu \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9-51)$$

При изотермическом расширении газа в пустоту  $T_1 = T_2$ , а значит первое слагаемое в формуле (9-47) обнулится и изменение энтропии будет определяться только вторым слагаемым:

$$\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9-52)$$

Несмотря на то, что во многих случаях для расчёта изменения энтропии удобно использовать приведённую теплоту, ясно, что приведённая теплота и энтропия – разные, не тождественные понятия.

Выясним *физический смысл энтропии*. Для этого используем формулу (9-52), для изотермического процесса, при котором не изменяется внутренняя энергия, а всевозможные изменения характеристик обусловлены лишь изменением объёма. Рассмотрим связь объёма, занимаемого газом в равновесном состоянии, с числом пространственных микросостояний частиц газа. Число микросостояний частиц газа, с помощью которых реализуется данное макросостояние газа как термодинамической системы, можно подсчитать следующим образом. Разобьём весь объём на элементарные кубические ячейки со стороной  $d \sim 10^{-10}$  м (порядка величины эффективного диаметра молекулы). Объём такой ячейки будет равен  $d^3$ . В первом состоянии газ занимает объём  $V_1$ , следовательно, число элементарных ячеек, то есть число мест

$N_1$ , которые могут занимать молекулы в этом состоянии будет равно  $N_1 = \frac{V_1}{d^3}$ . Аналогично для второго

состояния с объёмом  $V_2$  получим  $N_2 = \frac{V_2}{d^3}$ . Следует отметить, что изменение положений молекул

соответствует новому микросостоянию. Не всякое изменение микросостояния приведёт к изменению макросостояния. Предположим, молекулы могут занимать  $N_1$  мест, тогда обмен местами любых молекул в этих  $N_1$  ячейках не приведёт к новому макросостоянию. Однако, переход молекул в другие ячейки, приведёт к изменению макросостояния системы. Число микросостояний газа, соответствующих данному макросостоянию, можно подсчитать, определив число способов размещения частиц этого газа по элементарным ячейкам. Для упрощения расчётов рассмотрим 1 моль идеального газа. Для 1 моля идеального газа формула (9-52) будет иметь вид:

$$\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (9-53)$$

Число микросостояний системы, занимающей объём  $V_1$ , обозначим через  $\Gamma_1$  и определим, подсчитав число размещений  $N_A$  (число Авогадро) молекул, которые содержатся в 1 моле газа, по  $N_1$  ячейкам

(местам):  $\Gamma_1 = \frac{N_1!}{(N_1 - N_A)!}$ . Аналогично подсчитаем число микросостояний  $\Gamma_2$  системы, занимающей

объём  $V_2$ :  $\Gamma_2 = \frac{N_2!}{(N_2 - N_A)!}$ .

Число микросостояний  $\Gamma_i$ , с помощью которых можно реализовать  $i$ - тое макросостояние, называется **термодинамической вероятностью** данного макросостояния. Термодинамическая вероятность  $\Gamma \geq 1$ .

Найдём отношение  $\Gamma_2/\Gamma_1$ :

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{N_2!(N_1 - N_A)!}{N_1!(N_2 - N_A)!}$$

Для идеальных газов число свободных мест гораздо больше числа молекул, то есть  $N_1 \gg N_A$  и  $N_2 \gg N_A$ . Тогда, учитывая выражение чисел  $N_1$  и  $N_2$  через соответствующие объёмы, получим:

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \approx \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{N_A} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{N_A}$$

Отсюда можно выразить отношение объёмов через отношение термодинамических вероятностей соответствующих состояний:

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^{\frac{1}{N_A}} \quad (9-54)$$

Подставим (9-54) в (9-53) и получим:  $\Delta S = \frac{R}{N_A} \ln \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$ . Учитывая, что отношение молярной газовой

постоянной и числа Авогадро, есть постоянная Больцмана  $k$ , а также то, что логарифм отношения двух величин равен разности логарифмов этих величин, получим:  $S_2 - S_1 = k \ln \Gamma_2 - k \ln \Gamma_1$ . Отсюда можно заключить, что энтропия  $i$ - того состояния  $S_i$  определяется логарифмом числа микросостояний, посредством которых реализуется данное макросостояние:

$$S_i = k \ln \Gamma_i \quad (9-55)$$

Формула (9-55) называется **формулой Больцмана**, впервые получившего её и понявшего **статистический смысл энтропии**, как **функции беспорядка**. Формула Больцмана имеет более общее значение, чем формула (9-53), то есть может быть использована не только для идеальных газов, и позволяет раскрыть физический смысл энтропии. Чем более упорядочена система, тем меньше число микросостояний, посредством которых осуществляется данное макросостояние, тем меньше энтропия системы. Рост энтропии в изолированной системе, где происходят необратимые процессы, означает движение системы в направлении наиболее вероятного состояния, которым является состояние равновесия. Можно сказать, что **энтропия** является **мерой беспорядка** системы; чем больше беспорядка в ней, тем выше энтропия. В этом заключается **физический смысл энтропии**.

## 9.10. Второе начало термодинамики и его статистический смысл.

Второе начало термодинамики - один из основных законов термодинамики, устанавливающий **необратимость макроскопических процессов**, протекающих с конечной скоростью. Другими словами, **это закон**, устанавливающий **направление протекания самопроизвольных процессов**. Исторически второе начало термодинамики возникло из анализа работы тепловых машин. Существует несколько формулировок второго начала термодинамики. Во-первых, второе начало термодинамики накладывает ограничения на возможности циклического получения механической работы за счёт полученной теплоты (формулировки Клаузиуса и Томсона(Кельвина)). Во-вторых, второе начало термодинамики с помощью понятия энтропии позволяет судить о направлении протекания процессов в системе (формулировка Больцмана).

### Формулировка Клаузиуса.

Теплота не может самопроизвольно перейти от более холодного тела к более нагретому без каких-либо других изменений в системе.

### Формулировка Томсона (Кельвина).

Невозможно преобразовать в работу всю теплоту, взятую от тела с однородной температурой, не производя никаких других изменений в состоянии системы (невозможно создать вечный двигатель второго рода).

Следует напомнить, что понятие «**вечный двигатель**» или «**перпетуум-мобиле**» появилось где-то в 13 веке и означало воображаемый двигатель, который после запуска совершал бы работу бесконечно долго, не заимствуя энергию **извне (вечный двигатель первого рода)**. Вечный двигатель первого рода противоречит первому началу термодинамики (закону сохранения и превращения энергии). Наряду с вечным двигателем первого рода рассматривают **вечный двигатель второго рода** – воображаемую циклическую машину, которая полностью превращала бы в механическую работу теплоту, извлекаемую из окружающих тел (океана, атмосферного воздуха и т.п.). Вечный двигатель второго рода противоречит второму началу термодинамики.

### Формулировка Больцмана.

Энтропия изолированной системы при реальных (необратимых) процессах всегда возрастает.

Математически эту формулировку можно записать, используя неравенство Клаузиуса в дифференциальном виде:

$$dS \geq \frac{dU + \partial A}{T} \quad (9-56)$$

Второе начало термодинамики имеет **статистический смысл**. Рост энтропии в изолированной системе означает переход системы в наиболее вероятное, то есть равновесное состояние. Но, принципиально, возможны **флуктуации**, то есть случайные отклонения физических величин от их средних значений. Количественной мерой флуктуаций может быть дисперсия  $\sigma_x^2$  случайной величины  $X$ , а также среднеквадратичное (стандартное) отклонение  $\sigma_x$  от среднего значения  $\bar{X}$  случайной величины или его

относительная величина  $\delta_x = \frac{\sigma_x}{\bar{X}}$ , которая обратно пропорциональна квадратному корню из числа

частиц, образующих систему. Флуктуации вызваны беспорядочным тепловым движением частиц, образующих термодинамическую систему, и имеют принципиальное значение, ограничивая пределы применимости термодинамических понятий лишь системами, содержащими большое число частиц, для которых флуктуации много меньше самих флуктуирующих величин. Флуктуации уточняют статистический смысл второго начала термодинамики. Возможны флуктуации системы из равновесного состояния в неравновесное, то есть в определённый промежуток времени система движется в направлении менее вероятных макросостояний. Относительная роль флуктуаций возрастает с уменьшением области пространства, в которой флуктуации рассматриваются. В макроскопических системах с большим числом частиц статистические флуктуации незначительны.

## Лекция №10

**Реальные газы, жидкости и твердые тела.** Реальные газы, уравнение Ван-дер-Ваальса. Жидкости и их свойства. Основные характеристики и закономерности агрегатных состояний и фазовых переходов. Поверхностное натяжение. Капиллярные явления. Твердые тела.

### 10.1. Реальные газы, уравнение Ван-дер-Ваальса.

Состояние реального газа нельзя описать с помощью уравнения Менделеева – Клапейрона, справедливого только для идеальных газов. Однако, если ввести в это уравнение поправки на силы взаимодействия между молекулами и собственный объём молекул, то можно получить уравнение, описывающее состояние реального газа. Такое уравнение было предложено Ван-дер-Ваальсом в 1873 году. Рассмотрим схему получения уравнения Ван-дер-Ваальса из уравнения Менделеева - Клапейрона для одного моля молекул газа  $PV = RT$ . Для перехода к уравнению состояния реального газа нужно учесть силы отталкивания, а, следовательно, собственный объём молекул. Для этого вводится **поправка**

**на молярный объём** (или силы отталкивания)  $b$ . В СИ  $b$  измеряется в  $\frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$ . Тогда получим уравнение состояния одного моля газа, учитывающее силы отталкивания между молекулами в виде:

$P(V - b) = RT$ . Отсюда  $V - b = \frac{RT}{P}$ . Если увеличивать давление, то при  $P \rightarrow \infty, (V - b) \rightarrow 0$ ,

следовательно,  $V = b$ . Отсюда виден **физический смысл поправки  $b$** , заключающийся в том, что **поправка на объём численно равна предельному объёму, который бы занял 1 моль реального газа при бесконечно большом давлении**. Детальное рассмотрение даёт  $b = 4V_\mu$ , то есть поправка на объём равна учетверённому объёму 1 моля молекул газа. Объём одной молекулы, считая её сферической, равен:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Молярный объём  $V_\mu = N_A V$ . Тогда поправка на объём выражена формулой:

$$b = \frac{16}{3}\pi r^3 N_A \quad (10-1)$$

Учтём силы притяжения между молекулами газа, которые вызывают уменьшение давления на стенки сосуда на величину  $P_i$ , которую называют **внутренним давлением газа**. Молекулы, находящиеся в поверхностном слое газа (их число обратно пропорционально объёму), притягиваются ближайшими молекулами внутри газа (их число тоже обратно пропорционально объёму), следовательно,  $P_i \sim n^2$ , а значит,  $P_i \sim V^{-2}$ . Можно записать равенство:

$$P_i = \frac{a}{V^2} \quad (10-2)$$

Здесь  $a$  – поправка на давление или силы притяжения, она различна для разных газов и в СИ измеряется в  $\frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$ . Поправки  $a$  и  $b$  различны для разных газов. Учитывая обе поправки, получим:

$P = \frac{RT}{V - b} - P_i$  или  $P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$ . Это уравнение описывает состояние реального газа. Однако,

чаще всего, его записывают аналогично уравнению состояния идеальных газов, тогда уравнение состояния реальных газов для одного моля молекул имеет вид:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (10-3)$$

Уравнение состояния реального газа – уравнение Ван-дер-Ваальса - для любого количества вещества будет иметь вид:

$$\left(P + \frac{av^2}{V^2}\right)(V - vb) = \nu RT \quad (10-4)$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса неплохо качественно описывает поведение газа при сжижении, но непригодно к процессу затвердевания.

Уравнение Ван-дер-Ваальса – кубическое уравнение относительно объёма и имеет три корня. С практической точки зрения интересны случаи, когда три корня действительны и одинаковы (соответствует критическому состоянию вещества), и когда три корня действительны и различны. В последнем случае со значениями и смыслом корней поможет разобраться изотерма Ван-дер-Ваальса.

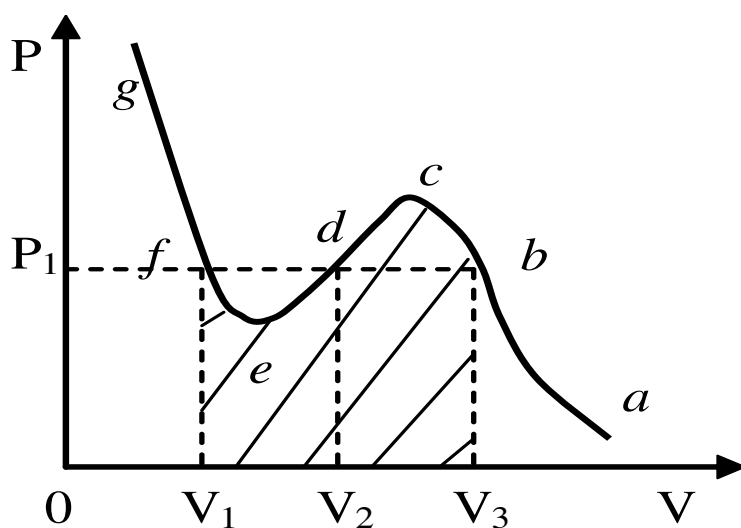


Рис.10.1

Изотерма Ван-дер-Ваальса приведена на рис.10.1 На изотерме отмечены корни уравнения  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ , соответствующие отмеченному давлению  $P_1$ . Участок  $ab$  на изотерме соответствует однофазному газообразному состоянию, участок  $fg$  – однофазному жидкому состоянию. Состояния вещества, соответствующие участку  $cde$ , на практике не наблюдаются, так как невозможен одновременный рост давления и объёма, поэтому этот участок называют **нестабильным**. Состояния, соответствующие участкам  $bc$  и  $ef$  на практике можно наблюдать, они называются **метастабильными**, поскольку

очень неустойчивы и для их получения требуется специальная очистка вещества от примесей, наличие которых приводит к нарушению стабильности.

Участок  $bc$  соответствует **пересыщенному** или **переохлаждённому** пару. Его можно получить, если тщательно очистить пар от центров конденсации.

Участок  $ef$  - **перегретая жидкость**. Её можно получить, тщательно очистив жидкость от центров парообразования.

Работа при изотермическом сжатии по изотерме Ван-дер-Ваальса от объёма  $V_3$  до объёма  $V_1$  численно равна площади заштрихованной криволинейной трапеции на рис.10.1. Эта площадь должна быть равна площади прямоугольника  $V_1fbV_3$  на том же рисунке, соответствующей экспериментальной изотерме.

Если газ находится при температуре выше критической, то при изотермическом сжатии его нельзя перевести в жидкое состояние. Для сжижения его нужно сначала охладить до температуры ниже критической, а затем наиболее выгодно, то есть изотермически, сжать. В критическом состоянии  $V_1 = V_2 = V_3$ , то есть все три корня действительны и одинаковы. Следует отметить, что для лёгких газов уравнение Ван-дер-Ваальса лучше описывает их состояние.

## 10.2. Основные характеристики и закономерности агрегатных состояний и фазовых переходов.

Понятие фазы в термодинамике рассматривают в более широком смысле, чем агрегатные состояния. Под фазой в термодинамике понимают термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний того же вещества. Иногда неравновесное метастабильное состояние вещества также называют фазой, но метастабильной. Фазы вещества могут отличаться характером движения структурных частиц и наличием или отсутствием упорядоченной структуры. Различные кристаллические фазы могут отличаться друг от друга типом кристаллической структуры, электропроводностью, электрическими и магнитными свойствами и др. Жидкие фазы отличаются друг от друга концентрацией компонентов, наличием или отсутствием сверхпроводимости и т.п.

Переход вещества из одной фазы в другую называется **фазовым переходом**. К фазовым переходам относятся явления парообразования и плавления, конденсации и кристаллизации и др.. В

двухфазной системе фазы находятся в равновесии при одной и той же температуре. При увеличении объёма некоторая часть жидкости превращается в пар, но при этом для поддержания температуры неизменной необходимо извне передать некоторое количество теплоты. Таким образом, для осуществления перехода из жидкой фазы в газообразную системе необходимо передать теплоту без изменения температуры системы. Эта теплота идёт на изменение фазового состояния вещества и называется **теплотой фазового превращения или скрытой теплотой перехода**. С повышением температуры скрытая теплота перехода фиксированной массы вещества уменьшается, а при критической температуре она равна нулю. Для характеристики фазового перехода используют удельную теплоту фазового перехода. **Удельной теплотой фазового перехода** называется количество скрытой теплоты, приходящейся на единицу массы вещества.

Фазовые переходы с поглощением или выделением скрытой теплоты перехода называются **фазовыми переходами первого рода**. При этом внутренняя энергия и плотность изменяются скачком. При переходе из более упорядоченного состояния в менее упорядоченное состояние энтропия увеличивается. В таблице приведены фазовые переходы первого рода и их основные характеристики.

Таблица. Фазовые переходы первого рода и их основные характеристики.

Фазовый переход	Направление перехода	Скрытая теплота перехода	Изменение энтропии при фазовом переходе
Парообразование	Жидкость $\Rightarrow$ пар	$Q_{\Pi} = L_{\Pi} m$ , где $L_{\Pi}$ – удельная теплота парообразования, $m$ – масса жидкости, переведённой в пар.	$\Delta S_{\Pi} = \frac{Q_{\Pi}}{T}$ Энтропия возрастает $\Delta S_{\Pi} > 0$
Конденсация	Пар $\Rightarrow$ жидкость	$Q_{\text{кон}} = -L_{\text{кон}} m$ , где $L_{\text{кон}}$ – величина удельной теплоты конденсации, $m$ – масса пара, переведённого в жидкость	$\Delta S_{\text{кон}} = \frac{Q_{\text{кон}}}{T}$ Энтропия убывает $\Delta S_{\text{кр}} < 0$
Плавление	Твёрдое тело $\Rightarrow$ жидкость	$Q_{\text{пл}} = L_{\text{пл}} m$ , где $L_{\text{пл}}$ – удельная теплота плавления, $m$ – масса твёрдого тела, переведённого в жидкость	$\Delta S_{\text{пл}} = \frac{Q_{\text{пл}}}{T}$ Энтропия возрастает $\Delta S_{\text{пл}} > 0$
Кристаллизация	Жидкость $\Rightarrow$ твёрдое тело	$Q_{\text{кр}} = -L_{\text{кр}} m$ , где $L_{\text{кр}}$ – величина удельной теплоты кристаллизации, $m$ – масса жидкости, переведённой в твёрдое тело - кристалл	$\Delta S_{\text{кр}} = \frac{Q_{\text{кр}}}{T}$ Энтропия убывает $\Delta S_{\text{кр}} < 0$



Сублимация (или возгонка)	Твёрдое тело $\Rightarrow$ Пар	$Q_C = L_C m$ , где $L_C$ – удельная теплота сублимации, $m$ – масса твёрдого тела, переведённого в пар	$\Delta S_C = \frac{Q_C}{T}$ Энтропия возрастает $\Delta S_C > 0$
Десублимация (Кристаллизация минуя жидкую фазу)	Пар $\Rightarrow$ твёрдое тело (минуя жидкую фазу)	$Q_{KP} = -L_{KP} m$ , где $L_{KP}$ – величина удельной теплоты кристаллизации, $m$ – масса пара, переведённого в твёрдое тело – кристалл	$\Delta S_{KP} = \frac{Q_{KP}}{T}$ Энтропия убывает $\Delta S_{KP} < 0$

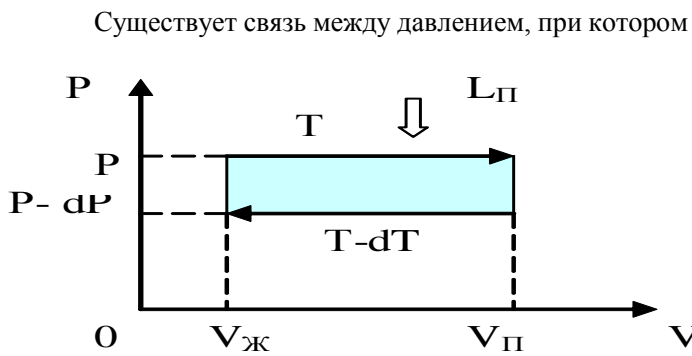


Рис.10.2

Уравнение (10-5) называется **уравнением Клапейрона – Клаузиуса**. Анализируя это уравнение, можно заключить, что с ростом температуры давление увеличивается. Это следует из того, что  $V_{II} > V_{Ж}$ , а значит и  $\frac{dP}{dT} > 0$ .

Уравнение Клапейрона – Клаузиуса применимо не только к переходу «жидкость – пар». Оно применимо ко всем переходам первого рода. В общем виде его можно записать так:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L_{II}}{T(V_{II} - V_{Ж})} \quad (10-5)$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_1 - V_2)} \quad (10-6)$$

Используя уравнение Клапейрона – Клаузиуса можно представить диаграмму состояний системы в координатах P, T (рис.10.3). На этой диаграмме кривая 1 – кривая сублимации. Она соответствует равновесному состоянию двух фаз: твёрдой и парообразной. Точки, лежащие слева от этой кривой характеризуют однофазное твёрдое состояние. Точки, лежащие справа, характеризуют парообразное состояние. Кривая 2 – кривая плавления. Она соответствует равновесному состоянию двух фаз: твёрдой и жидкой. Точки, лежащие слева от этой кривой характеризуют однофазное твёрдое состояние. Точки, лежащие справа от неё до кривой 3, характеризуют жидкое состояние. Кривая 3 – кривая парообразования. Она соответствует равновесному состоянию двух фаз: жидкой и парообразной. Точки, лежащие слева от этой кривой характеризуют однофазное жидкое состояние. Точки, лежащие справа, характеризуют парообразное состояние. Кривая 3, в отличие от кривых 1 и 2, ограничена с двух сторон. С одной стороны – тройной точкой  $T_p$ , с другой стороны - критической точкой К (рис.10.3). **Тройная точка** описывает равновесное состояние сразу трёх фаз: твёрдой, жидкой и парообразной.

