Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Технологический институт-филиал ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

О.А. Дмитриев

МАТЕМАТИКА:
краткий курс лекций

Димитровград - 2019

Дмитриев, О.А. Математика: курс лекций / О.А. Дмитриев - Димитровград: Технологический институт – филиал УлГАУ, 2019.- 118 с.

Рецензенты: Голубев Владимир Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Эксплуатация мобильных машин и технологического оборудования» ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

Ротанов Евгений Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Естественнонаучные и технические дисциплины», ПКИУПТ (филиал) ФГБОУ ВО «МГУТУ ИМ. К.Г.РАЗУМОВСКОГО (ПКУ)»

Математика: курс лекций предназначен для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения.

Утверждено
на заседании кафедры «Эксплуатация транспортных и транспортно-технологических машин и комплексов»
Технологического института – филиала
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ,
протокол № 1 от 4 сентября 2019г.

Рекомендовано
к изданию методическим советом Технологического института – филиала
ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ
Протокол № 2 от 10 октября 2019г.

Конспект лекций по математике

Основные определения

Определение. **Матрицей** размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. **Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$
$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>Операция умножения матриц</u>

<u>Определение:</u> Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

<u>Свойства операции умножения матриц</u>

1)Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение AB=BA выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить <u>единичная</u> матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$\boldsymbol{A \cdot E = E \cdot A = A}$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \quad O \cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC \ \text{или} \quad (A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB , то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T,$$ где

индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
Что такое det будет рассмотрено ниже.

<u>**Определение.**</u> Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц A = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители (детерминанты)

Определение. Определителем квадратной матрицы A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \qquad \text{где} \qquad (1)$$

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Формула (1) позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det\ A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} \qquad (2)$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad (3)$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число M_{1k} называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

<u>Определение.</u> Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

<u>Свойство1.</u> Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

<u>Свойство 2.</u> $\det(A \pm B) = \det A \pm \det B.$

<u>Свойство 3.</u> $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

<u>Свойство 4.</u> Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

<u>Свойство 5.</u> При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

<u>Свойство 6.</u> Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

<u>Определение:</u> Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

<u>Свойство 7.</u> Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

<u>Свойство 8.</u> Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

<u>Свойство 9.</u> Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Пример:. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3 \\ 3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 –

– 152 = -26.

Элементарные преобразования

Определение. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
5) транспонирование;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы.

Определение. Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения

Определение. **Алгебраическим дополнением** минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами* $i_1, \ldots, i_s$, *то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Метод Крамера

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема (Правило Крамера)

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}; \qquad \textit{Ответ: } x = 0;\ y = 0;\ z = -2.$$

Решение произвольных систем линейных уравнений

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений вида (1) матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

Определение. Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна.

Элементарные преобразования систем

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.
3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех х.

Элементы векторной алгебры

Определение. **Вектором** называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. **Длиной (модулем)** вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. **Линейными операциями** над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность
7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Определение.

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\,\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\,\overrightarrow{e_3}\,.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}\,; \qquad \vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}\,;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}\,.$$

Система координат

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой- либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М.
Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус- вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение. **Декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.
1-я ось – ось **абсцисс**
2-я ось – ось **ординат**
3-я ось – ось **аппликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.
Если заданы точки A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пример. Даны векторы $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1) и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{линейно независимы.}$$

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases} \qquad \text{Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ { -1/4, 7/4, 5/2}.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка $M(x, y, z)$ **делит отрезок AB в соотношении** λ/μ, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \qquad y = (y_1 + y_2)/2; \qquad z = (z_1 + z_2)/2.$$

Линейные операции над векторами в координатах

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат $\vec{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Скалярное произведение векторов

<u>Определение.</u> Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

<u>Свойства</u> скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
5) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad \vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

т.к. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8:

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};\qquad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \dfrac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $\left|\vec{a}\right| = 4,\quad \left|\vec{b}\right| = 6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3.$

$$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15\left|\vec{a}\right|^2 - 28\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3} + 12\left|\vec{b}\right|^2 = 15\cdot16 - 28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2} +$$

+ 12·36 = 240 – 336 + 432 = 672 – 336 = 336.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (3, 4, 5), $\vec{b}$ = (4, 5, -3)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 12 + 20 - 15 =17 :

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50};\qquad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

$\cos\varphi = \dfrac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{17}{50};\qquad \varphi = \arccos\dfrac{17}{50}$.