### Фазовые переходы второго рода. Жидкий гелий. Сверхтекучесть

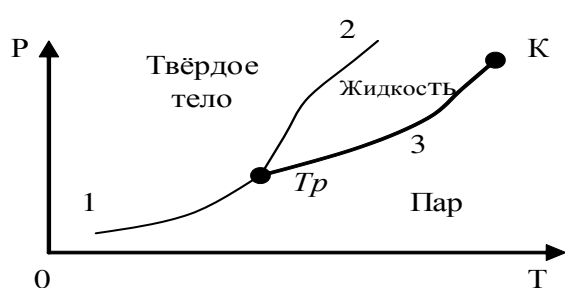


Рис.10.3

Существуют **фазовые переходы второго рода**, при которых некоторые свойства вещества изменяются скачком. Характерной особенностью таких переходов является отсутствие теплоты перехода. К фазовым переходам второго рода относятся такие переходы как потеря ферромагнитных свойств при переходе через точку Кюри, переход проводника в сверхпроводящее состояние, переход гелия I в гелий II. Рассмотрим фазовый переход второго рода на примере жидкого гелия. Жидкий гелий замечателен тем, что это самая холодная жидкость в природе.

Наиболее важной особенностью жидкого гелия является существование двух его модификаций, переходящих одна в другую при температуре 2,186 К при атмосферном давлении. Эти модификации называют He-I и He-II. Точка перехода He-I в He-II называется  $\lambda$ - точкой из-за вида кривой температурной зависимости теплоёмкости жидкого гелия, напоминающей букву  $\lambda$  (рис.10.4).

Переход He-I в He-II происходит без выделения или поглощения скрытой теплоты, что говорит о фазовом переходе второго рода. Свойства этих модификаций гелия различны. He-I –бесцветная жидкость, бурно кипящая с обильным выделением пузырьков. (He-II низкотемпературная модификация) - спокойная жидкость с отчётливой поверхностью, обладающая чрезвычайно

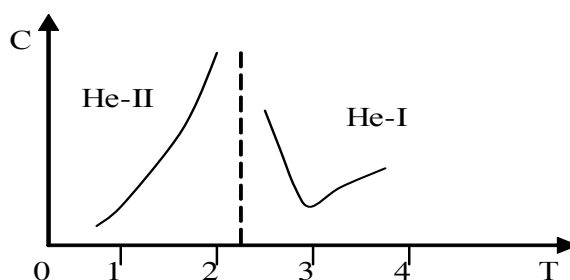


Рис.10.4

высокой теплопроводностью и сверхтекучестью. Сверхтекучесть He-II открыл в 1938 году П.Л.Капица (нобелевский лауреат). Объяснение этого явления было дано в 1941 году Л.Д.Ландау на основе квантово-

механических представлений о характере теплового движения в жидком гелии. Течение жидкого He-II происходит так, как будто его вязкость равна нулю. Это значит, что он может свободно протекать через самые тонкие капилляры, щели, отверстия, непроницаемые даже для газов. В тонких капиллярах (диаметром  $10^{-4} \div 10^{-5}$  см) течение жидкого He-II уже не определяется уравнением Пуазейля и скорость течения его не зависит от разности давлений и длины капилляра. Однако, существует определённая **критическая скорость**, выше которой начинают действовать силы трения и движение становится вязким. Величина критической скорости повышается с понижением температуры и при самых низких температурах становится постоянной. На поверхности всякого твёрдого тела, соприкасающегося с жидким He-II образуется тонкая движущаяся плёнка. Она движется в сторону, где температура выше. Если поверхность тела имеет одинаковую температуру, меньшую температуры  $\lambda$ - точки, и часть тела не погружена в жидкий гелий, то не погруженная часть поверхности покрывается тонкой плёнкой. В жидком He-II наблюдается **термомеханический эффект**, который заключается в том, что, когда в тонком капилляре существует поток тепла, то в направлении, противоположном этому потоку, возникает поток жидкости.

Жидкий He-II ещё и сверхтеплопроводен. Теплопроводность при переходе через  $\lambda$ - точку возрастает в  $5 \cdot 10^6$  раз и становится лучше, чем у металлических проводников тепла.

### 10.3. Поверхностное натяжение жидкости. Давление Лапласа.

Поверхность жидкости, соприкасающаяся с другой средой, находится в особых условиях по сравнению с остальной массой жидкости. Силы, действующие на каждую молекулу поверхностного слоя жидкости, граничащей с паром, направлены в сторону объёма жидкости, то есть внутрь жидкости. Вследствие этого для перемещения молекулы из глубины жидкости на поверхность требуется совершить работу. Если при постоянной температуре увеличить площадь поверхности на бесконечно малую величину  $dS$ , то необходимая для этого работа будет равна  $dA' = \sigma dS$ . Работа по увеличению площади поверхности совершается против сил поверхностного натяжения, которые стремятся сократить, уменьшить поверхность. Поэтому работа самих сил поверхностного натяжения по увеличению площади поверхности жидкости будет равна:

$$dA = -\sigma dS \quad (10-7)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется **коэффициентом поверхностного натяжения** и определяется величиной работы сил поверхностного натяжения по изменению площади поверхности на единицу. В СИ коэффициент поверхностного натяжения измеряется в Дж/м<sup>2</sup>.

Молекулы поверхностного слоя жидкости обладают избыточной по сравнению с глубинными молекулами, потенциальной энергией, которая прямо пропорциональна площади поверхности жидкости:

$$U = \sigma S \quad (10-8)$$

Приращение потенциальной энергии поверхностного слоя связано только с приращением площади поверхности:  $dU = \sigma dS$ . Силы поверхностного натяжения – консервативные силы, поэтому выполняется равенство:  $dA = -dU$ . Силы поверхностного натяжения стремятся уменьшить потенциальную энергию поверхности жидкости. Обычно та энергия, которая может быть преобразована в работу, называется свободной энергией  $U_s$ . Поэтому можно записать  $dA = -dU_s$ . Используя понятие свободной энергии, можно записать формулу (10-8) так:  $U_s = \sigma S$ . Используя последнее равенство можно определить **коэффициент поверхностного натяжения** как физическую величину, численно равную свободной энергии единицы площади поверхности жидкости  $\sigma$ .

Действие сил поверхностного натяжения можно наблюдать с помощью простого эксперимента над тонкой плёнкой жидкости (например, мыльного раствора), которая обволакивает проволочный

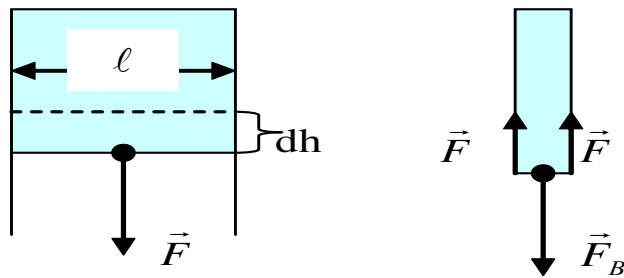


Рис. 10.5

прямоугольный каркас, у которого одна сторона может перемещаться (рис.10.5). Предположим, что на подвижную сторону, длиной  $\ell$ , действует внешняя сила  $F_B$ , перемещающая подвижную сторону рамки равномерно на очень малое расстояние  $dh$ . Элементарная работа этой силы будет равна  $dA_B = F_B dh$ , так как сила и перемещение сонаправлены. Поскольку плёнка имеет две поверхности и, то вдоль каждой из них направлены силы поверхностного натяжения

$F$ , векторная сумма которых равна внешней силе. Модуль внешней силы равен удвоенному модулю одной из сил поверхностного натяжения:  $F_B = 2F$ . Минимальная работа, совершаемая внешней силой, равна по величине сумме работ сил поверхностного натяжения:  $dA_B = dA + dA = 2dA$ . Величина работы силы поверхностного натяжения будет определяться так:

$dA = Fdh = \sigma dS$ , где  $dS = \ell dh$ . Отсюда  $\sigma = \frac{F}{\ell}$ . То есть **коэффициент поверхностного натяжения** может быть определён как величина, равная силе поверхностного натяжения, действующей по касательной к поверхности жидкости, приходящейся на единицу длины линии раздела. Силы поверхностного натяжения стремятся сократить площадь поверхности жидкости. Это заметно для малых объёмов жидкости, когда она принимает форму капль-шариков. Как известно, именно сферическая поверхность имеет минимальную площадь при данном объёме. Жидкость, взятая в большом количестве, под действием силы тяжести растекается по поверхности, на которой она находится. Как известно, сила тяжести зависит от массы тела, поэтому её величина по мере уменьшения массы тоже уменьшается и при определённой массе становится сравнимой или даже много меньше величины силы поверхностного натяжения. В этом случае силой тяжести можно пренебречь. Если жидкость находится в состоянии невесомости, то даже при большом объёме её поверхность стремится к сферической. Подтверждение тому - знаменитый опыт Плато. Если подобрать две жидкости с одинаковой плотностью, то действие силы тяжести на одну из них (взятую в меньшем количестве) будет скомпенсировано архимедовой силой и она примет форму шара. При этом условии она будет плавать внутри другой жидкости.

Рассмотрим, что происходит с каплей жидкости 1, граничащей с одной стороны с паром 3, с другой стороны с жидкостью 2 (рис.10.6). Выберем очень малый элемент границы раздела всех трёх веществ  $d\ell$ . Тогда силы поверхностного натяжения на границах раздела сред будут направлены по касательным к контуру границ раздела и равны:

$$F_{12} = \sigma_{12}d\ell, F_{13} = \sigma_{13}d\ell, F_{23} = \sigma_{23}d\ell \quad (10-9)$$

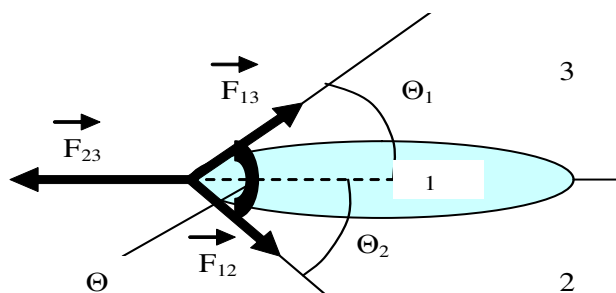


Рис.10.6

Действием силы тяжести пренебрежём. Капля жидкости 1 находится в равновесии, если выполняются условия:

$$F_{23} = F_{13} \cos \theta_1 + F_{12} \cos \theta_2 \quad (10-10)$$

Подставив (10-9) в (10-10), сократив на  $d\ell$  обе части равенств (10-10), возведя в квадрат обе части равенств (10-10) и сложив их, получим:

$$\sigma_{23}^2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{13} \cos \theta, \quad (10-11)$$

где  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  - угол между касательными к линиям раздела сред, называется **краевым углом**.

Анализ уравнения (10-11) показывает, что при  $\theta = 0, \cos \theta = 1$  получим  $\sigma_{23} = \sigma_{12} + \sigma_{13}$  и жидкость 1 полностью смачивает поверхность жидкости 2, растекаясь по ней тонким слоем (**явление полного смачивания**).

Аналогичное явление можно наблюдать и при растекании тонким слоем жидкости 1 по поверхности твёрдого тела 2. Иногда жидкость наоборот не растекается по поверхности твёрдого тела. Если  $\theta = \pi, \cos \theta = -1$ , то  $\sigma_{23} = \sigma_{12} - \sigma_{13}$  и жидкость 1 полностью не смачивает твёрдое тело 2 (**явление полного несмачивания**).

В этом случае есть только одна точка касания жидкости 1 и твёрдого тела 2. Полное смачивание или несмачивание являются предельными случаями. Реально можно наблюдать **частичное смачивание**, когда краевой угол острый ( $0 < \theta < 90^\circ$ ) и **частичное**

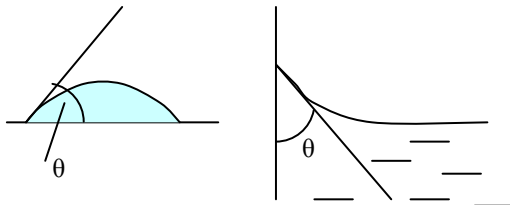


Рис.10.7 а

**несмачивание**, когда краевой угол тупой ( $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ).

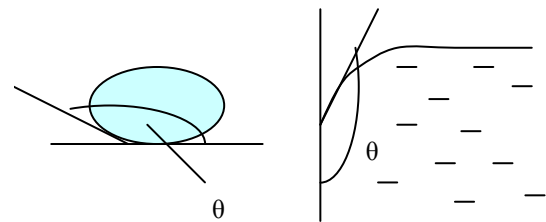


Рис.10.7 б

На рисунке 10.7 а приведены случаи частичного смачивания, а на рис.10.7 б приведены примеры частичного несмачивания. Рассмотренные случаи показывают, что наличие сил поверхностного натяжения граничащих жидкостей или жидкости на поверхности твёрдого тела приводит к искривлению поверхностей жидкостей.

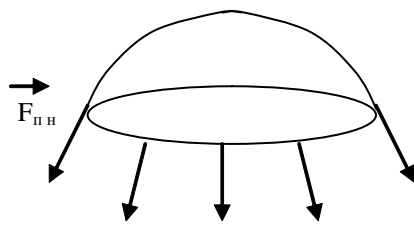


Рис.10.8

Рассмотрим силы, действующие на кривую поверхность. Кривизна поверхности жидкости приводит к появлению сил, действующих на жидкость под этой поверхностью. Если поверхность сферическая, то к любому элементу длины окружности (рис.10.8) приложены силы поверхностного натяжения, направленные по касательной к поверхности и стремящиеся её сократить. Результирующая этих сил направлена к центру сферы.

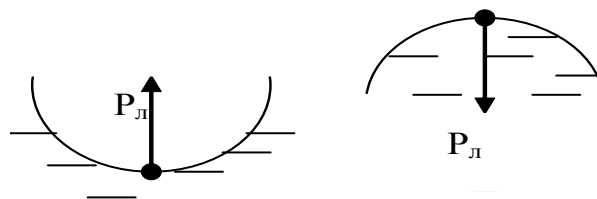


Рис.10.9

Отнесённая к единице площади поверхности эта результирующая сила оказывает дополнительное давление, которое испытывает жидкость под искривлённой поверхностью. Это дополнительное давление называется **давлением Лапласа**. Оно всегда направлено к центру кривизны поверхности. На рисунке 10.9 приведены примеры вогнутой и выпуклой сферических поверхностей и показаны давления Лапласа, соответственно.

Величина давления Лапласа для сферической, цилиндрической и любой поверхности соответственно имеет вид:

$$P_{л} = \frac{2\sigma}{r}; P_{л} = \frac{\sigma}{r}; P_{л} = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

#### 10.4. Капиллярные явления

Пусть жидкость находится в каком-либо сосуде. Если расстояния между поверхностями, ограничивающими жидкость сравнимы с радиусом кривизны поверхности жидкости, то такие сосуды называются **капиллярами**. Явления, происходящие в капиллярах, называются **капиллярными явлениями**. К капиллярным явлениям относят **капиллярный подъём** жидкости и **капиллярное сцепление** между смачиваемыми поверхностями.

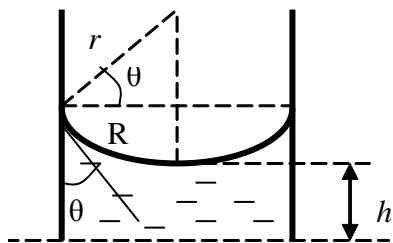


Рис.10.10

Наиболее простыми и часто используемыми капиллярами являются цилиндрические капилляры (рис.10.10). Поверхность жидкости в таких капиллярах является сферической. Пусть  $r$  – радиус кривизны поверхности жидкости,  $R$  – радиус капилляра,  $\theta$  – краевой угол. В случае частичного смачивания жидкость будет подниматься по капилляру под действием давления Лапласа, до тех пор, пока его не скомпенсирует гидравлическое давление жидкости:

$$P_{л} = \rho gh, \quad (10-12)$$

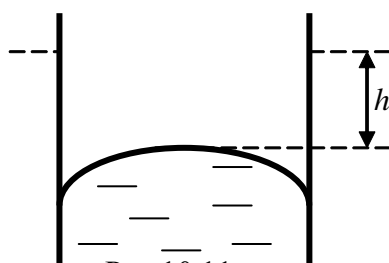


Рис.10.11

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $h$  – высота капиллярного подъёма. Радиус кривизны поверхности жидкости удобно выразить через радиус капилляра, который можно легко измерить:  $r = \frac{R}{\cos \theta}$ . Подставляя давление Лапласа для сферической поверхности выражение (10-12), получим:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R} \quad (10-13)$$

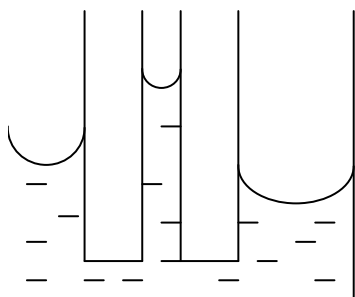


Рис.10.12

В случае **полного смачивания**  $\theta = 0^\circ$ ,  $\cos \theta = 1$ ,  $r = R$  и формула высоты капиллярного подъёма имеет вид:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} \quad (10-14)$$

При **полном несмачивании**  $\theta = 180^\circ$ ,  $\cos \theta = -1$ , и высота капиллярного подъёма будет отрицательной, то есть поверхность жидкости опустится на величину  $h$  (рис. 10.11).

Интересно отметить, что в сообщающихся капиллярах высота уровня жидкости не одинакова. Наибольший капиллярный подъём наблюдается в самом узком капилляре, а наименьший – в самом широком капилляре (рис.10.12).

Для полного смачивания  $h = \frac{2\sigma}{\rho g d}$ . Капиллярные явления наблюдаются при подъёме воды к

поверхности почвы, при использовании промокательной бумаги, тряпки, при подъёме керосина в фитилях и т.п.

С повышением температуры коэффициент поверхностного натяжения жидкостей уменьшается, а при критической температуре равен нулю. Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей зависит также от плотности и молярной массы жидкости. Причём зависимость коэффициента

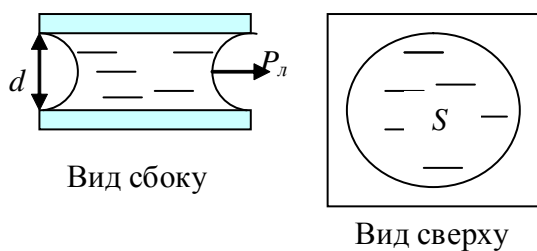


Рис.10.13

поверхностного натяжения от температуры выражена тем сильнее, чем больше плотность жидкости и меньше её молярная масса. Для определения коэффициента поверхностного натяжения можно использовать полуэмпирическую формулу:

$$\sigma = B(T_k - T - \tau) \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (10-14)$$

Здесь  $B$  – постоянный коэффициент, практически одинаковый для всех жидкостей,  $T_k$  – критическая температура,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mu$  – её молярная масса,  $\tau$  – небольшая величина размерности температуры. Формула (10-14) неприменима вблизи критической температуры. Коэффициент поверхностного натяжения водных растворов зависит от рода растворённого вещества. Одни вещества, например, такие как спирт, мыло, стиральные порошки, растворённые в воде, имеющие меньшую, чем у воды плотность, приводят к уменьшению коэффициента поверхностного натяжения и называются **поверхностно активными веществами**. Поверхностно активные вещества применяют в качестве смачивателей, флотационных реагентов, пенообразователей, диспергаторов- понизителей твёрдости, пластифицирующих добавок, модификаторов кристаллизации и т.п. Увеличение концентрации таких веществ приводит к уменьшению коэффициента поверхностного натяжения. Другие вещества, растворённые в воде, например, сахар, соль, приводят к увеличению плотности раствора и увеличивают коэффициент поверхностного натяжения. Увеличение концентрации таких веществ приводит к увеличению коэффициента поверхностного натяжения. Для экспериментального определения коэффициентов поверхностного натяжения используют несколько методов измерения: метод Ребиндера, метод капиллярных волн, метод капли и пузырька и др.

## 10.5. Твёрдые тела

### *Кристаллические и аморфные тела*

Увеличение потенциальной энергии взаимодействия по сравнению с кинетической энергией молекул при некоторых условиях приводит к образованию **твёрдого тела**. Твёрдые тела обычно делят на **кристаллические** и **аморфные**.

**Аморфные вещества**, как и жидкости, имеют ближний порядок в межмолекулярных взаимодействиях. К аморфным телам относят, например, стекло, смолы, пластмассы. Теоретическое описание аморфных тел сложно, как и описание жидкостей. Физические свойства аморфных тел зависят от способа их получения. Аморфные тела **изотропны**, то есть имеют одинаковые физические свойства по всем направлениям.

Значительно лучше развита физика кристаллического состояния из-за высокой степени упорядоченности их структуры. Различают **монокристаллы** и **поликристаллы**. Поликристаллы состоят из множества монокристаллов, расположенных беспорядочно, поэтому поликристаллы изотропны. Монокристаллы же **анизотропны**, то есть их свойства различны по разным направлениям.

В основе теории твёрдого тела лежит модель бесконечного совершенного монокристалла. Структура монокристалла представляет собой непрерывное повторение в трёхмерном пространстве одинаковых структурных единиц. Для монокристаллов характерно сохранение углов между гранями при их росте или разрушении. Для описания правильной структуры кристаллов удобно использовать понятие **кристаллической решётки**. **Кристаллическая решётка** учитывает не только пространственную структуру (решётку), но и тип взаимодействия между частицами решётки. Правильное размещение частиц в кристалле можно описать с помощью операции параллельного

перемещения или *трансляции*. Радиус-вектор, характеризующий положение частицы определяют так:

$$\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c},$$

где  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - наименьшие векторы трансляции. Решётка, построенная путём трансляции какого-либо узла по трём направлениям, называется *трансляционной* или *решёткой Бравэ*. *Пространственная решётка* – это чисто геометрическое понятие в отличие от кристаллической решётки, которую можно получить, связав с каждым узлом пространственной решётки атом, молекулу, ион, группу атомов или молекул, называемых *базисом*. Пространственную решётку можно представить как результат заполнения трёхмерного пространства отдельными ячейками – *элементарными ячейками*. Применив к элементарной ячейке операцию трансляции, получим пространственную решётку. Выбор элементарной ячейки не является однозначным. Элементарная ячейка, обладающая наименьшим объёмом, называется *примитивной ячейкой*. Пространственные решётки могут обладать свойствами симметрии не только по отношению к операции трансляции, но и по отношению к повороту, отражению, инверсии и др. Русский кристаллограф Фёдоров Е.С. показал, что существует всего семь классов кристаллических решёток, которые могут образовать 230 пространственных решёток с различными типами симметрии. В кристалле частицы вещества могут располагаться не только в узлах элементарной ячейки, но и в центре граней, тогда решётку называют *гранецентрированной*. Если частицы вещества располагаются в серединах диагональных плоскостей, проходящих через вершины, то решётку называют *объёмноцентрированной*. Если частицы вещества располагаются в серединах диагональных плоскостей базиса, то решётку называют *базоцентрированной*.

Расположение атомов или молекул в базисе зависит от сил взаимодействия между ними. Частицы располагаются так, чтобы энергия взаимодействия между ними была минимальной. Положительная разность между энергией изолированных частиц и энергией частиц в кристаллической решётке называется *энергией связи*. Энергия связи определяется работой, необходимой для удаления частицы из кристалла.

По типу связей различают пять классов кристаллов.

1. **Кристаллы молекулярные** (с Ван-дер-Ваальсовыми связями). Энергия связи в таких кристаллах имеет значения порядка величины  $10^3 \div 10^4$  Дж/моль. Примерами таких кристаллов являются кристаллы затвердевших инертных газов - неона, аргона, криптона, ксенона.
2. **Кристаллы с ковалентной связью**. Взаимодействие между частицами в таких кристаллах обусловлено тем, что два электрона принадлежат одновременно двум атомам. Энергия связи в таких кристаллах имеет значения порядка величины  $10^5 \div 10^6$  Дж/моль. Примерами таких кристаллов являются кристаллы кремния, алмаза.
3. **Кристаллы с водородной связью**. Эта связь обусловлена наличием водорода в веществах. Она слабее ковалентной. Энергия связи в таких кристаллах имеет значения порядка величины  $10^4$  Дж/моль. Примерами таких кристаллов являются кристаллы льда, вещества  $\text{KN}_2\text{PO}$ -сегнетоэлектрика, применяемого в устройствах обработки информации, фтороводорода  $\text{HF}$ , синильной кислоты  $\text{HCN}$ , фторида аммония  $\text{NH}_4\text{F}$  и др.
4. **Кристаллы с ионной связью**. Эта связь обусловлена взаимодействием ионов. Энергия связи в таких кристаллах имеет значения порядка величины  $10^5 \div 10^6$  Дж/моль. Примерами таких кристаллов являются кристаллы поваренной соли  $\text{NaCl}$ , фторида лития  $\text{LiF}$ .
5. **Кристаллы с металлической связью**. В металлах все валентные электроны слабо связаны с остовами атомов (положительными ионами, находящимися в узлах кристаллической решётки) и обобществлены, так что нельзя определить какой валентный электрон к какому остову относится. Валентные электроны в металлах уподобляют идеальному электронному газу, заполняющему пространство между узлами кристаллической решётки, в которых находятся положительные ионы. Энергия связи в таких кристаллах имеет значения порядка величины  $10^4 \div 10^5$  Дж/моль. Примерами таких кристаллов являются кристаллы всех металлов.

В кристаллах также возможны смешанные связи.



## Дефекты в кристаллах

Реальные кристаллы отличаются от идеальных нарушением строгого порядка в кристаллической решётке. Нарушение строгого порядка может быть вызвано разными причинами. Говорят, что в кристаллах есть дефекты.

*Дефекты* можно разделить на точечные, линейные (дислокации), поверхностные и объёмные.

Примеси оказывают влияние на физические свойства кристаллов, например, полупроводники с донорными или акцепторными примесями обладают примесной проводимостью наряду с собственной проводимостью.

*Дефекты по Шоттки* - отсутствие частицы в каком-нибудь узле кристаллической решётки (вакансия в узле).

*Дефекты по Френкелю* представляют собой наличие частицы в междоузлии, которая оказывается там, покинув своё место в одном из узлов. В этом случае образуется пара дефектов (пара Френкеля), так как пустой узел и наличие лишней частицы в междоузлии в равной мере приводят к нарушению строгого порядка.

*Линейные дефекты* или дислокации можно разделить на краевые и винтовые.

*Краевые дефекты* проявляются в наличии края «лишней» атомной плоскости.

*Винтовые дислокации* представляют собой винтовую линию, образованную из частиц кристалла.

*Поверхностные дефекты* – это дефекты, проявляющиеся на плоскости. К ним относятся поверхность самого кристалла, границы между отдельными частями кристалла, по-разному ориентированными, границы между кристаллами в поликристалле.

*Объёмные дефекты* – это дефекты, проявляющиеся в трёхмерном пространстве. К ним относятся поры и трещины в кристаллах.

Все дефекты влияют на физические свойства кристаллов, такие как прочность, электропроводность, теплопроводность и другие.

## Тепловые свойства кристаллов

Вещество может находиться в твёрдом состоянии при достаточно низких температурах, когда энергия тепловых движений частиц много меньше потенциальной энергии взаимодействия частиц между собой, поэтому колебания частиц около положения равновесия являются относительно малыми. При абсолютном нуле температуры всякие тепловые колебания частиц вещества исчезают. Кристалл должен быть строго упорядочен, а его энтропия равна нулю. При передаче теплоты твёрдому телу, теплота расходуется на увеличение энергии колебаний частиц-осцилляторов около положения равновесия. Эта энергия складывается из кинетической и потенциальной энергий колеблющихся частиц. Полную внутреннюю энергию твёрдого тела, состоящего из  $N$  частиц с учётом всех степеней свободы частиц определяют по формуле:

$$U = 3NkT \quad (10-15)$$

Внутренняя энергия одного моля твёрдого вещества равна  $U = 3RT$ . При нагревании твёрдого тела можно пренебречь изменением его объёма и считать, что вся теплота, подведённая к телу, идёт на увеличение его внутренней энергии. Молярная теплоёмкость твёрдого тела  $C_{mV} = 3R$  в этом случае приблизительно равна 25 Дж/(моль·К). Исследуя теплоёмкость твёрдых тел в широком диапазоне температур, Дюлонг и Пти пришли к выводу (**закон Дюлонга и Пти**), что молярная теплоёмкость твёрдых тел есть величина постоянная, одинаковая для всех веществ и не зависящая от температуры. Однако, дальнейшие исследования температурных зависимостей теплоёмкостей веществ показали, что при обычных температурах теплоёмкости четырёх веществ: бериллия (Be), бора (B), кремния (Si) и

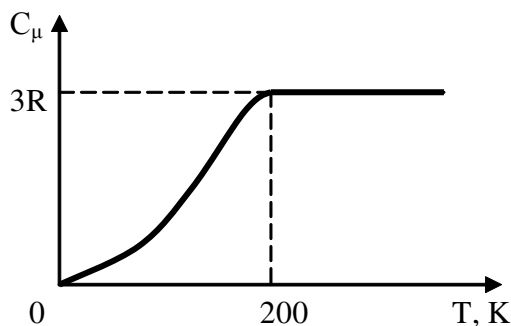


Рис.10.14

алмаза – значительно ниже  $3R$ . С повышением температуры теплоёмкость этих веществ растёт, стремясь к  $3R$ . Позднее было обнаружено отклонение от закона Дюлонга и Пти для всех веществ при низких температурах, близких к абсолютному нулю. Причём, теплоёмкость стремится к нулю при стремлении температуры к абсолютному нулю. Таким образом, была обнаружена зависимость теплоёмкости твёрдых тел от температуры в области низких температур, причём теплоёмкость убывала по закону:  $C \sim 1/T^3$ .

Попытки объяснить температурную зависимость

(рис.10.14) теплоёмкости твёрдых тел были сделаны Эйнштейном. Однако правильное объяснение такой зависимости было дано Дебаем на основе квантовых законов.

### Жидкие кристаллы

При плавлении некоторые кристаллические вещества проходят через несколько промежуточных фаз – **мезофаз**. Физические свойства мезофаз обладают пространственной анизотропией. Как жидкости они обладают высокой пластичностью, способностью к образованию капель и некоторыми другими свойствами, присущими жидкостям. Из-за этих свойств вещества в таких состояниях называют **жидкими кристаллами**.

В зависимости от условий образования жидкие кристаллы делят на термотропные, лиотропные и фототропные. **Термотропные** жидкие кристаллы образуются при изменении температурного режима. **Лиотропные** жидкие кристаллы образуются при растворении твёрдых кристаллов в некоторых растворителях. **Фототропные** жидкие кристаллы образуются под воздействием излучения. В основном жидкокристаллическое состояние наблюдается у органических веществ с сильно вытянутыми макромолекулами.

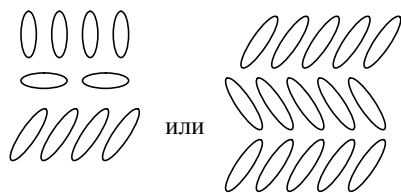


Рис.10.15

В зависимости от ориентации молекул жидкие

кристаллы делят на смектические, нематические и холестерические. **Смектические** жидкие кристаллы характеризуются одномерной пространственной упорядоченностью, слоистостью в расположении молекул (рис.10.15). **Нематические** жидкие кристаллы имеют

ориентационную упорядоченность (рис.10.16). Они выстраиваются так, что их оси параллельны друг другу, но пространственной упорядоченности нет.

**Холестерические** жидкие кристаллы характеризуются такой ориентацией молекул, что их оси при переходе от слоя к слою располагаются по винтовой линии (рис.10.17).

Жидкие кристаллы изменяют свои свойства под действием различных внешних факторов: температуры, электрических и магнитных полей, механических деформаций, излучения. Поэтому жидкие кристаллы получили широкое применение в индикаторных устройствах, в системах хранения и обработки информации.

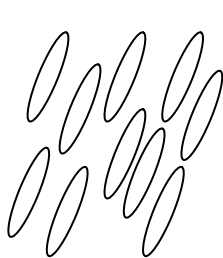


Рис.10.16

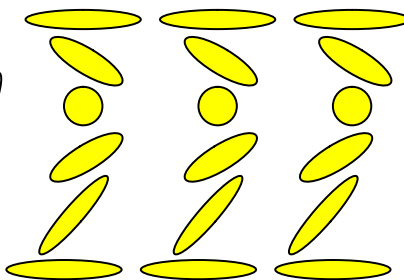


Рис.10.17

## Лекция №11

**Электростатика.** Электрические свойства тел. Электрический заряд и закон его сохранения. Закон Кулона. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии поля. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Остроградского-Гаусса и ее применение. Работа сил электростатического поля по перемещению зарядов. Потенциал. Разность потенциалов. Связь между напряженностью и потенциалом. Потенциал точечного заряда и сферы. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков. Электрическое смещение. Электрическая емкость. Конденсаторы. Соединения конденсаторов. Емкость плоского конденсатора. Энергия электрического поля.

### 11.1. Электрические свойства тел. Электрический заряд. Закон сохранения заряда

Известно, что имеются два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Наименьшую величину заряда  $e = 1,60219 \cdot 10^{-19}$  Кл имеет элементарный заряд. Носителем положительного элементарного заряда является, например, протон - элементарная частица, входящая в состав ядра атома и имеющая заряд  $+e$ . Носителем отрицательного элементарного заряда - электрон. Его заряд  $-e$ .

Все существующие на практике заряды  $q = Ne$ , где  $N$  — целые числа, т.е, электрический заряд квантуется (если физическая величина может принимать только определенные дискретные значения, то говорят, что эта величина квантуется). Экспериментально установлено, что величина заряда не зависит от скорости, следовательно, электрический заряд является релятивистски инвариантным.

Как известно, все вещества состоят из атомов, а атом, в свою очередь, состоит из положительно заряженного ядра, вокруг которого вращаются отрицательно заряженные электроны. В целом атом электронейтрален, т. к. число протонов, несущих положительный заряд  $q_+ = +ze$  (где  $z$  — порядковый номер элемента в таблице Менделеева), равно числу электронов, несущих отрицательный заряд  $q_- = -ze$ .

При электризации, например, трением, оба тела заряжаются разноименно: одно — положительно, а другое — отрицательно, т.е, одно тело теряет электроны, а другое приобретает их.

Если рассмотреть изолированную систему, через поверхность которой заряды не проходят, то можно утверждать: «Алгебраическая сумма электрических зарядов в изолированной системе есть величина постоянная», т.е.

$$\sum_{i=1}^n q_i = const .$$

Это один из фундаментальных законов физики — **закон сохранения электрического заряда**. Его опытным путем установил Фарадей.

### 11.2. Закон Кулона

Он справедлив для точечных зарядов.

**Точечным зарядом** называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от него до других заряженных тел. Кулон в 1785 г. экспериментально установил, что: «Сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величинам этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними», т.е.

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (11-1)$$

где в СИ коэффициент  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$  Ф/м — электрическая постоянная. В итоге имеем  $k = 9 \cdot 10^9$  м/Ф, или Нм<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>. Измеряя в (1) расстояние в "м", а заряды в "Кл", силу получим в "Н". Одноименно заряженные тела отталкиваются, разноименно заряженные - притягиваются. Закон Кулона можно выразить в векторной форме:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \quad (11-2) \quad \vec{F} - \text{сила, действующая}$$

на заряд, к которому направлен вектор  $\vec{r}$ , проведенный от одного заряда к другому;  $\vec{F}_1$  — сила, действующая на заряд  $q_1$  со стороны заряда  $q_2$ ;  $\vec{F}_2$  — сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ .

Экспериментально установлено, что взаимодействие двух зарядов не изменится, если вблизи них поместить другие заряды. Пусть, кроме заряда  $q$ , имеются еще заряды  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , тогда результирующая сила, с которой они действуют на заряд  $q$ , будет

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (11-3)$$

где  $\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$ ;  $\vec{r}_i$  - радиус-вектор, исходящий от заряда  $q_i$ , и направленный к заряду  $q$ .

### 11.3. Электростатическое поле. Напряженность электрического поля. Силовые линии поля.

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле, т.к. всякий электрический заряд изменяет свойства окружающего его пространства, создавая в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что оно действует с силой на заряд, внесенный в него. Основной количественной характеристикой электрического поля является **напряженность электрического поля**  $\vec{E}$  - векторная величина; она определяется отношением силы, действующей со стороны поля на пробный заряд  $q'$ , к величине этого заряда, т.е.

$$\vec{E} = \vec{F} / q'. \quad (11-4)$$

Пробным зарядом  $q'$  называют малый по величине точечный положительный заряд (малый потому, чтобы не изменять ни величины, ни распределения тех сторонних зарядов, которые порождают исследуемое поле. Таким образом, напряженность электрического поля равна силе, с которой электрическое поле действует на единичный положительный заряд и совпадает по направлению с этой силой. Напряженность электрического поля измеряется в В/м.

В общем случае на заряд  $q$ , находящийся в поле с напряженностью  $\vec{E}$ , действует сила

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (11-5)$$

Исследуем с помощью пробного заряда  $q'$  поле неподвижного заряда  $q$ .

Согласно закону Кулона на пробный заряд  $q'$  со стороны заряда  $q$  будет действовать сила (11-2); с учетом этого напряженность поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ ,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (11-6)$$

здесь  $\vec{r}$  - радиус-вектор, проведенный от заряда  $q$  в рассматриваемую точку поля.

Таким образом, напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $r$  от него, прямо пропорциональна величине заряда  $q$  и обратно пропорциональна  $r^2$  - квадрату расстояния от него.

Если электрическое поле создается совокупностью точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , то оно будет действовать на пробный заряд  $q'$  в некоторой точке поля  $M$  с результирующей силой  $\vec{F}$ .

Напряженность поля в этой точке

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{q'} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad (11-7)$$

т.е. равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов в отдельности. Таким образом,

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (11-8)$$

Это утверждение носит название **принципа суперпозиции (наложения) электрических полей** и справедливо для не очень больших величин  $\vec{E}$ .

Условно электрическое поле изображают (рис.11.1) с помощью линий вектора  $\vec{E}$  — **силовых линий**; касательные к силовым линиям совпадают с направлением силы, действующей на пробный заряд в рассматриваемой точке поля.

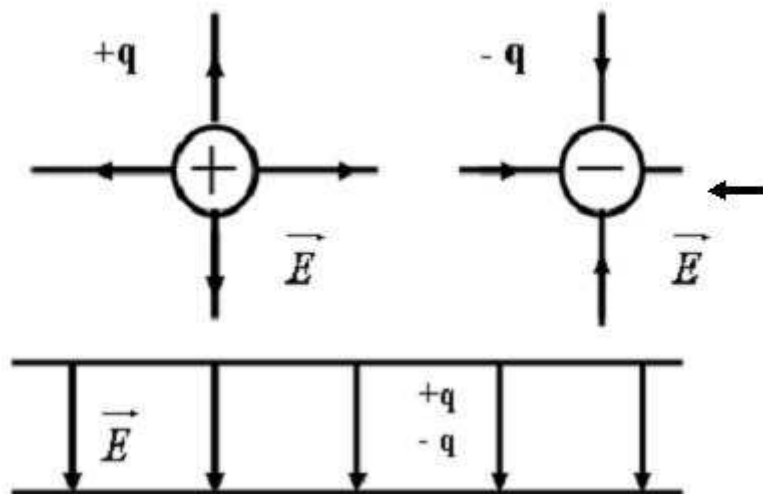


Рис.11.1

#### 11.4. Электрический диполь

Два точечных заряда, равных по величине и противоположных по знаку, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, называются электрическим диполем (рис.11.2).



Рис.11.2

Плечом диполя называется вектор  $\vec{l}$ , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и по модулю равный расстоянию между ними. Электрический диполь характеризуется моментом диполя

$$\vec{p} = q \vec{l} \quad (11-9)$$

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность в произвольной точке поля диполя  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ . Приведем формулы для напряженности поля диполя: 1) в точке А, расположенной на оси диполя, (рис.11.3.)  $\vec{l}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \frac{\vec{l}}{l} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \frac{\vec{l}}{l} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rq \vec{l}}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (11-10)$$

2) в точке, расположенной на перпендикуляре к середине его оси

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{l}}{(r^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}} \quad (11-11)$$

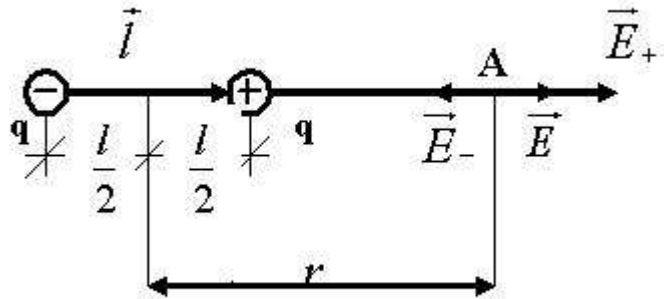


Рис.11.3

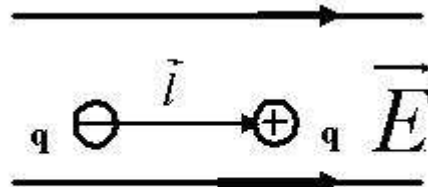


Рис.11.4

На диполь, помещенный в электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , действует момент сил  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ , (11-12) который стремится установить диполь по полю

(рис.11.4). Потенциальная энергия диполя во внешнем электростатическом поле  $W_n = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ . (11-13)

### 11.5. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского-Гаусса

Пусть имеем однородное электрическое поле (напряженность которого одинакова во всех точках пространства) с напряженностью  $\vec{E}$ , которое пронизывает некоторую плоскую поверхность площади  $S$ , тогда скалярное

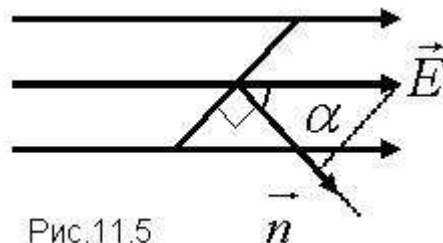


Рис.11.5

произведение  $\vec{E} \cdot \vec{S}$  будет называться **поток вектора напряженности  $\vec{E}$**  через поверхность  $S$ , (рис. 11.5), т.е.

$$\Phi_E = \vec{E} \vec{S} = ES \cos \alpha = E_n S, \quad (11-14)$$

где  $\vec{S} = S \vec{n}$  — есть вектор, равный произведению величины площади на нормаль к этой поверхности,  $E_n$ -проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль,  $\vec{n}$  к площадке.

В общем случае поле может быть неоднородным, поверхность неплоской. В этом случае поверхность можно мысленно разбить на бесконечно малые элементарные площадки  $dS$ , которые можно считать плоскими, а поле вблизи них однородным. В таком случае поток через элементарную площадку

$$d\Phi_E = \vec{E} d\vec{S} = EdS \cos \alpha = E_n dS. \quad (11-15)$$

Полный поток вектора напряженности через поверхность  $S$

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E_n dS. \quad (11-16)$$

Найдем поток вектора напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ , через сферическую поверхность радиуса  $r$ .

Площадь ее поверхности  $S = 4\pi r^2$ . Силовые линии электрического поля, идут по радиусам к поверхности сферы и поэтому угол между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  равен нулю.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} r 4\pi r^2 \vec{n} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (11-17)$$

Можно показать, что поток через замкнутую поверхность не зависит от формы поверхности и от расположения зарядов в ней.

Рассмотрим поток, создаваемый системой зарядов, сквозь замкнутую поверхность произвольной формы, внутри которой они находятся (рис.11.6):

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S}.$$

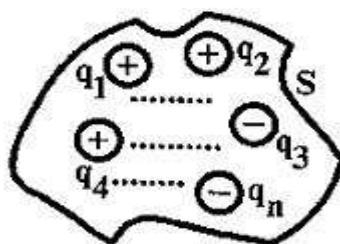


Рис.11.6

Согласно принципу суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$ , поэтому



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 d\vec{S} + \dots + \oint_S \vec{E}_n d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\varepsilon_0} \text{ таким образом}$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\varepsilon_0}. \quad (11-18)$$

Итак, мы доказали **теорему Остроградского-Гаусса**:

«Полный поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на  $\varepsilon_0$ »

Теорема позволяет рассчитать электрические поля, создаваемые заряженными телами различной формы:

- 1) Поле равномерно заряженной, бесконечно протяженной плоскости (рис. 11.7). Построим цилиндр, ось которого перпендикулярна к поверхности, и применим теорему Остроградского-Гаусса.

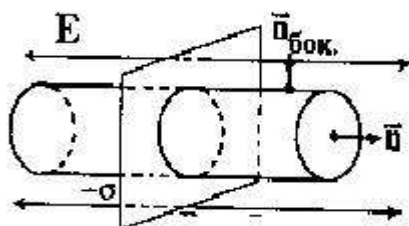


Рис.11.7

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int \vec{E} d\vec{S}_{\text{БОК}} + 2\vec{E} \vec{S}_{\text{ОСН}} = q / \varepsilon_0,$$

т.к.  $\vec{E} d\vec{S}_{\text{БОК}} = E dS_{\text{БОК}} \cos 90^\circ$ , то

$$\Phi_E = 2\vec{E} \vec{S}_{\text{ОСН}} = 2ES \cos 0^\circ = 2ES = q / \varepsilon_0,$$

отсюда

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (11-19)$$

где  $\sigma = q/S$  —поверхностная плотность заряда, измеряемая в СИ в Кл/м<sup>2</sup>.