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$$\vec{a} = (m, 1, 0);\qquad \vec{b} = (3, -3, -4)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0;\quad \Rightarrow m = 1.$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $\left|\vec{a}\right| = 1,\quad \left|\vec{b}\right| = 2,\quad \left|\vec{c}\right| = 3,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \dfrac{\pi}{3}.$

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{c} + 15\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 21\vec{b}\cdot\vec{c} +$$

$$+ 20\vec{c}\cdot\vec{a} + 24\vec{b}\cdot\vec{c} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10\,\vec{a}\cdot\vec{a} + 27\vec{a}\cdot\vec{b} + 34\vec{a}\cdot\vec{c} + 45\vec{b}\cdot\vec{c} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10 +$$

+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.

Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

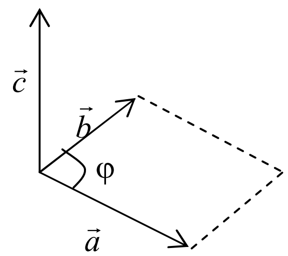
1) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\sin\varphi \ge 0; \quad 0 \le \varphi \le \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;
3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;
4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+ \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.$ $\qquad S_{\Delta} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (ед^2).

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$
, т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a}\wedge\vec{b} = 30^0$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

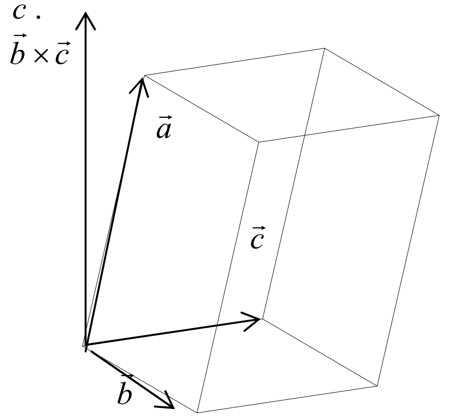
$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:
- а)хоть один из векторов равен нулю;
- б)два из векторов коллинеарны;
- в)векторы компланарны.

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|$$

6)Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$, $\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA} = (-2;-3;-4)$, $\overrightarrow{BD} = (1;4;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (4;-1;-2)$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16)) =$

$$= \frac{1}{6}(22+30+68) = 20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11^2+10^2+17^2} = \sqrt{121+100+289} = \sqrt{510}$$

$S_{осн} = \sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. $V = \frac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h = \frac{3V}{S_{осн}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17}$. (ед)

Аналитическая геометрия.

Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

<u>Определение.</u> **Уравнением линии** называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

<u>Уравнение прямой на плоскости.</u>

<u>Определение.</u> Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- C = 0, А ≠ 0, В ≠ 0 – прямая проходит через начало координат
- А = 0, В ≠ 0, С ≠ 0 { By + C = 0}- прямая параллельна оси Ох
- В = 0, А ≠ 0, С ≠ 0 { Ax + C = 0} – прямая параллельна оси Оу
- В = С = 0, А ≠ 0 – прямая совпадает с осью Оу
- А = С = 0, В ≠ 0 – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

<u>Уравнение прямой по точке и вектору нормали.</u>

<u>Определение.</u> В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

<u>Пример.</u> Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (3, -1).

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: 3х – у + С = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.
Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1.
Итого: искомое уравнение: 3х – у – 1 = 0.

<u>Уравнение прямой, проходящей через две точки.</u>

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; *т.е.* $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой
Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}$(1, -1) и проходящей через точку А(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C/A = 0.

при х = 1, у = 2 получаем С/A = -3, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С $\neq$ 0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой х – у + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

С = 1, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, а = -1, b = 1.

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения Ах + Ву + С = 0 разделить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \text{ –}$$

нормальное уравнение прямой.