- 2) Поле между двумя бесконечно протяженными, разноименно заряженными параллельными плоскостями (рис. 11.8). Вне внутреннего промежутка,  $\vec{E} = 0$  т. к. поля, созданные разноименно заряженными параллельными пластинами, направлены противоположно друг другу;

между плоскостями 
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Итак:

$$E = \sigma / \epsilon_0. \quad (11-20)$$

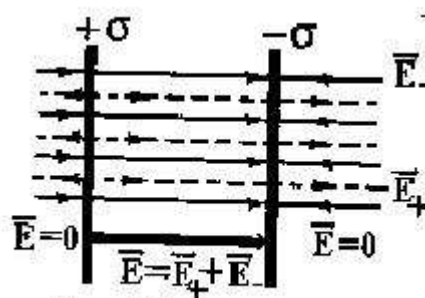


Рис.11.8

По этой же формуле определяется напряженность электрического поля вблизи заряженного проводника.

Поле заряженного цилиндра: заряженный цилиндр радиуса  $R$ , (рис.11.9), окружим коаксиальной цилиндрической поверхностью радиуса  $r$ ; поток вектора  $\vec{E}$  через основания равен нулю, т. к.  $\vec{E} \perp \vec{n}_{оси}$

, где  $\vec{n}_{оси}$  - внешняя нормаль к основаниям цилиндра; поток через боковую поверхность

$$\Phi_E = \vec{E} S_{бок} = E2\pi r h,$$

3) здесь  $h$  — высота цилиндра.

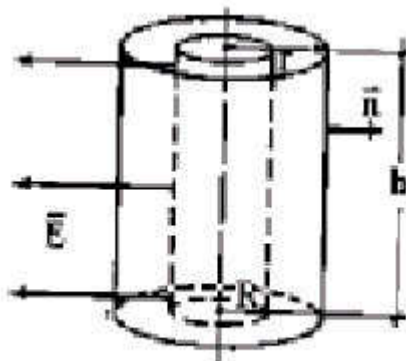


Рис.11.9

Согласно теореме Гаусса – Остроградского при  $r \geq R$   $E2\pi r h = \frac{q}{\epsilon_0}$ ;

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{h} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \quad (11-21)$$

где  $\tau = q/h$  — линейная плотность заряда, которая измеряется в Кл/м.

Когда  $r < R$ , то  $\vec{E} = 0$ .

4) Поле заряженной сферы: поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность сферы радиуса  $r$ , (рис. 11.10), которая окружает заряженную сферу, имеющую радиус  $R$ , при  $r \geq R$   $\Phi_E = E4\pi r^2$ . По теореме Остроградского-Гаусса

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{откуда} \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (11-22)$$

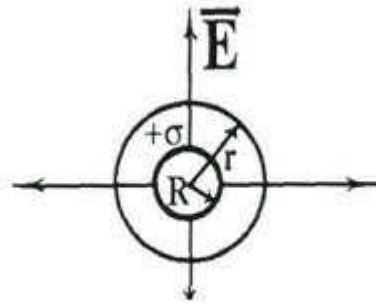


Рис.11.10

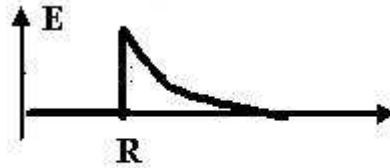


Рис.11.11

т.е. вне заряженной сферы поле такое же, как и поле точечного заряда той же величины, помещенного в центре сферы. Внутри сферы нет зарядов и поэтому поле там отсутствует, т. е. при  $r < R$  имеем,  $\vec{E} = 0$ . Это свойство используют для экранировки от полей внешних зарядов.

## Р

### 11.6. Работа сил электростатического поля по перемещению зарядов.

**В однородном поле** (рис.11.12). Однородное поле создают, например, большие металлические пластины, имеющие заряды противоположного знака. Найдем работу по перемещению заряда  $q'$  на расстояние  $d$ :  $dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdr \cos \alpha = Fdx$

$$A = \int dA = \int_0^d Fdx = Fd = q'Ed = q' \frac{\sigma}{\epsilon_0} d.$$

Таким образом, работа, совершаемая силами поля, не зависит от формы пути, по которому перемещался заряд, а зависит только от расстояния  $d$ , измеряемого вдоль силовой линии между начальным и конечным положением заряда.

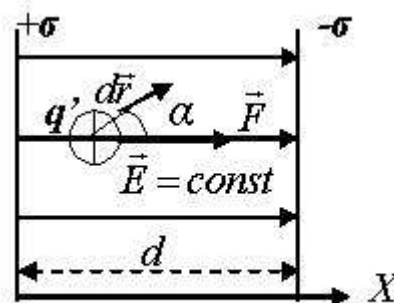


Рис.11.12

**В неоднородном поле точечного заряда q** (рис.11.13).

Найдем работу по перемещению пробного заряда  $q'$  из точки 1 в точку 2 в поле, создаваемом точечным зарядом  $q$ :

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = Fdl \cos\alpha = Fdr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dr,$$

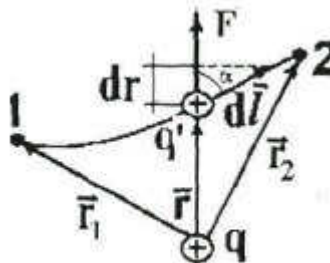


рис.11.13

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (11-23)$$

И в этом случае работа сил не зависит от формы пути. Она является только функцией начального и конечного положения заряда.

Для замкнутой траектории  $L$  она равна нулю, т. к.  $r_1 = r_2$ , т. е.

$$\oint_L \vec{F}d\vec{l} = \oint_L q' \vec{E}d\vec{l} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \quad (11-24)$$

т.е. циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю.

В механике было приведено следующее определение: "Силы, работа которых не зависит от формы пути, называются консервативными силами, а поля, работа сил которых не зависит от формы пути, называются потенциальными полями". Таким образом, рассмотренное нами **электростатическое поле является потенциальным, а кулоновские силы - консервативными.**

### 11.6. Потенциал. Разность потенциалов. Потенциал точечного заряда, диполя, сферы.

Известно, что работа сил потенциального поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии, т. е.

$$A_{12} = W_{n1} - W_{n2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (11-25)$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия пробного заряда  $q'$  в поле заряда  $q$  будет

$$W_n = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} + C.$$

При  $r \rightarrow \infty$  потенциальная энергия должна обращаться в нуль, поэтому значение постоянной  $C$  полагаем равным нулю. В итоге получаем, что

$$W_n = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (11-26)$$

Величину

$$\varphi = W_n / q' \quad (11-27)$$

называют потенциалом электрического поля в данной точке. Потенциал  $\varphi$ , наряду с напряженностью электрического поля  $\vec{E}$ , используется для описания электрического поля. Потенциал точечного заряда  $q$ , как следует из (11-26) и (11-27),

$$\varphi = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (11-28)$$

т. е.  $\varphi \sim q/r$  (прямо пропорционален величине заряда и обратно пропорционален расстоянию от него). Потенциал в СИ измеряется в вольтах:

1 В= 1Дж/1 Кл.

Если поле создает система точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , то потенциал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (11-29)$$

Из формулы (11-27) вытекает, что заряд  $q'$ , находящийся в точке поля с потенциалом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией

$$W_n = q'\varphi. \quad (11-30)$$

Следовательно, работу сил поля над зарядом  $q'$  можно выразить через разность потенциалов

$$A_{12} = W_{n1} - W_{n2} = q'(\varphi_1 - \varphi_2) = q'U, \quad (11-31)$$

здесь  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  - **разность потенциалов** между двумя точками поля, которая называется напряжением. Напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  тоже измеряется в вольтах.

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной** поверхностью.

Ее уравнение имеет вид  $\varphi(x, y, z) = const$ .

Для точечного заряда  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

и эквипотенциальная поверхность является сферической. При перемещении заряда  $q'$  вдоль эквипотенциальной поверхности на отрезок  $dl$  потенциал не изменяется, т. е.  $d\varphi = 0$ , следовательно,

$$dA = q'd\varphi = 0.$$

Вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

### 11.7. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

Напряженность электрического поля и потенциал используются для описания электрического поля.  $\vec{E}$  - векторная величина,  $\varphi$  - скалярная величина. Они связаны между собой. Установим эту связь. Для этого, (рис.11.14), проведем две эквипотенциальные поверхности  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ . Как было показано выше  $\vec{E}$  перпендикулярна эквипотенциальной поверхности. Работа по перемещению пробного заряда

$q'$  из точки с потенциалом  $\varphi$  в точку с потенциалом  $\varphi + d\varphi$  равна  $dA = q'[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -q'd\varphi$ . С другой стороны

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q'\vec{E}d\vec{l} = q'Edl \cos 0^0 = q'Edl.$$

Таким образом  $-q'd\varphi = q'Edl$ , отсюда  $E = -d\varphi/dl$ , (11-32)

$d\varphi/dl$  - характеризует быстроту изменения потенциала.

В более общем случае  $\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi$ , (11-33)

где  $grad\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$ .

Градиент потенциала есть вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону наибольшего возрастания  $\varphi$ . Знак "минус" означает, что  $\vec{E}$  и  $grad\varphi$  направлены в противоположные стороны. Напряженность электрического поля  $E$  измеряется в В/м.

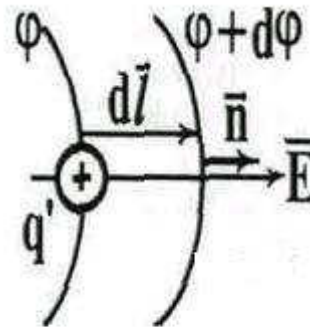


Рис.11.14

### 11.8. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков.

Все вещества по электропроводности разделяются на проводники и диэлектрики. Промежуточное положение между ними занимают полупроводники.

**Проводниками** называют вещества, в которых имеются свободные носители зарядов, способные перемещаться под действием электрического поля. Примерами проводников являются металлы, растворы или расплавы солей, кислот, щелочей.

**Диэлектриками или изоляторами** называются вещества, в которых нет свободных носителей зарядов и которые, следовательно, не проводят электрический ток. Это будут идеальные диэлектрики. В действительности диэлектрики проводят электрический ток, но очень слабо, их проводимость в  $10^{15}$  -  $10^{20}$  раз меньше, чем у проводников. Это обусловлено тем, что в обычных условиях заряды в диэлектриках связаны в устойчивые молекулы и не могут, как в проводниках, легко отрываться и становиться свободными. Молекулы диэлектрика электронейтральны: суммарный заряд электронов и атомных ядер, входящих в состав молекулы, равен нулю. В первом приближении молекулу можно рассматривать как диполь с электрическим моментом  $\vec{p} = q\vec{l}$ ; здесь  $q$  - заряд ядра молекулы,  $\vec{l}$  - вектор, проведенный из "центра тяжести" электронов в "центр тяжести" положительных зарядов атомных ядер.

Различают два основных типа диэлектриков: полярный и неполярный.

Диэлектрик называют **неполярным**, если в его молекулах в отсутствие внешнего электрического поля центры тяжести отрицательных и положительных зарядов совпадают, например,

$H_2, O_2, N_2$ . Для них дипольный момент  $\vec{p} = q\vec{l} = 0$ , т. к.  $\vec{l} = 0$ . И, следовательно, суммарный дипольный момент неполярного диэлектрика  $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0$ .

В молекулах **полярных** диэлектриков ( $H_2O$ , спирты,  $HCl$ ...) центры тяжести зарядов разных знаков сдвинуты друг относительно друга. В этом случае молекулы обладают собственным дипольным моментом  $\vec{p} = q\vec{l} \neq 0$ . Но эти дипольные моменты в отсутствие внешнего электрического поля из-за теплового движения молекул ориентированы хаотически и суммарный дипольный момент такого диэлектрика равен нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0$$

Если диэлектрик внести в электрическое поле, то в нем произойдет перераспределение связанных зарядов. В результате этого суммарный дипольный момент диэлектрика  $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$  становится отличным от нуля. В этом случае говорят, что произошла поляризация диэлектрика. Различают три типа поляризации диэлектриков:

- 1) **ЭЛЕКТРОННАЯ**: она наблюдается в неполярных диэлектриках, когда электронная оболочка смещается относительно ядра против поля.
- 2) **ОРИЕНТАЦИОННАЯ**: она наблюдается в полярных диэлектриках, когда диполи стремятся расположиться вдоль поля. Этому препятствует тепловое хаотическое движение.
- 3) **ИОННАЯ**: она наблюдается в твердых кристаллических диэлектриках, когда внешнее поле вызывает смещение положительных ионов по полю, а отрицательных - против поля.

Количественной мерой поляризации диэлектрика является **поляризованность диэлектрика**  $\vec{P}$  - векторная величина, равная отношению суммарного дипольного момента малого объема диэлектрика к величине этого объема  $\Delta V$ , т. е.

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (11-34)$$

в СИ  $P$  измеряется в Кл/м<sup>2</sup>.

Таким образом, **вектор поляризованности диэлектрика** равен дипольному моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.

Как показывает опыт у изолированных диэлектриков вектор поляризованности для не слишком больших  $\vec{E}$  пропорционален напряженности электрического поля, т.е.

$$\vec{P} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (11-35)$$

где  $\varepsilon_0$  - электрическая постоянная,  $\varkappa$  - называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика; это безразмерная величина, которая для вакуума и, практически, для воздуха, равна нулю ( $\varkappa$  - каппа, греческая буква).

Итак, при внесении диэлектрика в электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}_0$  происходит поляризация диэлектрика, в результате которой возникает поле связанных зарядов, направленное против внешнего поля.

Напряженность поля связанных зарядов обозначим через  $\vec{E}'$ ; оказывается она пропорциональна напряженности поля в диэлектрике, т.е.  $\vec{E}' = \alpha \vec{E}$  поэтому напряженность поля в диэлектрике  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ , или

$$E = E_0 - E' = E_0 - \alpha E \quad \text{откуда} \quad E = \frac{E_0}{1 + \alpha} = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad (11-36)$$

где  $\varepsilon = 1 + \alpha$  (11-37)

называют **относительной диэлектрической проницаемостью вещества** или среды;  $\varepsilon$  - безразмерная величина; т.к.  $\alpha = 0$  для вакуума и, практически, для воздуха, для этих же сред  $\varepsilon = 1$ . Итак, поле в диэлектрике ослабляется в  $\varepsilon$  раз, по сравнению с полем в вакууме.

### 11.9. Теорема Остроградского-Гаусса для поля в диэлектрике. Связь векторов $\vec{D}$ - смещения, $\vec{E}$ - напряженности и $\vec{P}$ - поляризованности

Теорема Остроградского-Гаусса для потока вектора  $\vec{E}$  в вакууме имела вид:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\varepsilon_0}, \quad \text{или} \quad \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i = Q,$$

где  $Q$  - суммарный заряд, охватываемый замкнутой поверхностью  $S$ . В диэлектрике  $Q$  складывается из свободных (сторонних) зарядов и связанных зарядов, т.е.

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = q_{СВОБ} + q_{СВЯЗ}. \quad (11-38)$$

Можно показать, что  $q_{СВЯЗ} = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}$ .

Подставляя эту формулу в (11-38), после преобразования получим  $\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q_{СВОБ}$ .

(11-39)

Величину  $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$  (11-40)

называют **вектором электрического смещения** или **вектором электрической индукции**. Она измеряется, как и  $\vec{P}$ , в Кл/м<sup>2</sup>. Учитывая, что  $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$  находим

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \alpha \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (11-41)$$

Линии вектора  $\vec{D}$  могут начинаться или заканчиваться лишь на свободных зарядах, а линии  $\vec{E}$  - на свободных и связанных. С учетом (11-40) формула (11-39) запишется так

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_{iСВОБ} = Q_{iСВОБ}, \quad (11-41)$$

т.е. поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.



Это и есть **теорема Остроградского-Гаусса в интегральной форме для поля в диэлектрике**, которая в дифференциальной форме выглядит так:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \vec{D} = \rho, \quad \rho = dq/dV, \quad \text{Кл/м}^3 \quad (11-42)$$

$\rho$  – объемная плотность свободных зарядов.

### 11.10. Проводники в электростатическом поле

Проводники - это вещества, в которых есть свободные носители зарядов, способные перемещаться под действием электрического поля. В случае металлических проводников свободными носителями заряда являются валентные электроны. Далее будем говорить о металлических проводниках, в которых носителями свободных зарядов являются электроны.

Электроны в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы т.к.  $\vec{F} = q\vec{E} = e\vec{E}$ , то для равновесия (покоя) электронов в проводнике необходимо, чтобы:

- 1) напряженность поля внутри проводника равнялась нулю:

$$\vec{E} = 0. \quad (11-43)$$

Поскольку  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ , то равенство нулю  $\vec{E}$  означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным, т. е.

$$\varphi = \text{const}. \quad (11-44)$$

Из (11-44) следует, что поверхность проводника и весь проводник являются эквипотенциальной поверхностью;

- 2) напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности, т. е.  $\vec{E} = \vec{E}_n$ , а касательная составляющая

$$\vec{E}_\tau = 0 \quad (11-45)$$

3) Поскольку внутри заряженного проводника электрическое поле отсутствует, то согласно теореме Остроградского-Гаусса, это означает, что сумма зарядов внутри него равна нулю. Следовательно, все (нескомпенсированные) заряды располагаются на поверхности проводника с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

Используя теорему Остроградского-Гаусса, легко показать, что вблизи поверхности заряженного проводника

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (11-46)$$

### 11.11. Проводник во внешнем электростатическом поле. Электрическая емкость

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле, изображенное штриховыми линиями на рис. 11.15, положительные заряды будут перемещаться по направлению  $\vec{E}$ , а отрицательные - против поля  $\vec{E}$ . В результате этого у концов проводника возникают индукционные заряды противоположных знаков. Они создают поле, направленное против внешнего так, что внутри проводника линии напряженности будут разорваны поверхностью проводника, заканчиваясь на индуцированных отрицательных зарядах и начинаясь на индуцированных положительных (рис. 11.15-сплошные линии).

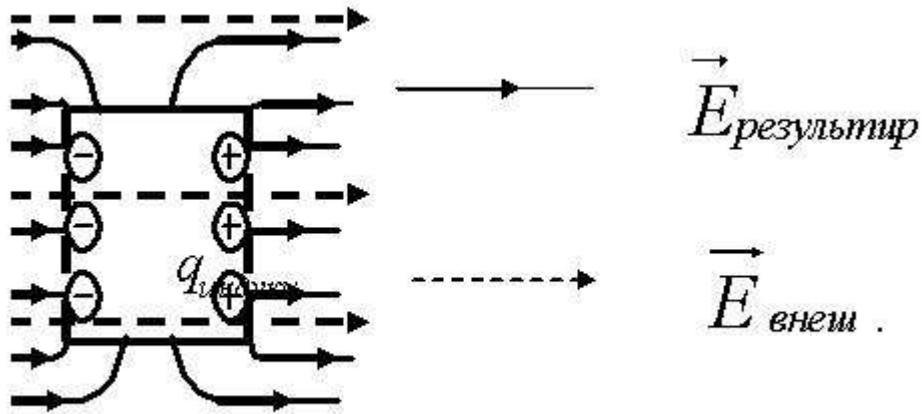


Рис.11.15

Будем сообщать уединенному проводнику разные по величине заряды  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . При этом проводник будет иметь разные по величине потенциалы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Оказывается отношение  $\frac{q_1}{\varphi_1} = \frac{q_2}{\varphi_2} = \dots = \frac{q_n}{\varphi_n}$  - есть величина постоянная для данного проводника и не зависит от величины сообщенного заряда, а зависит только от геометрической формы проводника и диэлектрической проницаемости окружающей его среды.

Это отношение дает величину емкости уединенного проводника, т.е.

$$C = q / \varphi . \quad (11-47)$$

Электрическая емкость измеряется в фарадах:  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл} / 1 \text{ В}$ , а также в  $\text{мФ}$ ,  $\text{мкФ}$ ,  $\text{нФ}$ ,  $\text{пФ} \dots$ ; причем  $1 \text{ мФ} = 10^{-3} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ .

Потенциал заряженного шара радиуса  $R$  равен  $\varphi = q / 4\pi\epsilon_0 R$ , с учетом этого находим емкость уединенного шарового проводника:

$$C = q / \varphi = 4\pi\epsilon_0 R , \quad (11-48)$$

т.е. оказывается, что  $C$  пропорциональна радиусу шарового проводника  $R$ .

Для получения большей емкости используют конденсаторы в виде двух проводников, помещенных близко друг от друга. В этом случае емкость

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}} . \quad (11-49)$$

Для плоского конденсатора, (рис.11.16),  $U = Ed$ ,  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S}$ ,

тогда по формуле (11-49) можно найти 
$$C = \frac{q}{Ed} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} , \quad (11-50)$$

где  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость вещества между пластинами.

При параллельном соединении конденсаторов, (рис.11.17) общий заряд  $q_{\Sigma} = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ .

$$\text{Используя формулу (11-49), } UC_{\Sigma} = UC_1 + UC_2 + \dots + UC_n, \text{ откуда } C_{\Sigma} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \Sigma C_i \quad (11-51)$$

При последовательном соединении конденсаторов, (рис.11.18)  $U_{\Sigma} = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ , что согласно (11-49)

можно переписать так  $\frac{q}{C_{\Sigma}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n}$ , откуда

$$\frac{1}{C_{\Sigma}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum \frac{1}{C_i}, \quad (11-52)$$

т.е. суммарная емкость уменьшается.

### 11.12. Энергия заряженного проводника, системы проводников и конденсатора

Пусть проводник имеет емкость  $C$ , заряд  $q$ , потенциал  $\varphi$ ; тогда работа, совершаемая против сил электрического поля при перенесении заряда  $dq$  из бесконечности на проводник, будет

$$dA = \varphi dq = C \varphi d\varphi. \quad (11-53)$$

Чтобы зарядить проводник от нуля до потенциала  $\varphi$ , необходимо совершить работу

$$A = \int dA = C \int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2} \quad (11-54)$$

Энергия заряженного проводника  $W_n = A = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$

**полная энергия системы заряженных проводников**

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i^2. \quad (11-55)$$

**Для конденсатора**

$$W_n = CU^2/2 = qU/2. \quad (11-56)$$

Покажем, что формула (11-56) выражает **энергию электрического поля**. Подставляя в (11-56) выражение для емкости плоского конденсатора (11-50) и учитывая, что  $U = Ed$ , находим

$$W_n = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 Sd/2 = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 V/2, \quad (11-57)$$

где  $V$  - объем, занятый электрическим полем. Объемная плотность энергии

$$w = W_n/V = \varepsilon_0 \varepsilon E^2/2 = ED/2, \quad \text{Дж/м}^3 \quad (11-58)$$

Из (11-58) следует, что объемная плотность энергии электрического поля в вакууме ( $\varepsilon = 1$ )

$$w_{\text{ВАК}} = \varepsilon_0 E^2/2. \quad (11-59)$$

С учетом этого объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика

$$w_{\text{диэл}} = w - w_{\text{БАК}} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2 / 2 = \varkappa \varepsilon_0 E^2 / 2 = PE / 2,$$

где  $P = \varkappa \varepsilon_0 E$  - поляризованность диэлектрика,  $\chi$  - его диэлектрическая восприимчивость;

$w_{\text{диэл}}$  - характеризует энергию, которая была затрачена при поляризации диэлектрика.

## Лекция №12

**Постоянный электрический ток.** Электрический ток. Сила и плотность тока. Электродвижущая сила источника тока. Сторонние силы. Напряжение. Закон Ома для однородного участка цепи. Сопротивление проводников. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Закон Джоуля – Ленца. Работа и мощность тока. Правила Кирхгофа

### 12.1. Электрический ток. Сила и плотность тока.

Упорядоченное движение электрических зарядов называется **электрическим током**. Носителями тока могут быть электроны, а также положительные и отрицательные ионы. За направление тока условились принимать направление движения положительных зарядов, образующих этот ток. Если за время  $dt$  через поперечное сечение проводника переносится заряд  $dq$ , то **сила тока**

$$I = dq / dt. \quad (12-1)$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется **постоянным**. Для постоянного тока

$$I = q / t. \quad (12-2)$$

Единицей силы тока в СИ является А - ампер.  $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл} / 1 \text{ с}$ . Приборы для измерения силы тока называются **амперметрами**. Идеальный амперметр имеет нулевое внутреннее сопротивление. Если ток в проводнике создается как положительными, так и отрицательными носителями зарядов одновременно,

то

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{|dq^-|}{dt}. \quad (12-3)$$

Электрический ток может быть неравномерно распределен по поверхности, через которую он течет.

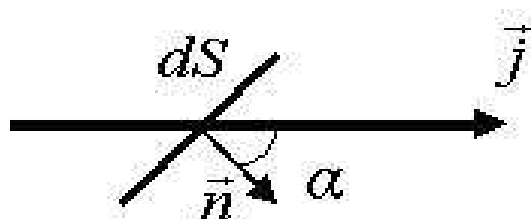


Рис.12.1

Более детально электрический ток можно характеризовать с помощью **вектора плотности тока**  $\vec{j}$ . Он численно равен отношению тока  $dI$  через расположенную перпендикулярно направлению тока площадку  $dS_{\perp}$  к величине этой площадки, т. е.

$$j = dI / dS_{\perp} \quad \text{А/м}^2 \quad (12-4)$$

По направлению вектор  $\vec{j}$  совпадает с направлением скорости упорядоченного движения положительных зарядов. Зная  $\vec{j}$  в каждой точке сечения проводника, можно найти ток  $I$  через любую поверхность  $S$ , (рис.12.1)

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j_n dS, \quad (12-5)$$

где  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ ;  $\vec{j} d\vec{S} = j dS \cos \alpha = j_n dS$ ;  $j_n$  - проекция  $\vec{j}$  на  $\vec{n}$ .

### 12.2. Электродвижущая сила источника тока. Сторонние силы. Напряжение

Если в проводнике создать электрическое поле и затем не поддерживать его неизменным, то за счет перемещения зарядов поле исчезнет и, следовательно, ток прекратится. Для того, чтобы поддерживать ток неизменным, необходимо от конца проводника, (рис.12.2) с потенциалом  $\varphi_2$  отводить приносимые туда током заряды и переносить их к началу проводника с большим потенциалом  $\varphi_1$ , т.е. необходимо создать круговорот зарядов.

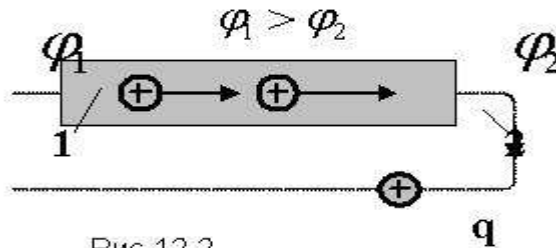


Рис.12.2

Это возможно лишь за счет работы **сторонних сил** неэлектростатической природы, например, за счет протекания химических процессов в гальванических элементах.

Величина, численно равная работе сторонних сил, по перемещению единичного положительного заряда называется ЭДС и обозначается  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = A_{СТОР}/q. \quad (12-6)$$

ЭДС, как и потенциал, в СИ измеряется в вольтах. Представим стороннюю силу как

$$\vec{F}_{СТОР} = q\vec{E}_{СТОР}, \quad (12-7)$$

тогда работа сторонних сил на участке 1-2 цепи будет равна

$$A_{12СТОР} = \int_1^2 \vec{F}_{СТОР} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{СТОР} d\vec{l}, \quad (12-8)$$

а ЭДС на этом же участке

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{12СТОР}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{СТОР} d\vec{l},$$

где  $d\vec{l}$  - элемент длины проводящего участка цепи. ЭДС, действующая в замкнутой цепи

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{СТОР} d\vec{l}, \quad (12-9)$$

т.е. ЭДС равна циркуляции вектора напряженности сторонних сил.

Однако, кроме сторонних сил, на носители тока действуют силы электростатического поля  $qE$ . Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд

$$\vec{F}_{CТОP} = q(\vec{E} + \vec{E}_{CТОP}). \quad (12-10)$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом  $q$  на участке 1-2 цепи,

$$A_{12CТОP} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{CТОP}) d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}. \quad (12-11)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами над единичным положительным зарядом, называется **падением напряжения** или просто **напряжением**  $U$  на данном участке, т. е.

$$U_{12} = A_{12} / q = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (12-12)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется **однородным**. Для него

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (12-13)$$

Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называется **неоднородным**.

Для замкнутой цепи  $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$  и поэтому  $U = \varepsilon$ .

### 12.3. Закон Ома для однородного участка цепи. Сопротивление проводников.

Г. Ом в 1826 г. экспериментально установил закон, который называется **законом Ома для однородного участка цепи**: Ток, текущий по однородному металлическому проводнику, пропорционален падению напряжения на проводнике.

$$I = \frac{1}{R} U = \frac{1}{R} (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (12-14)$$

где  $R$  - сопротивление проводника, измеряется в СИ в омах [Ом]; из (12-14) следует, что  $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А}$ .

Сопротивление проводника

$$R = \rho l / S, \quad (12-15)$$

где  $\rho$  - удельное сопротивление, измеряется в СИ в Ом · м. Оно зависит от температуры:  $\rho = \rho_0 (1 + \alpha T)$ , где  $\rho_0$  - удельное сопротивление при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  - температурный коэффициент сопротивления, близкий к  $1/273 \text{ K}^{-1}$ ,  $T$  - термодинамическая температура; так что с ростом температуры сопротивление металлических проводников увеличивается. Качественная температурная зависимость удельного сопротивления металлического проводника представлена на рис.12.3

Найдем связь между векторами  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$ . Для этого мысленно выделим в окрестности некоторой точки проводника элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$ , (рис.12.4).

Между концами проводника длиной  $dl$  напряжение  $U = Edl$ , под действием которого через его поперечное сечение площадью  $dS$  течет ток  $I = jdS$ .

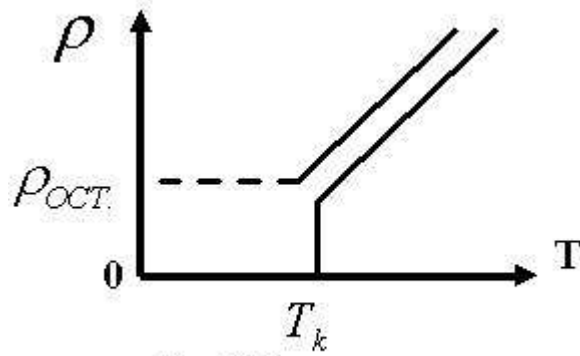


Рис.12.3

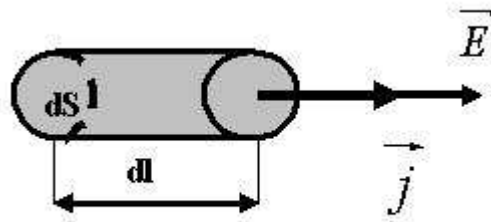


Рис.12.4

Сопротивление цилиндрического проводника, в нашем случае, равно

$$R = \rho \frac{dl}{dS}.$$

Используя закон Ома для участка цепи  $I = \frac{U}{R}$ , находим:

$$jdS = \frac{Edl}{\rho \frac{dl}{dS}},$$

откуда и получаем **закон Ома в дифференциальной форме**

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (12-16)$$

где  $\gamma = \frac{1}{\rho}$  удельная электропроводность;  $[\gamma] = 1 / (\text{Ом м})$ .

#### 12.4. Закон Ома для неоднородного участка цепи

На неоднородном участке цепи плотность тока пропорциональна сумме напряженностей электростатического поля и поля сторонних сил, т.е.

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{СТОП}}). \quad (12-17)$$

Рассмотрим цилиндрический проводник длиной  $l$  с площадью поперечного сечения  $S$ . Умножим обе части равенства (12-17) на перемещение  $d\vec{l}$  вдоль оси проводника и проинтегрируем получившееся соотношение по длине проводника от 0 до  $l$ :

$$\int_0^l \vec{j} d\vec{l} = \gamma \left( \int_0^l \vec{E} d\vec{l} + \int_0^l \vec{E}_{\text{СТОП}} d\vec{l} \right),$$

что дает

$$j \cdot l = \gamma (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}). \quad (12-18)$$

Заменив  $j$  на  $I/S$ , а  $\gamma$  на  $\frac{1}{\rho}$ , из (12-18) получим  $I \frac{\rho l}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$ , откуда следует **закон Ома для неоднородного участка цепи**

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}) / R_{12} \quad (12-19)$$

где  $R_{12} = \rho l / S$  - сопротивление участка цепи 12. Для замкнутой цепи  $\varphi_1 = \varphi_2$  формула (12-19) запишется в виде

$$I = \varepsilon / R_{\Sigma} \quad (12-20)$$

где  $R_{\Sigma}$  - суммарное сопротивление всей цепи;  $\varepsilon$  - ЭДС источника.

Пусть замкнутая цепь состоит из источника электрической энергии с ЭДС  $\varepsilon$  и внутренним сопротивлением  $r$ , а также внешней цепи потребителя, имеющей сопротивление  $R$ . Согласно (12-20)

$$I = \varepsilon / (R + r). \quad (12-21)$$

Разность потенциалов на электродах источника, рис.12.5, равна напряжению на внешнем участке цепи:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = IR = \varepsilon - Ir. \quad (12-22)$$

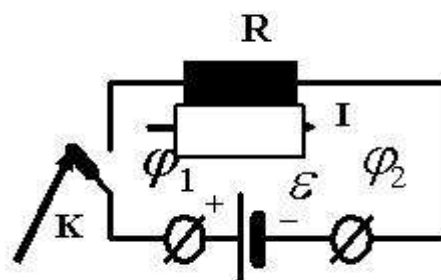


Рис.12.5

Если цепь разомкнуть, то ток в ней прекратится и напряжение  $U$  на зажимах источника станет равным его ЭДС, т.е.  $U = \varepsilon$ .

Таким образом, напряжение на внешнем участке цепи, будет равно

$$U = IR = \varepsilon R / (R + r). \quad (12-23)$$

В пределе, когда  $R \rightarrow 0$  (источник тока замкнут накоротко), то в этом случае, в соответствии с (12-21), ток максимален

$$I_{\text{макс}} = I_{\text{кз}} = \varepsilon / r, \quad (12-24)$$



а напряжение во внешней цепи равно нулю.

В противоположном предельном случае,  $R \rightarrow \infty$ , цепь разомкнута и ток отсутствует:  $I = \lim_{R \rightarrow \infty} [\mathcal{E} / (R+r)] = 0$ , а напряжение на зажимах источника максимально и равно его ЭДС:

$$U_{R \rightarrow \infty} = \mathcal{E} R / (R + r) = \mathcal{E}, \text{ т. к. } \lim_{R \rightarrow \infty} R / (R + r) = 1. \quad (12-25)$$

### 12.5. Закон Джоуля – Ленца. Работа и мощность тока.

Проводник нагревается, если по нему протекает электрический ток. Джоуль и Ленц установили, что количество выделившегося тепла

$$Q = I^2 R t, \quad (12-26)$$

где  $I$  - ток,  $R$  - сопротивление,  $t$  - время протекания тока. Легко доказать, что

$$Q = I^2 R t = U I t = U^2 t / R = q U, \quad (12-27)$$

где  $q = I t$  - электрический заряд.

Если ток изменяется со временем (т. е. в случае непостоянного тока), то

$$Q = \int_0^t dQ = \int_0^t i^2 R dt, \quad (12-28)$$

где  $i$  - мгновенное значение тока.

Нагревание проводника происходит за счет работы, совершаемой силами электрического поля над носителями заряда. Эта работа

$$A = q U = U I t = I^2 R t = U^2 t / R. \quad (12-29)$$

Работа  $A$ , энергия  $W$ , количество тепла  $Q$  в СИ измеряются в Дж.

Так как мощность характеризует работу, совершаемую в единицу времени, т.е.  $P = \frac{dA}{dt}$ , то

$$P = U I = I^2 R = U^2 / R. \quad (12-30)$$

Мощность в СИ измеряется в ваттах:  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ с}$ ; откуда  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Втс}$ ;

$3600 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт час}$ ,  $3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 1 \text{ кВт час}$ .

Формулы (12-29) и (12-30) позволяют рассчитать полезную работу и полезную мощность. Затраченная работа и мощность определяется по формулам

$$A_{\text{затр}} = q \mathcal{E} = \mathcal{E} I t = I^2 (R + r) t = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r} t. \quad (12-31)$$

$$P_{\text{затр}} = \frac{q \mathcal{E}}{t} = \mathcal{E} I = I^2 (R + r) = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}. \quad (12-32)$$

Отношение полезной работы (мощности) к затраченной характеризует КПД источника

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{затр}}} = \frac{P}{P_{\text{затр}}} = \frac{R}{R + r}. \quad (12-33)$$

Из (12-33) следует, что при  $R \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ ;  $R \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 1$ . Но при  $R \rightarrow \infty$  ток  $I \rightarrow 0$  и поэтому  $A \rightarrow 0$  и  $P \rightarrow 0$ .

Определим величину  $R$ , при котором выделится максимальная мощность. Легко показать, что это наступает при  $R = r$ , тогда

$$P_{\text{МАКС}} = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}, \quad (12-34)$$

КПД в этом случае будет 50%.

Согласно закону Джоуля - Ленца в элементарном цилиндрическом объеме  $dV$  с площадью поперечного сечения  $dS$  и длиной  $dl$  за время  $dt$  выделится тепло

$$dQ = I^2 R dt = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dl dS dt = \rho j^2 dV dt.$$

Разделив на  $dV$  и  $dt$ , найдем количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема

$$Q_{\text{уд}} = \frac{dQ}{dV dt} = \rho j^2. \quad (12-35)$$

здесь  $Q_{\text{уд}}$  -называется удельной тепловой мощностью тока, которая в СИ измеряется в Вт/м<sup>3</sup>.

С учетом (12-16) из (12-3) следует, что

$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2 = \gamma E^2. \quad (12-36)$$

Формулы (12-35) и (12-36) выражают **закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме.**

## 12.6. Правила Кирхгофа

В основе расчета электрических цепей лежат **два правила Кирхгофа:**

**Первое правило:** Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (12-37)$$

Току, текущему к узлу, приписывается один знак ("+" или "-"), а току, текущему от узла, - другой знак; таким образом, для направлений токов в узле электрической схемы, представленном на рис. 12. 6, имеем

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

**Второе правило:** В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре, т.е.

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \quad (12-38)$$

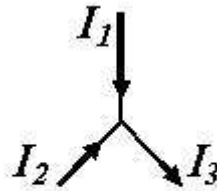


Рис.12.6

При этом также следует придерживаться правила знаков: токи, текущие вдоль выбранного направления обхода контура считаются положительными, а идущие против направления обхода - отрицательными. Соответственно положительными считаются ЭДС тех источников, которые вызывают ток, совпадающий по направлению с обходом контура (рис.12.7), где  $\epsilon$  обозначает направление обхода контура.

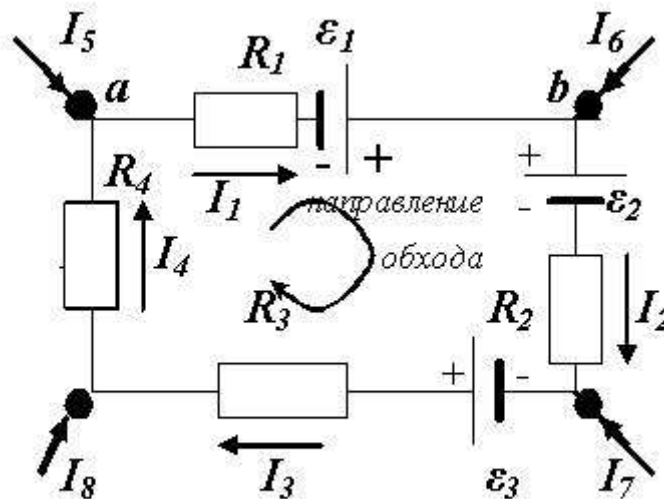


Рис.12.7

Применим правила Кирхгофа для расчета электрической цепи, представленной на рис.12.7. Для этого нужно записать  $(m-1)$  уравнений для основании первого правила Кирхгофа и еще одно уравнение для единственного здесь замкнутого контура, используя второе правило Кирхгофа и принимая во внимание направления ЭДС, токов в ветвях и обхода контура:

$$I_1 - I_4 - I_5 = 0$$

$$I_1 + I_6 - I_2 = 0$$

$$I_2 - I_3 + I_7 = 0$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3.$$

### Лекция №13

Электрический ток в различных средах. Классическая теория электропроводности металлов. Термоэлектронная эмиссия. Электрический ток в вакууме. Электрический ток в газах. Виды газового разряда.

16

### 13.1. Классическая теория электропроводности металлов

Носителями тока в металлах являются свободные электроны, т. е. электроны, слабо связанные с ионами кристаллической решетки металла. Это представление о природе носителей тока в металлах основывается на электронной теории проводимости металлов, созданной немецким физиком П. Друде (1863—1906) и разработанной впоследствии нидерландским физиком Х. Лоренцем, а также на ряде классических опытов, подтверждающих положения электронной теории.

Первый из таких опытов — **опыт Рикке** (1901), в котором в течение года электрический ток три последовательно соединенных с тщательно отшлифованными торцами металлических пропускался через цилиндры (Cu, Al, Cu) одинакового радиуса. Несмотря на то, что общий заряд, прошедший через эти цилиндры, достигал огромного значения ( $\approx 3,5 \cdot 10^6$  Кл), никаких, даже микроскопических, следов переноса вещества не обнаружилось. Это явилось экспериментальным доказательством того, что ионы в металлах не участвуют в переносе электричества, а перенос заряда в металлах осуществляется частицами, которые являются общими для всех металлов. Такими частицами могли быть открытые в 1897 г. английским физиком Д. Томсоном (1856—1940) электроны. Для доказательства этого предположения необходимо было определить знак и величину удельного заряда носителей (отношение заряда носителя к его массе). Идея подобных опытов заключалась в следующем: если в металле имеются подвижные, слабо связанные с решеткой носители тока, то при резком торможении проводника эти частицы должны по инерции смещаться вперед, как смещаются вперед пассажиры, стоящие в вагоне при его торможении. Результатом смещения зарядов должен быть импульс тока; по направлению тока можно определить знак носителей тока, а зная размеры и сопротивление проводника, можно вычислить удельный заряд носителей. Идея этих опытов (1913) и их качественное воплощение принадлежат советским физикам С. Л. Мандельштаму (1879—1944) и Н. Д. Папалекси (1880—1947). Эти опыты в 1916 г. были усовершенствованы и проведены американским физиком Р. Толменом (1881—1948) и ранее шотландским физиком Б. Стюартом (1828—1887). Ими экспериментально доказано, что носители тока в металлах заряжены отрицательно, а их удельный заряд приблизительно одинаков для всех исследованных металлов. По значению удельного заряда носителей электрического тока и по определенному ранее Р. Милликеном элементарному электрическому заряду была определена их масса. Оказалось, что значения удельного заряда и массы носителей тока и электронов, движущихся в вакууме, совпадали. Таким образом, было окончательно доказано, что носителями электрического тока в металлах являются **свободные электроны**.

Свободные электроны при обычных температурах практически не покидают металл. Следовательно, в поверхностном слое металла должно быть задерживающее электрическое поле, препятствующее выходу электронов из металла в окружающий вакуум. Работа, которую нужно затратить для удаления электрона из металла в вакуум, называется **работой выхода**. Укажем две вероятные причины появления работы выхода:

1. Если электрон по какой-то причине удаляется из металла, то в том месте, которое электрон покинул, возникает избыточный положительный заряд и электрон притягивается к индуцированному им самим положительному заряду.
2. Отдельные электроны, покидая металл, удаляются от него на расстояния порядка атомных и создают тем самым над поверхностью металла «электронное облако», плотность которого быстро убывает с расстоянием. Это облако вместе с наружным слоем положительных ионов решетки образует **двойной электрический слой**, поле которого подобно полю плоского конденсатора. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям ( $10^{-10}$  —  $10^{-9}$  м). Он не создает электрического поля во внешнем пространстве, но препятствует выходу свободных электронов из металла.

Таким образом, электрон при вылете из металла должен преодолеть задерживающее его электрическое поле двойного слоя. Разность потенциалов  $\Delta\varphi$  в этом слое, называемая **поверхностным скачком потенциала**, определяется работой выхода ( $A$ ) электрона из металла:

$$\Delta\varphi = A/e,$$

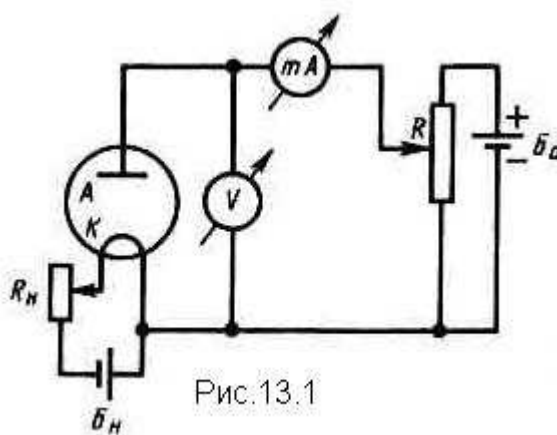
где  $e$  — заряд электрона. Так как вне двойного слоя электрическое поле отсутствует, то потенциал среды равен нулю, а внутри металла потенциал положителен и равен  $\Delta\varphi$ . Потенциальная энергия свободного электрона внутри металла равна —  $e\Delta\varphi$  и является относительно вакуума отрицательной. Исходя из этого можно считать, что весь объем металла для электронов проводимости представляет потенциальную яму с плоским дном, глубина которой равна работе выхода  $A$ . Работа выхода выражается в **электрон-вольтах** (эВ): 1 эВ равен работе, совершаемой силами поля при перемещении элементарного электрического заряда (заряда, равного заряду электрона) при прохождении им разности потенциалов в 1 В. Так как заряд электрона равен  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, то  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Работа выхода зависит от химической природы металлов и от чистоты их поверхности и колеблется в пределах нескольких электрон-вольт.

### 13.2. Термоэлектронная эмиссия. Электрический ток в вакууме.

Если сообщить электронам в металлах энергию, необходимую для преодоления работы выхода, то часть электронов может покинуть металл, в результате чего наблюдается явление испускания электронов, или **электронной эмиссии**. В зависимости от способа сообщения электронам энергии различают термоэлектронную, фотоэлектронную, вторичную электронную и автоэлектронную эмиссии.

**1. Термоэлектронная эмиссия** — это испускание электронов нагретыми металлами. Концентрация свободных электронов в металлах достаточно высока, поэтому даже при средних температурах вследствие распределения электронов по скоростям (по энергии) некоторые электроны обладают энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера на границе металла. С повышением температуры число электронов, кинетическая энергия теплового движения которых больше работы выхода, растет, и явление термоэлектронной эмиссии становится заметным.



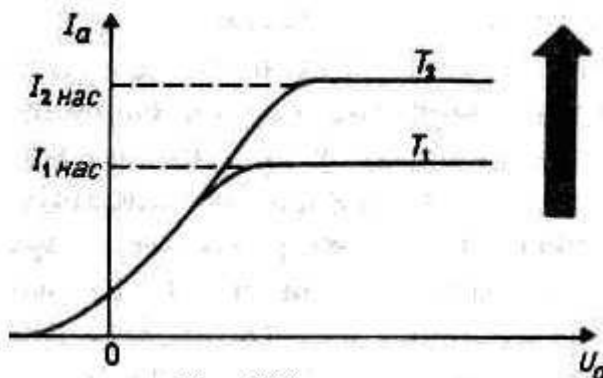
Исследование закономерностей термоэлектронной эмиссии можно провести с помощью простейшей двухэлектродной лампы — **вакуумного диода**, представляющего собой откачанный баллон, содержащий два электрода: катод  $K$  и анод  $A$ . В простейшем случае катодом служит нить из тугоплавкого металла (например, вольфрама), накаливаемая электрическим током. Анод чаще всего имеет форму металлического цилиндра, окружающего катод. Если диод включить в цепь, как это показано на рис. 13.1, то при накаливании катода и подаче на анод положительного напряжения (относительно катода) в анодной цепи диода возникает ток. Если поменять полярность батареи  $B_a$ , то ток прекращается, как бы сильно катод ни накаливали. Следовательно, катод испускает отрицательные частицы — электроны. Если поддерживать температуру накаленного катода постоянной и снять зависимость анодного тока  $I_a$  от анодного напряжения  $U_a$  — **вольт-амперную характеристику**

(рис.13.2), то оказывается, что она не является линейной, т. е. для вакуумного диода закон Ома не выполняется. Зависимость термоэлектронного тока  $I$  от анодного напряжения в области малых положительных значений  $U$  описывается **законом трех вторых** (установлен русским физиком С. А. Богуславским (1883— 1923) и американским физиком И. Ленгмюром (1881 — 1957)):

$$I=BU^{3/2},$$

где  $B$  — коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов, а также их взаимного расположения.

При увеличении анодного напряжения ток возрастает до некоторого



максимального значения  $I_{нас}$ , называемого **током насыщения**. Это означает, что почти все электроны, покидающие катод, достигают анода, поэтому дальнейшее увеличение напряженности поля не может привести к увеличению термоэлектронного тока. Следовательно, плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность материала катода.

Плотность тока насыщения определяется **формулой Ричардсона — Дешмана**, выведенной теоретически на основе квантовой статистики:

$$j_{нас}=CT^2e^{-A/(kT)},$$

где  $A$  — работа выхода электронов из катода,  $T$  — термодинамическая температура,  $C$  — постоянная, теоретически одинаковая для всех металлов. На рис.13.2 представлены вольт-амперные характеристики для двух температур катода:  $T_1$  и  $T_2$ , причем  $T_2>T_1$ . С повышением температуры катода испускание электронов с катода интенсивнее, при этом увеличивается и ток насыщения. При  $U_a=0$  наблюдается анодный ток, т. е. некоторые электроны, эмиттируемые катодом, обладают энергией, достаточной для преодоления работы выхода и достижения анода без приложения электрического поля.

Явление термоэлектронной эмиссии используется в приборах, в которых необходимо получить поток электронов в вакууме, например в электронных лампах, рентгеновских трубках, электронных микроскопах и т. д. Электронные лампы широко применяются в электро- и радиотехнике, автоматике и телемеханике для выпрямления переменных токов, усиления электрических сигналов и переменных токов, генерирования электромагнитных колебаний и т. д. В зависимости от назначения в лампах используются дополнительные управляющие электроды.

**2. Фотоэлектронная эмиссия** — это эмиссия электронов из металла под действием света, а также коротковолнового электромагнитного излучения (например, рентгеновского). Основные закономерности этого явления будут рассмотрены при рассмотрении фотоэлектрического эффекта.

**3. Вторичная электронная эмиссия** — это испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов. Вторичный электронный поток состоит из электронов, отраженных поверхностью (упруго и неупруго отраженные электроны), и «истинно» вторичных электронов — электронов, выбитых из металла, полупроводника или диэлектрика первичными электронами.

Отношение числа вторичных электронов  $n_2$  к числу первичных  $n_1$ , вызвавших эмиссию, называется **коэффициентом вторичной электронной эмиссии**:

$$\delta = n_2/n_1.$$

Он зависит от природы материала поверхности, энергии бомбардирующих частиц и их угла падения на поверхность. У полупроводников и диэлектриков его значение больше, чем у металлов. Это объясняется тем, что в металлах, где концентрация электронов проводимости велика, вторичные электроны, часто сталкиваясь с ними, теряют свою энергию и не могут выйти из металла. В полупроводниках и диэлектриках же из-за малой концентрации электронов проводимости столкновения вторичных электронов с ними происходят гораздо реже и вероятность выхода вторичных электронов из эмиттера возрастает в несколько раз.

Явление вторичной электронной эмиссии используется в **фотоэлектронных умножителях** (ФЭУ), применяемых для усиления слабых электрических токов.

**4. Автоэлектронная эмиссия** — это эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля. Эти явления можно наблюдать в откачанной трубке, конфигурация электродов которой (катод — острие, анод — внутренняя поверхность трубки) позволяет при напряжениях примерно  $10^3$  В получать электрические поля напряженностью примерно  $10^7$  В/м. При постепенном повышении напряжения уже при напряженности поля у поверхности катода примерно  $10^5$ — $10^6$  В/м возникает слабый ток, обусловленный электронами, испускаемыми катодом. Сила этого тока увеличивается с повышением напряжения на трубке. Токи возникают при холодном катоде, поэтому описанное явление называется также **холодной эмиссией**. Объяснение механизма этого явления возможно лишь на основе квантовой теории.

### 13.3. Электрический ток в газах. Виды газового разряда.

Газы при не слишком высоких температурах и при давлениях, близких к атмосферному, являются хорошими изоляторами. Это объясняется тем, что газы при обычных условиях состоят из нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных зарядов. Газ становится проводником электричества, когда некоторая часть его молекул ионизируется, т. е. произойдет расщепление нейтральных атомов и молекул на ионы и свободные электроны. Для этого газ надо подвергнуть действию какого-либо **ионизатора** (например, поднеся к заряженному электроду пламя свечи, наблюдаем спад его заряда; здесь электропроводность газа вызвана нагреванием).

При ионизации газов, таким образом, под действием какого-либо ионизатора происходит вырывание из электронной оболочки атома или молекулы одного или нескольких электронов, что приводит к образованию свободных электронов и положительных ионов. Электроны могут присоединяться к нейтральным молекулам и атомам, превращая их в отрицательные ионы. Следовательно, в ионизованном газе имеются положительные и отрицательные ионы и свободные электроны. Прохождение электрического тока через газы называется **газовым разрядом**.

Ионизация газов может происходить под действием различных ионизаторов: сильный нагрев (столкновения быстрых молекул становятся настолько сильными, что они разбиваются на ионы), короткое электромагнитное излучение (ультрафиолетовое, рентгеновское и  $\gamma$ -излучения), корпускулярное излучение (потoki электронов, протонов,  $\alpha$ -частиц) и т. д. Для того чтобы выбить из молекулы (атома) один электрон, необходимо затратить определенную энергию, называемую **энергией ионизации**, значения которой для атомов различных веществ лежат в пределах 4—25 эВ.

Одновременно с процессом ионизации газа всегда идет и обратный процесс — **процесс рекомбинации**: положительные и отрицательные ионы, положительные ионы и электроны, встречаясь, воссоединяются между собой с образованием нейтральных атомов и молекул. Чем больше ионов возникает под действием ионизатора, тем интенсивнее идет и процесс рекомбинации.

Электропроводность газа нулю не равна никогда, так как в нем всегда имеются свободные заряды, образующиеся в результате действия на газы излучения радиоактивных веществ, имеющихся

на поверхности Земли, а также космического излучения. Эта незначительная электропроводность воздуха (интенсивность ионизации под действием указанных факторов невелика) служит причиной утечки зарядов наэлектризованных тел даже при хорошей их изоляции.

Характер газового разряда определяется составом газа, его температурой и давлением, размерами, конфигурацией и материалом электродов, приложенным напряжением, плотностью тока.

**Разряды**, существующие только под действием внешних ионизаторов, называются **несамостоятельными**.

### Самостоятельный газовый разряд и его типы

Разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется **самостоятельным**.

Напряжение, при котором возникает самостоятельный разряд, называется **напряжением пробоя**.

Существует четыре типа самостоятельного разряда: тлеющий, искровой, дуговой и коронный.

1.

**Тлеющий разряд** возникает при низких давлениях. Если к электродам, впаянным в стеклянную трубку длиной 30—50 см, приложить постоянное напряжение в несколько сотен вольт, постепенно откачивая из трубки воздух, то при давлении ж 5,3—6,7 кПа возникает разряд в виде светящегося извилистого шнура красноватого цвета, идущего от катода к аноду. При дальнейшем понижении давления шнур утолщается.

Тлеющий разряд широко используется в технике. Так как свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет, то его используют в газосветных трубках для светящихся надписей и реклам (например, неоновые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргонные — синевато-зеленое). В лампах дневного света, более экономичных, чем лампы накаливания, излучение тлеющего разряда, происходящее в парах ртути, поглощается нанесенным на внутреннюю поверхность трубки флуоресцирующим веществом (люминофором), начинающим под воздействием поглощенного излучения светиться.

**Искровой разряд** возникает при больших напряженностях электрического поля ( $E=3 \cdot 10^6$  В/м) в газе, находящемся под давлением порядка атмосферного. Искра имеет вид ярко светящегося тонкого канала, сложным образом изогнутого и разветвленного.

Объяснение искрового разряда дается на основе **стримерной теории**, согласно которой возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабосветящихся скоплений ионизованного газа — **стримеров**. Стримеры возникают не только в результате образования электронных лавин посредством ударной ионизации, но и в результате фотонной ионизации газа. Лавины, догоняя друг друга, образуют проводящие мостики из стримеров, по которым в следующие моменты времени и устремляются мощные потоки электронов, образующие каналы искрового разряда. Из-за выделения при рассмотренных процессах большого количества энергии газ в искровом промежутке нагревается до очень высокой температуры (примерно  $10^4$  К), что приводит к его свечению. Быстрый нагрев газа ведет к повышению давления и возникновению ударных волн, объясняющих звуковые эффекты при искровом разряде — характерное потрескивание в слабых разрядах и мощные раскаты грома в случае молнии, являющейся примером мощного искрового разряда между грозовым облаком и Землей или между двумя грозовыми облаками.

Искровой разряд используется для воспламенения горючей смеси в двигателях внутреннего сгорания для электроискровой точной обработки металлов (резание, сверление). Его используют в спектральном анализе для регистрации заряженных частиц (искровые счетчики).

**Дуговой разряд**. Если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами, то разряд становится непрерывным — возникает дуговой разряд. При этом сила тока резко возрастает, достигая сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до



ряд можно получить от источника низкого напряжения минуя стадию искры. Для этого электроды (например, угольные) сближают до соприкосновения, они сильно раскаляются электрическим током, потом их разводят и получают электрическую дугу (именно так она была открыта В. В. Петровым). При атмосферном давлении температура катода приблизительно равна 3900 К. По мере горения дуги угольный катод заостряется, а на аноде образуется углубление — кратер, являющийся наиболее горячим местом дуги.

По современным представлениям, дуговой разряд поддерживается за счет высокой температуры катода из-за интенсивной термоэлектронной эмиссии, а также термической ионизации молекул, обусловленной высокой температурой газа.

Дуговой разряд находит широкое применение в народном хозяйстве для сварки и резки металлов, получения высококачественных сталей (дуговая печь) и освещения (прожекторы, проекционная аппаратура). Широко применяются также дуговые лампы с ртутными электродами в кварцевых баллонах, где дуговой разряд возникает в ртутном паре при откачанном воздухе. Дуга, возникающая в ртутном паре, является мощным источником ультрафиолетового излучения и используется в медицине (например, кварцевые лампы). Дуговой разряд при низких давлениях в парах ртути используется в ртутных выпрямителях для выпрямления переменного тока.

**4. Коронный разряд** — высоковольтный электрический разряд при высоком (например, атмосферном) давлении в резконеоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности (например, острия). Когда напряженность поля вблизи острия достигает 30 кВ/см, то вокруг него возникает свечение, имеющее вид короны, чем и вызвано название этого вида разряда.

В зависимости от знака коронирующего электрода различают отрицательную или положительную корону. В случае отрицательной короны рождение электронов, вызывающих ударную ионизацию молекул катода под действием положительных ионов, в случае положительной — вследствие ионизации газа вблизи анода. В естественных условиях корона возникает под влиянием атмосферного электричества у вершин мачт (на этом основано действие молниеотводов), [деревьев](#). Вредное действие короны вокруг проводов высоковольтных линий передачи проявляется в возникновении вредных токов утечки. Для их снижения провода высоковольтных линий делают толстыми. Коронный разряд, являясь прерывистым, становится также источником радиопомех.

Используется коронный разряд в электрофильтрах, применяемых для очистки промышленных газов от примесей. Коронный разряд применяется также при нанесении порошковых и лакокрасочных покрытий.

## Лекция №14

**Электромагнитные явления.** Магнитное поле. Магнитное взаимодействие токов. Закон Ампера. Вектор магнитной индукции. Закон Био-Савара-Лапласа. Магнитное поле прямолинейного и кругового токов.

Циркуляция вектора магнитной индукции. Поле соленоида и тороида. Магнитный поток. Теорема Гаусса. Работа перемещения проводника и рамки с током в магнитном поле. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Магнитное поле в веществе. Намагниченность и напряженность магнитного поля. Закон полного тока для магнитного поля в веществе. Виды магнетиков.

### 14.1. Магнитное поле. Магнитное взаимодействие токов. Закон Ампера. Вектор магнитной индукции.

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой, например, токи  $I_1 \uparrow \uparrow I_2$  притягиваются, а токи  $I_1 \uparrow \downarrow I_2$  отталкиваются. Взаимодействие токов осуществляется через поле, которое называется **магнитным**. Следовательно, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства - создают в нем **магнитное поле**. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы. Подобно тому, как для исследования электрического поля мы использовали пробный заряд, применим для исследования магнитного поля пробный ток, циркулирующий в плоском замкнутом контуре очень малых размеров. Будем называть такой контур пробным контуром.

Ориентацию его в пространстве характеризует направление нормали  $\vec{n}$  к контуру, восстанавливаемой по правилу правого буравчика: вращаем рукоятку правого буравчика по направлению тока в контуре, тогда направление его поступательного движения даст направление нормали  $\vec{n}$  (рис.14.1). Помещая пробный контур в магнитное поле, обнаружим, что поле стремится повернуть контур (нормаль) в определенном направлении.

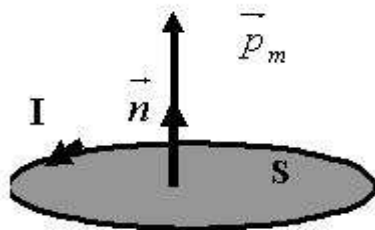


Рис.14.1

Вращающий момент, действующий на контур, зависит как от свойств магнитного поля в данной точке, так и от свойств контура. Оказывается, что максимальная величина вращающего момента пропорциональна  $IS$ , т.е.  $M_{\text{макс}} \sim IS$ , где  $I$  - ток контуре,  $S$  - площадь контура с током, (рис.14.1). Векторную величину

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} \quad (14-1)$$

называют **магнитным моментом** контура, который в СИ измеряется в  $\text{А}\cdot\text{м}^2$ .

На пробные контуры с разными  $p_m$ , помещаемыми в данную точку магнитного поля, будут действовать разные по величине максимальные вращающие моменты  $M_{\text{макс}}$ , но отношение  $M_{\text{макс}} / p_m$  будет для всех контуров одинаково, оно будет являться силовой характеристикой магнитного поля, которая называется **магнитной индукцией**

$$B = M_{\text{макс}} / p_m \quad (14-2)$$

Магнитная индукция есть вектор, направление которого совпадает с направлением нормали контура с током, свободно установившегося во внешнем магнитном поле (рис.14.2).

Поле вектора  $B$  можно представить с помощью силовых линий, (рис.14. 2), как и поле вектора  $\vec{E}$ ; таким образом  $B$  является аналогом  $E$ . Магнитная индукция в СИ измеряется в теслах:  $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Нм/А}\cdot\text{м}^2$ . Тесла равен магнитной индукции однородного поля, в котором на плоский контур с током, который имеет магнитный момент  $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ , действует максимальный вращающий момент, равный  $1 \text{ Нм}$ .

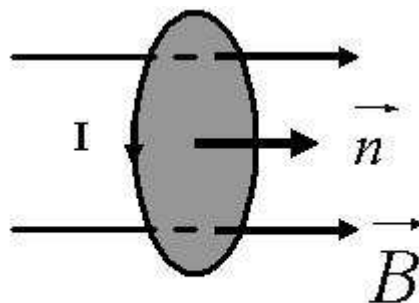


Рис.14.2

На контур с током, помещенный в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , действует **вращающий момент**

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (14-3)$$

Величина его  $M = p_m B \sin \alpha$

при  $\alpha = \pi / 2$  имеем  $M = M_{\text{макс}} = p_m B$ , при  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$ ,  $M = 0$ .

**Закон Ампера:** на элемент тока  $Id\vec{l}$ , помещенный в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , действует сила

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (14-4)$$

Произведение  $Id\vec{l}$  называют элементом тока, где  $d\vec{l}$  - вектор, совпадающий с элементом участка тока и направленный в сторону, в которую течет ток.

#### 14.2. Закон Био-Савара-Лапласа. Магнитное поле прямолинейного и кругового токов.

**Закон Био-Савара-Лапласа** позволяет вычислить магнитную индукцию поля, созданного элементом тока  $Id\vec{l}$  на расстоянии  $\vec{r}$  от него:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (14-5)$$

т.е. индукция магнитного поля, создаваемого элементом тока  $Id\vec{l}$  точке А, (рис.14.3), на расстоянии  $r$  от него, пропорциональна величине элемента тока и синусу угла  $\alpha$ , равного углу между направлениями элемента тока  $Id\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , а также обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная постоянная.

**Закон Био - Савара - Лапласа в векторной форме** имеет вид:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (14-6)$$

Закон Био - Савара - Лапласа позволяет вычислить магнитную индукцию поля любых систем токов, используя принцип суперпозиции магнитных поля

$$\vec{B} = \sum_{k=1}^n \vec{B}_K. \quad (14-7)$$

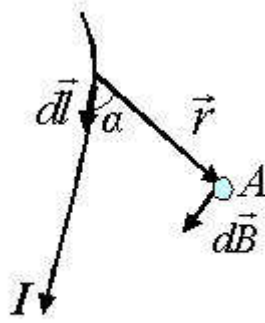


Рис.14.3

Применим закон Био - Савара - Лапласа и принцип суперпозиции (14-7) к расчету магнитных полей следующих токов:

1) **Магнитное поле прямолинейного тока.**

Из рис.14.4 с учетом (14-6) находим, что  $d\vec{B} \perp$  плоскости, в которой лежат  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ ; далее можно найти  $dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}$ , откуда, принимая во внимание, что  $r = \frac{r_0}{\sin \alpha}$  получаем  $dl = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha}$ . С учетом этого из (14-5) находим:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ir_0 d\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{r_0^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha d\alpha}{r_0}$$

интегрируя последнее равенство, получаем

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (14-8)$$

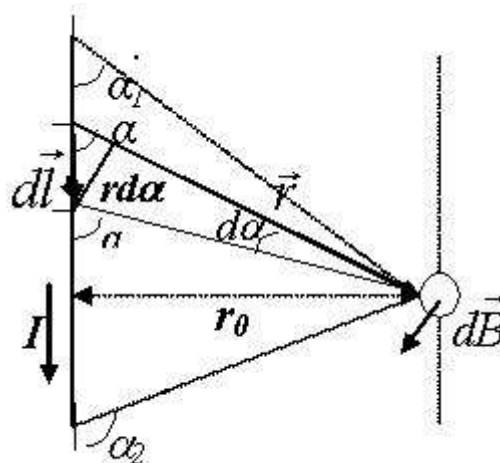


Рис.14.4

Для бесконечно длинного проводника  $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \pi$  и из (8) следует, что

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} [1 - (-1)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (14-9)$$

2) **Магнитное поле кругового тока.** Можно показать, что магнитная индукция поля, созданного круговым током радиуса  $R$ , на расстоянии  $r_0$  вдоль перпендикуляра, восстановленного из центра контура, (рис.14.5), будет

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I\pi R^2}{(R^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + r_0^2)^{3/2}}. \quad (14-10)$$

В частности, в центре кругового тока ( $r_0 = 0$ ),

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{R} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (14-11)$$

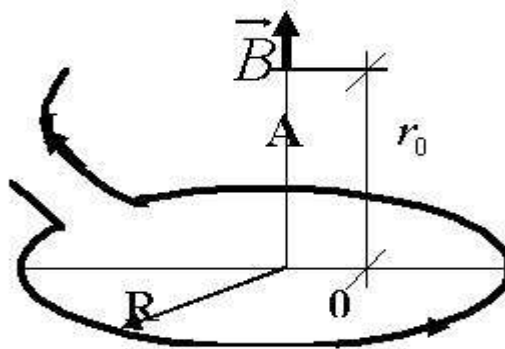


Рис.14.5

Для плоской катушки, состоящей из  $N$ , витков магнитная индукция на оси катушки

$$B = \mu_0 NI / 2R. \quad (14-12)$$

При больших расстояниях от контура, т. е. при  $r_0 \gg R$  из (14-10) получим

$$B = \mu_0 IR / 2r_0^3. \quad (14-13)$$

### 14.3. Циркуляция вектора магнитной индукции. Поле соленоида и тороида

Для электростатического поля  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$ ,

т. е. циркуляция вектора  $\vec{E}$  вдоль замкнутого контура  $L$  равна нулю. Можно показать, что **циркуляция вектора  $\vec{B}$  вдоль замкнутого контура  $L$  равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на  $\mu_0$** , т. е.

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k \quad (14-14) \text{ При этом токи}$$

будем считать положительными, если они совпадают с поступательным движением правого буравчика, рукоятка которого вращается по направлению обхода контура. Для нашего случая, (рис.14.6) это будут токи, текущие от нас и обозначенные  $\otimes$ . Токи, текущие в обратном направлении, будут считаться отрицательными. Для рис. 14.6, это будут токи, текущие на нас и обозначенные кружком с точкой в центре.

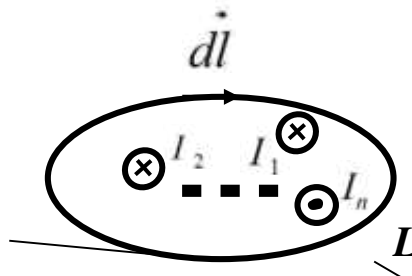


Рис.

Поскольку  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} \neq 0$ , то магнитное поле не является потенциальным, оно называется **вихревым** или **соленоидальным**.

Применим теорему о циркуляции для вычисления индукции магнитного поля соленоида и тороида.

### 1) Поле соленоида

Соленоидом, (рис.14.7), называется цилиндрическая катушка, на которую вплотную намотано большое число витков провода. Пусть  $N$  - число

витков вдоль длины соленоида  $l$ , тогда  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$ , где  $L$  – контур 12341

$$\text{или } \int_1^2 \vec{B} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 NI .$$

Интегралы на участках 1-2, 3-4 равны нулю, т.к.  $\vec{B} \perp d\vec{l}$  и  $\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos \pi/2 = 0$ ;

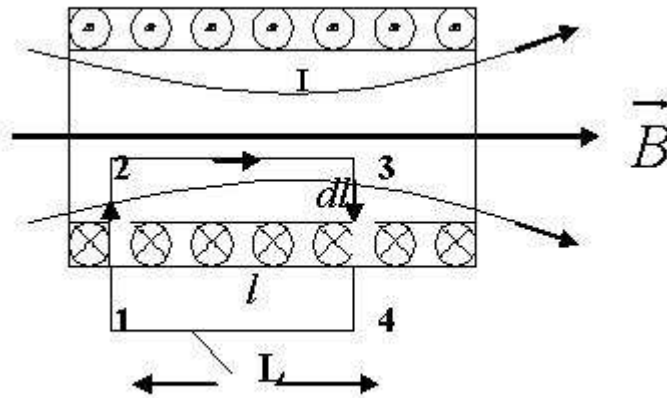


Рис.14.7

интеграл на участке 4-1 равен нулю, т.к. вне соленоида индукция  $\vec{B}$  равна нулю. Поэтому

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_2^3 \vec{B} d\vec{l} = \int_2^3 B dl \cos 0^\circ = \mu_0 NI, \text{ откуда}$$

$$B = \mu_0 IN / l = \mu_0 nI, \quad (14-15)$$

где  $n = N/l$  - число витков, приходящееся на единицу длины соленоида. Поле соленоида однородно.

## 2) Поле тороида

Тороид (рис.14.8), представляет тонкий провод, плотно навитый на каркас, имеющий форму тора. Для него

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = Bl = B(2\pi R) = \mu_0 NI,$$

где  $R$  - радиус средней линии тора, откуда

$$B = \mu_0 IN / l = \mu_0 nI \quad (14-16)$$

Поле тороида неоднородно: оно уменьшается с увеличением  $r$ . Поле вне тороида равно нулю.

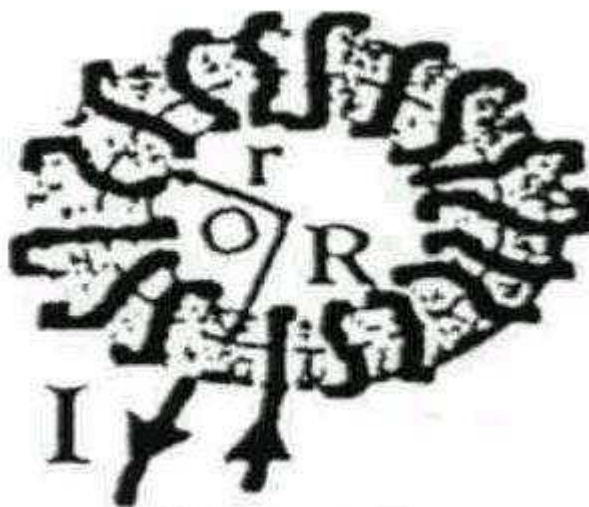


Рис.14.8

#### 14.4. Магнитный поток. Теорема Гаусса

Для однородного магнитного поля, пронизывающего плоскую поверхность площади  $S$ , ( см. рис. 4 ). магнитный поток

$$\Phi = \vec{B} \vec{S} = BS \cos \alpha = B_n S \quad (14-17)$$

где  $\vec{S} = S \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  - нормаль к поверхности.

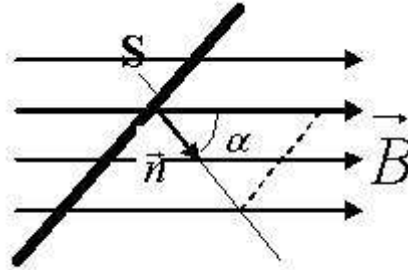


Рис.14.9

В общем случае вводят понятие магнитного потока через малую поверхность площадью  $dS$ , которую можно считать плоской и в пределах которой магнитное поле можно считать однородным, т. е.

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S} = B dS \cos \alpha = B_n dS. \quad (14-18)$$

Магнитный поток сквозь произвольную поверхность  $\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS$ .

В природе нет магнитных зарядов и поэтому теорема Гаусса для магнитного потока имеет вид

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0, \quad (14-19)$$

т.е. магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

Пусть в формуле (14-17)  $\alpha = 0$ , т.е.  $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{n}$ , тогда  $\Phi = BS$ . Магнитный поток в СИ измеряется в веберах - (Вб):  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ . Поток магнитной индукции в  $1 \text{ Вб}$  - это поток, пронизывающий площадку в  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля, индукция которого равна  $1 \text{ Тл}$ .

#### 14.5. Работа перемещения проводника и рамки с током в магнитном поле

Согласно закону Ампера на проводник с током, (рис.14.10), в магнитном поле действует сила  $F = IlB$ , которая направлена вправо. Если под действием этой силы проводник переместится на  $dx$ , то  $dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi$ , где  $d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ , - это изменение магнитного потока, пронизывающего контур. Итак, работа, совершаемая магнитным полем

$$dA = Id\Phi. \quad (14-20)$$

В частности, работа при вращении контура с током в однородном магнитном поле, (рис.14.11) из положения 1, в котором векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  направлены в противоположные стороны, в положение 2, в котором векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  направлены одинаково, равна



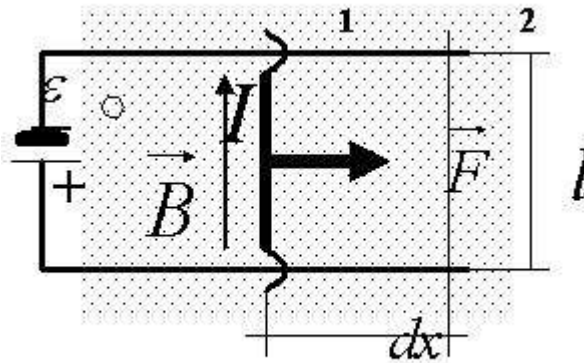


Рис.14.10

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

$$\Phi_1 = \vec{B}\vec{S} = BS \cos \pi = -BS; \quad \Phi_2 = \vec{B}\vec{S} = BS \cos 0 = BS$$

$$\Phi_2 = \vec{B}\vec{S} = BS \cos 0 = BS$$

$$\text{т.о.} \quad A = I[BS - (-BS)] = 2IBS = 2p_m B. \quad (14-21)$$

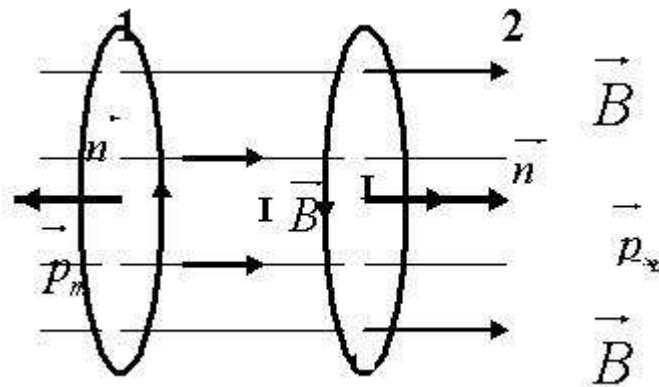


Рис.14.11

#### 14.6. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца

На элемент тока  $Id\vec{l}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  действует сила Ампера

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (14-22)$$

Появление этой силы связано с действием силы со стороны магнитного поля на носители тока в проводнике. Покажем это. Пусть заряд носителя тока  $q$ , скорость его направленного движения  $v$ , концентрация  $n$ , тогда

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{qdN}{dt} = \frac{qndV}{dt} = qnS \frac{dl}{dt} = qnSv, \quad (14-23)$$

где  $dQ = qdN$  - заряд в объеме проводника  $dV = Sdl$ ;  $ndV = dN$  - число носителей

тока в проводнике длиной  $dl$ ;  $d\vec{l}$  - направлено по току и совпадает со скоростью

положительных зарядов. Подставляя (14-23) в (14-22), найдем

$$d\vec{F} = qdN\vec{v} \times \vec{B}.$$

Отсюда, сила, действующая на один заряд, называемая **силой Лоренца**,

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{F}}{dN} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (14-24)$$

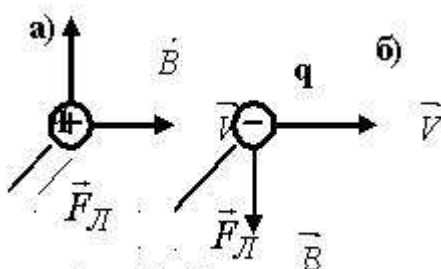
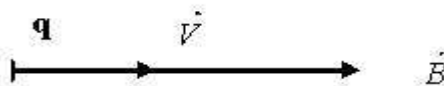


Рис.14.12

$$\text{При наличии электрического поля сила } \vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (14-25)$$

Это выражение называют **формулой Лоренца**.



$$\vec{F}_L = 0$$

Рис.14.13

Модуль магнитной составляющей силы Лоренца равен :

$$F_L = qvB\sin\alpha, \quad (14-26)$$

здесь  $\alpha$  - угол между направлениями векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Направление силы Лоренца для положительного заряда, движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярно линиям  $\vec{B}$ , показано на рис. 14.12а, а направление силы Лоренца для отрицательного заряда изображено на рис. 14.12б; на рис.14.13 скорость  $\vec{v}$ , индукция  $\vec{B}$  коллинеарны, поэтому  $\vec{F}_L = 0$ .

#### 14.7. Магнитное поле в веществе. Намагниченность и напряженность магнитного поля.

В предыдущих лекциях по магнетизму предполагалось, что провода, по которым текут токи, создающие магнитное поле, находятся в вакууме. Если несущие ток провода находятся в какой-либо среде, то магнитное поле изменяется. Объясним это явление.

Опыт показывает, что все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Классическая физика это объясняет существованием в веществе микротоков, обусловленных движением электронов в атомах и молекулах.

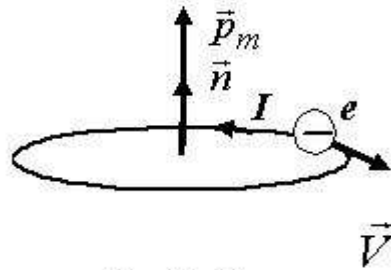


Рис. 14.14

Действительно, электрон, движущийся по круговой орбите вокруг ядра своего атома эквивалентен круговому току, (рис.14.14), поэтому он обладает орбитальным магнитным моментом

$$\vec{p}_m = I\vec{S} = IS\vec{n}, \quad (14-27)$$

который, по модулю равен

$$p_m = eS/T = eSv, \quad (14-28)$$

где  $T$  - период вращения,  $v = l/T$  - частота вращения электрона на орбите.

Кроме того, электрон обладает собственным или спиновым магнитным моментом  $\vec{p}_m$

Общий магнитный момент атома равен сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов, входящих в атом электронов:

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}. \quad (14-29)$$

Магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше и ими обычно пренебрегают.

Всякое вещество является магнетиком, оно способно под действием внешнего магнитного поля приобретать магнитный момент, т. е. намагничиваться. Для количественного описания намагничивания вводят вектор намагниченности, равный магнитному моменту единицы объема магнетика, т. е.

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{\Delta V} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_{ia}}{\Delta V}, \quad (14-30)$$

где  $n$  - число атомов (молекул), содержащихся в объеме  $\Delta V$ ,  $\vec{p}_m$  - магнитный момент атомов в объеме  $\Delta V$ ,  $\vec{p}_{ia}$  - магнитный момент  $i$ -того атома.

Намагниченность, как следует из (14-30), в СИ измеряется в А/м. Оказывается для несильных полей

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (14-31)$$

здесь  $\chi$  - безразмерная величина, называемая **магнитной восприимчивостью вещества**; для вакуума и, практически, для воздуха  $\chi = 0$ ;  $H$  - напряженность магнитного поля, которая описывает магнитное поле макротоков (макро - большой). Макротоки, обычно, мы называли просто токи. Для вакуума

$$\vec{H} = \vec{B}_0 / \mu_0, \quad (14-32)$$

она измеряется в СИ в А/м.

Вектор магнитной индукции в веществе характеризует результирующее магнитное поле в веществе, создаваемое всеми макротоками и микротоками, т.е.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}. \quad (14-33)$$

С учетом (14-31) получаем

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (14-34)$$

$$\text{где} \quad \mu = 1 + \chi \quad (14-35)$$

называется **магнитной проницаемостью вещества**,  $\mu$  - безразмерная величина. Она показывает во сколько раз усиливается магнитное поле в веществе. Напомним, что  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость показывает во сколько раз электрическое поле ослабляется в веществе.

#### 14.8. Закон полного тока для магнитного поля в веществе

Ранее было показано, что для поля в вакууме

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (14-36)$$

В случае поля в веществе, закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции  $B$ ) запишется так

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I'), \quad (14-37)$$

где  $I$  и  $I'$  соответственно алгебраические суммы макротоков и микротоков, охватываемых контуром  $L$ . Можно показать, что

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I'. \quad (14-38)$$

С учетом этого (14-37) переписывается в виде

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I, \quad (14-39)$$

или, принимая во внимание (14-33), найдем  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}$  и  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$ , где  $I = \sum_{k=1}^n I_k$  -

алгебраическая сумма макротоков.

В итоге имеем

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (14-40)$$

Выражение (14-40) представляет собой **теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$**  или **закон полного тока** и гласит: Циркуляция вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме макротоков, охватываемых контуром. Вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  являясь аналогом электрического смещения  $\vec{D}$ , определяется только макротоками. Из (14-40) следует, что  $H$  измеряется в  $A/m$ .

## 14.9. Виды магнетиков

В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости все магнетики подразделяются на три группы:

1) **ДИАМАГНЕТИКИ**, у которых  $\chi$  отрицательна и мала ( $10^{-5} \div 10^{-6}$ ); для них  $\mu$  несколько меньше единицы; диамагнетиками являются *Zn, Au, Hg, Si, P, C (графит), Bi (висмут)*...

2) **ПАРАМАГНЕТИКИ**, у которых  $\chi$  положительна и мала ( $10^{-3} \div 10^{-5}$ ); и с ростом температуры  $\chi$  уменьшается по закону Кюри:  $\chi \sim 1/T$ , для них  $\mu$  несколько больше единицы; диамагнетиками являются щелочные металлы, кислород....

3) **ФЕРРОМАГНЕТИКИ**, у которых  $\chi$  положительна и очень велика: может достигать, например у супермалоя 800000; для *Fe* магнитная проницаемость  $\mu = 5000$ .

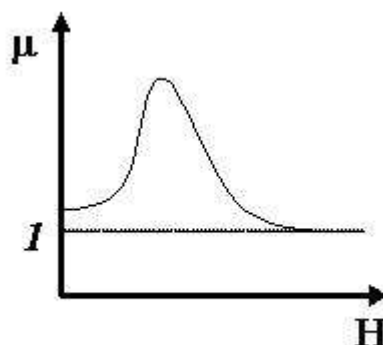


Рис.14.15

Магнитная проницаемость  $\mu$  для них зависит от  $H$ , (рис.14.15) и для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая точкой Кюри, при которой он теряет магнитные свойства, т. е. области спонтанного намагничивания (домены) распадаются и ферромагнетик становится парамагнетиком - это фазовый переход II рода. Для железа  $t_c^0 = 768^{\circ}C$  или  $T_c = 273 + 768 = 1041K$ .

## Лекция 15

**Электромагнитная индукция и переменный ток.** Явление электромагнитной индукции. Явление самоиндукции. Энергия магнитного поля. Электромагнитная теория Максвелла. Переменный ток.

### 15.1. Явление электромагнитной индукции.

Электрический ток создает вокруг себя магнитное поле. Существует и обратное явление: изменяющееся во времени магнитное поле вызывает (индуцирует) электрический ток. Это явление было открыто Фарадеем в 1831 г. и получило название **электромагнитной индукции**, а возникающий ток называют индукционным током. **Закон электромагнитной индукции** гласит: «При изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции, пропорциональная взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока», т. е.

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} . \quad (15-1)$$

Знак "-" в (15-1) объясняет **закон Ленца**: Индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызвавшей.

Если контур, в котором индуцируется ЭДС, состоит из  $N$  витков, то ЭДС будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков в отдельности, т.е.

$$\varepsilon_i = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad (15-2)$$

Величину  $\psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i = N\Phi$  называют **потокосцеплением** или полным **магнитным потоком**, так что

$$\varepsilon_i = -d\psi / dt . \quad (15-3)$$

### 15.2. Явление самоиндукции

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. В частности, этот магнитный поток может создаваться током, текущим в самом рассматриваемом контуре. При изменениях тока  $I$  в этом контуре изменяется также и полный магнитный поток  $\psi$ , вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС **самоиндукции**  $\varepsilon_S$ . Такое явление называется **самоиндукцией**. Поскольку  $\psi = N\Phi$ , а  $\Phi \sim B$ ,  $B \sim I$  то, следовательно,  $\psi \sim I$ , т.е

$$\psi = LI, \quad (15-4)$$

здесь  $L$  - называется **индуктивностью контура**,

$$L = \psi / I .$$

За единицу индуктивности в СИ принимается  $1 \text{ Гн}$  - генри: это индуктивность такого контура, у которого при силе тока в нем в 1А, возникает сцепленный с ним полный магнитный поток  $\psi$ , равный 1 Вб;

Можно найти, что в общем случае

$$\varepsilon_S = -\frac{d\psi}{dt} = -(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}). \quad (15-5)$$

Если при изменении тока индуктивность  $L$  контура не изменяется, то

$$\varepsilon_S = -LdI / dt . \quad (15-6)$$

Для соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 l S = \mu_0 \mu n^2 V , \quad (15-7)$$

где  $V=IS$  - объем соленоида,  $n$ -число витков, приходящееся на единицу длины соленоида.

### 15.3. Энергия магнитного поля

При возрастании тока в контуре в нем возникает ЭДС самоиндукции и закон Ома запишется

$$I = (\varepsilon + \varepsilon_s) / R , \quad \text{где } \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}, \quad \text{отсюда} \quad \varepsilon = IR + L\frac{dI}{dt} .$$

Полная работа источника тока за время  $dt$

$$dA = I\varepsilon dt = I^2 R dt + LI dI .$$

здесь  $I^2 R dt$  - это работа, затрачиваемая на нагревание;  $LI dI$  - это работа дополнительная к работе источника тока, обусловленная индукционными явлениями в цепи. Вся работа, совершаемая в цепи для увеличения тока от 0 до  $I$

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (15-8)$$

Эта работа и будет равна энергии магнитного поля, т.е.

$$W = LI^2 / 2. \quad (15-9)$$

Для соленоида индуктивность  $L$  определяется по формуле (15-7), что позволяет найти

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 V I^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu \mu_0} V. \quad (15-10)$$

т.к.  $B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu n I$ . Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = W / V = B^2 / 2 \mu_0 \mu = BH / 2, \quad (15-11)$$

она измеряется в СИ в Дж / м<sup>3</sup>.

#### 15.4. Электромагнитная теория Максвелла.

В 60-х годах прошлого века (около 1860 г.) Максвелл, основываясь на идеях Фарадея, обобщил законы электростатики и электромагнетизма: теорему Гаусса - Остроградского для

электростатического поля  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{k=1}^n q_k = Q$  и для магнитного поля  $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ ; закон полного тока

$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k = I_{\text{полн}}$ ; закон электромагнитной индукции  $\mathcal{E} = -d\Phi / dt$ , и в результате

разработал законченную теорию электромагнитного поля.

Теория Максвелла явилась величайшим вкладом в развитие классической физики. Она позволила с единой точки зрения понять широкий круг явлений, начиная от электростатического поля неподвижных зарядов и заканчивая электромагнитной природой света.

Математическим выражением теории Максвелла служат четыре уравнения Максвелла, которые принято записывать в двух формах: интегральной и дифференциальной. Дифференциальные уравнения получаются из интегральных с помощью двух теорем векторного анализа - теоремы Гаусса и теоремы Стокса. Теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV, \quad (15-12)$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$A_x, A_y, A_z$  - проекции вектора  $\vec{A}$  на оси;  $V$  - объем, ограниченный поверхностью  $S$ .

Теорема Стокса: 
$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}. \quad (15-13)$$

здесь  $\text{rot } \vec{A}$  - ротор вектора  $\vec{A}$ , который является вектором и выражается в декартовых координатах следующим образом:

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \quad (15-14)$$

$S$  - площадь, ограниченная контуром  $L$ .

Уравнения Максвелла в интегральной форме выражают соотношения, справедливые для мысленно проведенных в электромагнитном поле неподвижных замкнутых контуров и поверхностей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме показывают как связаны между собой характеристики электромагнитного поля и плотности зарядов и токов в каждой точке этого поля.

### 1) Первое уравнение Максвелла

Оно является обобщением закона электромагнитной индукции  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ ,

и в интегральной форме имеет следующий вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (15-15)$$

и утверждает, что с переменным магнитным полем  $\vec{B}$  неразрывно связано вихревое электрическое поле  $\vec{E}$ , которое не зависит от того находятся в нем проводники или нет. Из (15-13) следует, что

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}. \quad (15-16)$$

Из сравнения (15-15) и (15-16) находим, что

$$\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad (15-17)$$

Это и есть **первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.**

### 2) Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Максвелл обобщил закон полного тока  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k = I_{\text{ПОЛН}}$ , предположив, что переменное электрическое поле, также как и электрический ток, является источником магнитного поля. Для количественной характеристики "магнитного действия" переменного электрического поля Максвелл ввел понятие **тока смещения**.

По теореме Гаусса - Остроградского поток электрического смещения сквозь замкнутую поверхность

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i = q$$



Продифференцировав это выражение по времени, получим для неподвижной и недеформируемой поверхности  $S$

$$\frac{dq}{dt} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (15-18)$$

Левая часть этой формулы имеет размерность тока, который, как известно, выражается через вектор плотности тока

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (15-19)$$

Из сравнения (15-18) и (15-19) следует, что  $\partial \vec{D} / \partial t$  имеет размерность плотности тока: А /м<sup>2</sup>. Максвелл предложил назвать  $\partial \vec{D} / \partial t$  плотностью тока смещения:

$$\vec{j}_{CM} = \partial \vec{D} / \partial t. \quad (15-20)$$

Ток смещения

$$I_{CM} = \int_S \vec{j}_{CM} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (15-21)$$

Из всех физических свойств, присущих действительному току (току проводимости), связанному с переносом зарядов, ток смещения обладает лишь одним: способностью создавать магнитное поле. При "протекании" тока смещения в вакууме или диэлектрике не выделяется тепло. Примером тока смещения может служить переменный ток через конденсатор. В общем случае токи проводимости и смещения не разделены в пространстве и можно говорить о полном токе, равном сумме токов проводимости и смещения:

$$I_{ПОЛН} = I_{ПРОВ} + I_{CM}. \quad (15-22)$$

С учетом этого Максвелл обобщил закон полного тока, добавив в правую часть его ток смещения

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{ПОЛН} = I_{ПРОВ} + I_{CM} = \int_S \vec{j}_{ПРОВ} d\vec{S} + \int_S \vec{j}_{CM} d\vec{S} = \int_S (\vec{j}_{ПРОВ} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}. \quad (15-23)$$

Итак, **второе уравнение Максвелла в интегральной форме** имеет вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_{ПРОВ} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}. \quad (15-24)$$

Из (15-13) следует, что

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S}. \quad (15-25)$$

Из сравнения (15-24) и (15-25) находим, что

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{ПРОВ} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (15-26)$$

Это и есть **второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме**.

### 3) Третье и четвертое уравнения Максвелла

Максвелл обобщил теорему Гаусса - Остроградского для электростатического поля. Он предположил, что эта теорема справедлива для любого электрического поля, как стационарного, так и переменного. Соответственно, **третье уравнение Максвелла в интегральной форме** имеет вид:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (15-27)$$

$$\text{или} \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (15-28)$$

где  $\rho = dq/dV$  - объемная плотность свободных зарядов,  $[\rho] = \text{Кл} / \text{м}^3$

Из (15-12) следует, что

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV. \quad (15-29)$$

Из сравнения (15-28) и (15-29) находим, что

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (15-30)$$

**Четвертое уравнение Максвелла в интегральной и дифференциальной формах** имеет следующий вид:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (15-31)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (15-32)$$

#### 4) Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{ПРОВО}} + \partial \vec{D} / \partial t.$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Эту систему уравнений необходимо дополнить материальными уравнениями, характеризующими электрические и магнитные свойства среды:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Итак, после открытия взаимосвязи между электрическими и магнитным полями стало ясно, что эти поля не существуют обособлено, независимо одно от другого. Нельзя создать переменное магнитное поле без того, чтобы одновременно в пространстве не возникло и электрическое поле.

Отметим, что покоящийся в некоторой системе отсчета электрический заряд создает только электростатическое поле в этой системе отсчета, но он будет создавать магнитное поле в системах отсчета, относительно которых он движется. То же самое относится и к неподвижному магниту. Заметим также, что уравнения Максвелла инвариантны к преобразованиям Лоренца: причем для инерциальных систем отсчета  $K$  и  $K'$  выполняются следующие соотношения:  $\vec{E}' \vec{B}' = \vec{E} \vec{B}$ ,  $\vec{H}' \vec{D}' = \vec{H} \vec{D}$ .

На основании изложенного можно сделать вывод, что электрические и магнитные поля являются проявлением единого поля, которое называют электромагнитным полем. Оно распространяется в виде электромагнитных волн.

### 15.5. Переменный ток

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор, переменного тока. **Переменный ток** можно считать **квазистационарным**, т. е. для него мгновенные значения силы тока во

всех сечениях цепи практически одинаковы, так как их изменения происходят достаточно медленно, а электромагнитные возмущения распространяются по цепи со скоростью, равной скорости света. Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа.

Рассмотрим последовательно процессы, происходящие в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и кон-

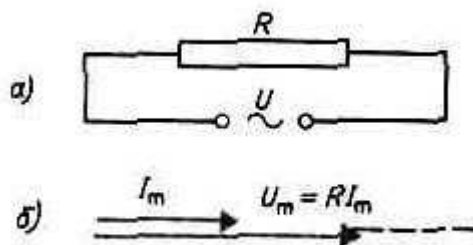


Рис.15.1

содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор, при приложении к ней переменного напряжения

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (15-33)$$

где  $U_m$  — амплитуда напряжения.

**Переменный ток, текущий через резистор сопротивлением  $R$  ( $L \rightarrow 0, C \rightarrow 0$ )** (рис.15.1, а). При выполнении условия квазистационарности ток через резистор определяется законом Ома:

$$I = U/R = (U_m/R) \cos \omega t = I_m \cos \omega t,$$

где амплитуда силы тока  $I_m = U_m/R$ .

Для наглядного изображения соотношений между переменными токами и напряжениями воспользуемся **методом векторных диаграмм**. На рис. 15.1, б дана векторная диаграмма амплитудных значений тока  $I_m$  и напряжения  $U_m$  на резисторе (сдвиг фаз между  $I_m$  и  $U_m$  равен нулю).

**Переменный ток, текущий через катушку индуктивностью  $L$  ( $R \rightarrow 0, C \rightarrow 0$ )** (рис. 15.2, а). Если в цепи приложено переменное напряжение (15-33), то в ней потечет переменный ток, в результате чего возникнет э.д.с. самоиндукции

$\xi_s = -L di/dt$ . Тогда закон Ома для рассматриваемого участка цепи имеет вид

$$U_m \cos \omega t - L di/dt = 0,$$

откуда

$$L di/dt = U_m \cos \omega t. \quad (15-34)$$

Так как внешнее напряжение приложено к катушке индуктивности, то

$$U_L = L di/dt \quad (15-35)$$

есть падение напряжения на катушке. Из уравнения (15-34) следует, что

$$di = (U_m/L) \cos \omega t / dt,$$

или после интегрирования, учитывая, что постоянная интегрирования равна

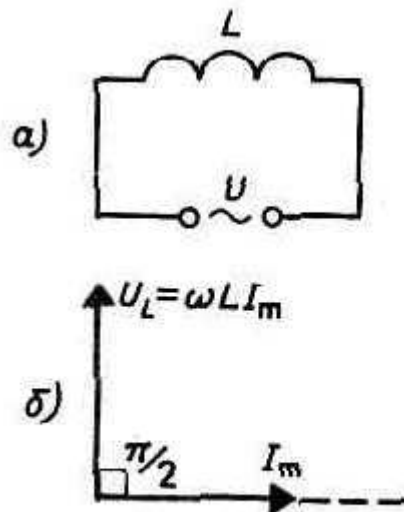


Рис.15.2

нулю (так как отсутствует постоянная составляющая тока), получим

(15-36)

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

где

$$I_m = U_m / (\omega L).$$

Величина

$$R_L = \omega L \quad (15-37)$$

называется **реактивным индуктивным сопротивлением** (или **индуктивным сопротивлением**). Из выражения (15-36) вытекает, что для постоянного тока ( $\omega=0$ ) катушка индуктивности не имеет сопротивления. Подстановка значения  $U_m = \omega L I_m$  в выражение (15-34) с учетом (15-35) приводит к следующему значению падения напряжения на катушке индуктивности:

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \quad (15-38)$$

Сравнение выражений (15-36) и (15-38) приводит к выводу, что падение напряжения  $U_L$  опережает по фазе ток  $I$ , текущий через катушку, на  $\pi/2$ , что и показано на векторной диаграмме (рис. 15.2, б).

#### Переменный ток, текущий через конденсатор емкостью $C$ ( $R \rightarrow 0$ , $L \rightarrow 0$ )

Если переменное напряжение приложено к конденсатору, то он все время перезаряжается, и в цепи потечет переменный ток. Так как все внешнее напряжение приложено к конденсатору, а сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, то

$$Q/C = U_C = U_m \cos \omega t.$$

Сила тока

(15-38)

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = \\ = I_m \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{[1/(\omega C)]}.$$

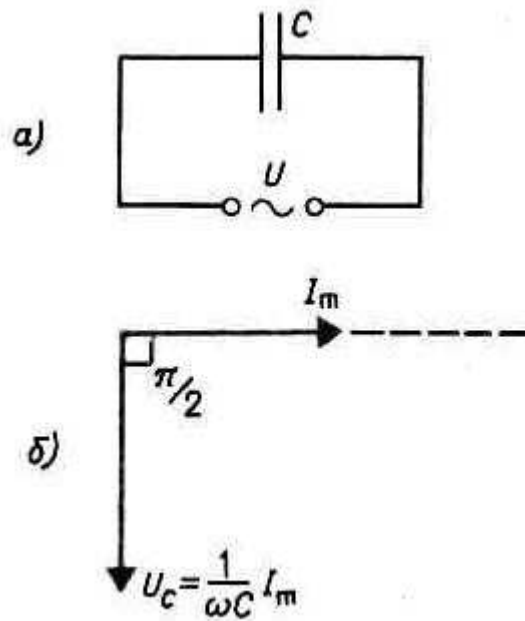


Рис.15.3

Величина

$$R_C = 1/(\omega C)$$

называется **реактивным емкостным сопротивлением** (или **емкостным сопротивлением**). Для постоянного тока ( $\omega=0$ )  $R_C=\infty$ , т. е. постоянный ток через конденсатор течь не может. Падение напряжения на конденсаторе

$$U_C = (1/\omega C) I_m \cos \omega t. \quad (15-39)$$

Сравнение выражений (15-38) и (15-39) приводит к выводу, что падение напряжения  $U_C$  отстает по фазе от текущего через конденсатор тока  $I$  на  $\pi/2$ . Это показано на векторной диаграмме (рис. 15.3, б).

**Цепь переменного тока, содержащая последовательно включенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор.** На рис. 15.4,а представлена цепь, содержащая резистор сопротивлением  $R$ , катушку индуктивностью  $L$  и конденсатор емкостью  $C$ , на концы которой подается переменное напряжение. В цепи возникнет переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи соответствующие падения напряжения  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$ . На рис. 15.4, б представлена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе ( $U_R$ ), катушке ( $U_L$ ) и конденсаторе ( $U_C$ ). Амплитуда  $U_m$  приложенного напряжения должна быть равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений. Как

видно из рис. 15.4, б, угол  $\varphi$  определяет разность фаз между напряжением и силой тока. Из рисунка следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (15-40)$$

Из прямоугольного треугольника получаем,

$$(RI_m)^2 + \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2$$

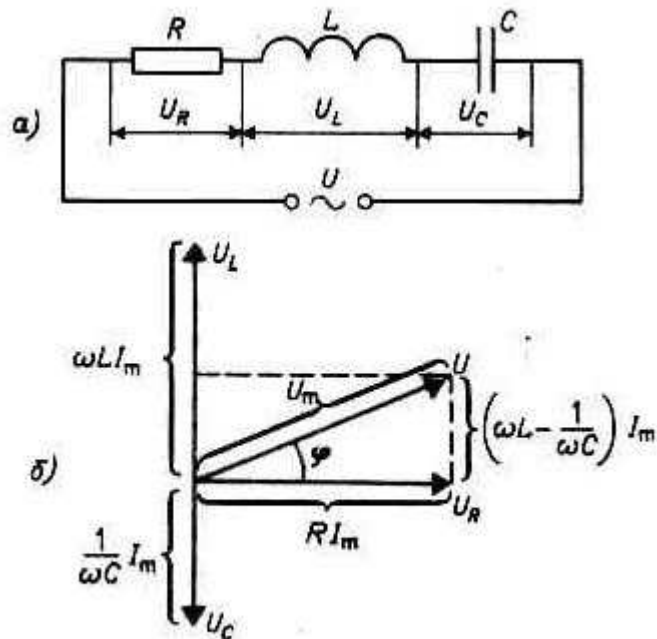


Рис.15.4

откуда амплитуда силы тока имеет значение

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (15-41)$$

Таким образом, если напряжение в цепи изменяется по закону

$$U = U_m \cos \omega t,$$

то в цепи течет ток

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (15-42)$$

где  $\varphi$  и  $I_m$  определяются соответственно формулами (15-41) и (15-42). Величина

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (15-43)$$

называется **полным сопротивлением цепи**, а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

— **реактивным сопротивлением**.

Рассмотрим частный случай, когда в цепи отсутствует конденсатор. В данном случае падения напряжений  $U_R$  и  $U_L$  в сумме равны приложенному напряжению  $U$ . Векторная диаграмма для данного случая представлена на рис. 15.5, из которого следует, что

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \omega L / R, \\ I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \end{cases} \quad (15-44)$$

Отсутствие конденсатора в цепи означает  $C = \infty$ , а не  $C = 0$ .

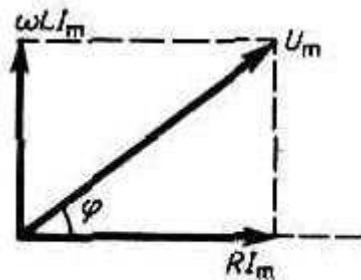


Рис.15.5

### Резонанс напряжений

Если в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (рис.15.4),

$$\omega L = 1/(\omega C), \quad (15-45)$$

то угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ( $\varphi = 0$ ), т. е. изменения тока и напряжения происходят синфазно. Условию (15-45) удовлетворяет частота

$$\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}. \quad (15-46)$$

В данном случае полное сопротивление цепи  $Z$  становится минимальным, равным активному сопротивлению  $R$  цепи, и ток в цепи определяется этим сопротивлением, принимая максимальные (возможные при данном  $U_m$ ) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи ( $U_R = U$ ), а падения напряжений на конденсаторе ( $U_C$ ) и катушке индуктивности ( $U_L$ ) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется **резонансом напряжений (последовательным резонансом)**, а частота (15-46) — **резонансной частотой**. Векторная диаграмма для резонанса напряжений приведена на рис.15.6.

В случае резонанса напряжений

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез},$$

поэтому, подставив в эту формулу значения резонансной частоты и амплитуды напряжений на катушке индуктивности и конденсаторе, получим

$$\begin{aligned} (U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} &= \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m, \end{aligned}$$

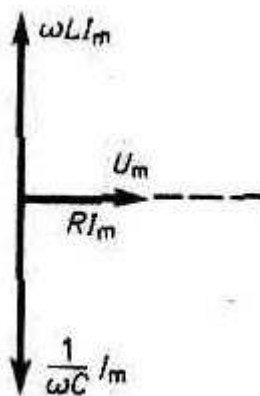


Рис. 15.6

где  $Q$  — добротность контура. Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то напряжение как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение, приложенное к цепи. Поэтому явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определенной частоты. Например, в случае резонанса на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой  $QU_m$  ( $Q$  в данном случае — добротность контура), которая может быть значительно больше  $U_m$ ). Это усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура, что позволяет выделить из многих сигналов одно колебание определенной частоты, т. е. на радиоприемнике настроиться на нужную длину волны. Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчете изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, так как иначе может наблюдаться их пробой.

### Резонанс токов.

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно включенные конденсатор емкостью  $C$  и катушку индуктивностью  $L$  (рис.15.7). Для простоты допустим, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь. Если приложенное напряжение изменяется по закону  $U = U_m \cos \omega t$  (см. (149.1)), то, согласно формуле (15-42), в ветви  $IC2$  течет ток

$$I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1),$$

амплитуда которого определяется из выражения (15-41) при условии  $R=0$  и  $L=0$ :

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/(\omega C)}.$$

Разность фаз токов в ветвях  $IC2$  и  $IL2$  равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ , т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи



$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m |\omega C - 1/(\omega L)|.$$

Если  $\omega = \omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ , то  $I_{m1} = I_{m2}$  и  $I_m = 0$ .

Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты  $\omega$  приложенного напряжения к резонансной частоте  $\omega_{\text{рез}}$  называется **резонансом токов (параллельным резонансом)**. В данном случае для резонансной частоты получили такое же значение, как и при резонансе напряжений.

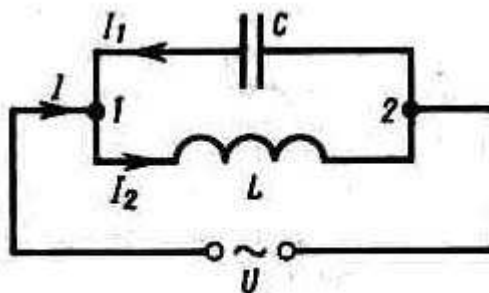


рис.15.7

Амплитуда силы тока  $I_m$  оказалась равна нулю потому, что активным сопротивлением контура пренебрегли. Если учесть сопротивление  $R$ , то разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  не будет равна  $\pi$ , поэтому при резонансе токов амплитуда силы тока  $I_m$  будет отлична от нуля, но примет наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов во внешней цепи токи  $I_1$  и  $I_2$  компенсируются и сила тока  $I$  в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через резистор. При резонансе токов силы токов  $I_1$  и  $I_2$  могут значительно превышать силу тока  $I$ .

Рассмотренный контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к резонансной, поэтому это свойство резонанса токов используется в резонансных усилителях, позволяющих выделять одно определенное колебание из сигнала сложной формы. Кроме того, резонанс токов используется в индукционных печах, где нагревание металлов производится вихревыми токами. В них емкость конденсатора, включенного параллельно нагревательной катушке, подбирается так, чтобы при частоте генератора получился резонанс токов, в результате чего сила тока через нагревательную катушку будет гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

### Мощность, выделяемая в цепи переменного тока.

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t)I(t),$$

где  $U(t) = U_m \cos \omega t$ ,  $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

Раскрыв  $\cos(\omega t - \varphi)$ , получим

$$P(t) = I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_m (U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)).$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за период колебания. Учитывая, что  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ ,  $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$ , получим

$$\langle P \rangle = 1/2 I_m U_m \cos \varphi.$$

Из векторной диаграммы (рис.15.4) следует, что  $U_m \cos \varphi = RI_m$ . Поэтому

$$\langle P \rangle = 1/2 RI_m^2.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток  $I = I_m / \sqrt{2}$ . Величины

$$I = I_m / \sqrt{2}, \quad U = U_m / \sqrt{2}$$

называются соответственно **действующими** (или **эффективными**) **значениями тока и напряжения**. Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения. Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности можно записать в виде

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi, \quad (15-47)$$

где множитель  $\cos \varphi$  называется **коэффициентом мощности**.

Формула (15-47) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то  $\cos \varphi = 1$  и  $P = IU$ . Если цепь содержит только реактивное сопротивление ( $R=0$ ), то  $\cos \varphi = 0$  и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение. Если  $\cos \varphi$  имеет значения, существенно меньшие единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока  $I$ , что приведет либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередачи. Поэтому на практике всегда стремятся увеличить  $\cos \varphi$ , наименьшее допустимое значение которого для промышленных установок составляет примерно 0,85.

Щевченко Н.В.

**ФИЗИКА:**

краткий курс лекций

для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» - Димитровград: Технологический институт – филиал УлГАУ, 2023.- 147 с.