Знак $\pm$ нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu \cdot C < 0$.

р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример. Дано общее уравнение прямой 12х – 5у – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$ $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0$; $\cos\varphi = 12/13$; $\sin\varphi = -5/13$; p = 5.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4.

a = -4 не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ или x + y – 4 = 0.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0}; \qquad \frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}; \qquad 3x-2y=0.$$

Для самостоятельного решения: Составить уравнения прямых, проходящих через точку М(-3, -4) и параллельных осям координат.

Ответ: { x + 3 = 0; y + 4 = 0}.

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.
Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые Ax + By + C = 0 и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой y = kx + b представляется уравнением:

$$y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1)$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. *Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой Ax + By + C =0 определяется как*

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки М на заданную прямую. Тогда расстояние между точками М и M_1:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой.

Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

<u>Пример.</u> Определить угол между прямыми: y = -3x + 7; y = 2x + 1.

$K_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\quad$ $tg\varphi = \left|\frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

<u>Пример.</u> Показать, что прямые 3x – 5y + 7 = 0 и 10x + 6y – 3 = 0 перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

<u>Пример.</u> Даны вершины треугольника А(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4x = 6y – 6;

2x – 3y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b.

k = $-\frac{3}{2}$. Тогда y = $-\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда b = 17. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: 3x + 2y – 34 = 0.

<u>Для самостоятельного решения:</u> Даны стороны треугольника x + y – 6 = 0, 3x – 5y + 15 = 0, 5x – 3y – 14 = 0. Составить уравнения его высот.

Указание: Сначала следует найти координаты вершин треугольника, как точек пересечения сторон, затем воспользоваться методом, рассмотренном в предыдущем примере.

Ответ: { x – y = 0; 5x + 3y – 26 = 0; 3x + 5y – 26 = 0}.

Кривые второго порядка.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение эллипса.
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение гиперболы.
4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
9) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность.

В окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ центр имеет координаты (a; b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

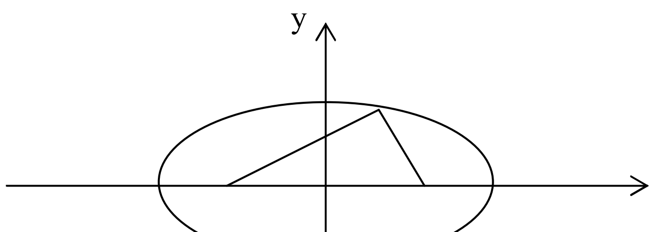
$$x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2,5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$
$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$
$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим O(2; -5/4); R = 11/4.

Эллипс.

Определение. **Эллипсом** называется линия, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Определение. **Фокусами** называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



M

r_1

r_2

F_1 O F_2 x

F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$
c – половина расстояния между фокусами;
a – большая полуось;
b – малая полуось.

Теорема. *Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Доказательство: В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с вертикальной осью, $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ (по теореме Пифагора). В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с горизонтальной осью, $r_1 + r_2 = a - c + a + c$. Т.к. по определению сумма $r_1 + r_2$ – постоянная величина, то, приравнивая, получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$$E = c/a.$$

Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

Определение. Величина $k = b/a$ называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина $1 - k = (a - b)/a$ называется **сжатием** эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $k^2 = 1 - e^2$.

Если $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, то точка находится вне эллипса.

Теорема. *Для произвольной точки M(x, y), принадлежащей эллипсу верны соотношения*:

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex.$$

Доказательство. Выше было показано, что $r_1 + r_2 = 2a$. Кроме того, из геометрических соображений можно записать:

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y} = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$$

Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$.   <u>Теорема доказана.</u>

С эллипсом связаны две прямые, называемые **директрисами**. Их уравнения:

$x = a/e$; $x = -a/e$.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету е.*

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

1) Координаты нижней вершины: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \qquad 4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

<u>Пример.</u> Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Расстояние между фокусами:

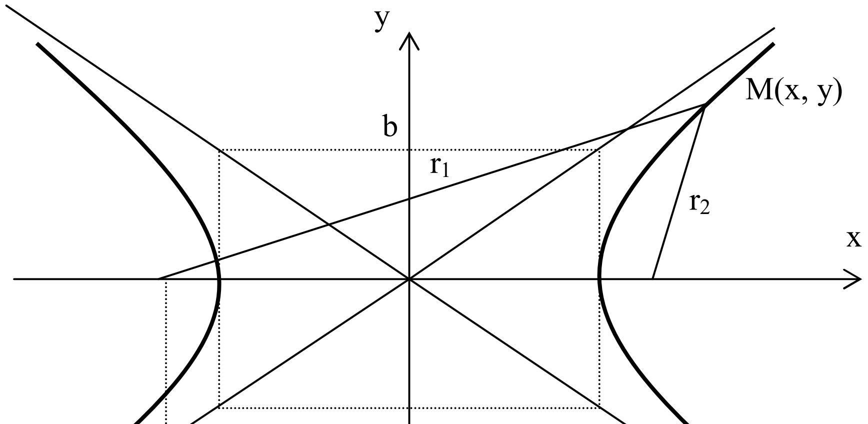
$2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

по условию $2a = 2$, следовательно $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

<u>Гипербола.</u>

<u>Определение.</u> **Гиперболой** называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



F_1 a F_2

c

По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.
Выберем на гиперболе произвольную точку M(x, y). Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$

$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.
Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x.$

<u>Определение.</u> Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, а – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

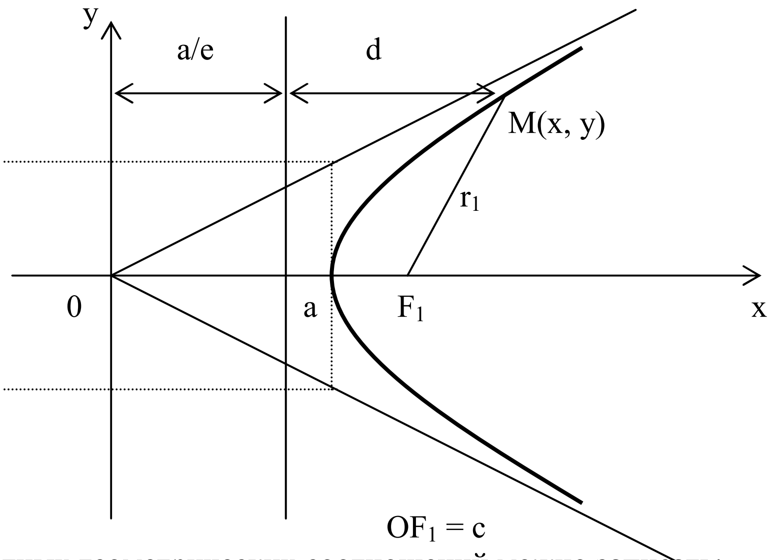
$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Если a = b, e = $\sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней).**

<u>Определение.</u> Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения: $x = \pm\frac{a}{e}$.

<u>Теорема.</u> *Если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого- либо фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d – величина постоянная, равная эксцентриситету.*

<u>Доказательство.</u> Изобразим схематично гиперболу.



Из очевидных геометрических соотношений можно записать:
$a/e + d = x$, следовательно $d = x - a/e$.
$(x - c)^2 + y^2 = r^2$

Из канонического уравнения: $y^2 = \frac{x^2b^2}{a^2} - b^2$, с учетом $b^2 = c^2 - a^2$:

$$r^2 = x^2 - 2xc + c^2 + \frac{x^2b^2}{a^2} - b^2 =$$

$$= x^2 - 2xc + c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$$

$$r = \frac{c}{a}x - a$$

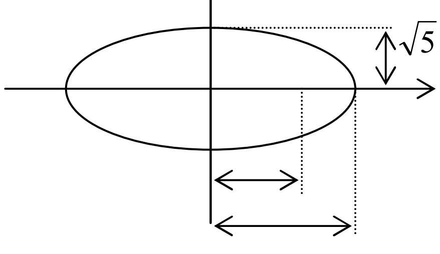
Тогда т.к. $c/a = e$, то $r = ex - a$.

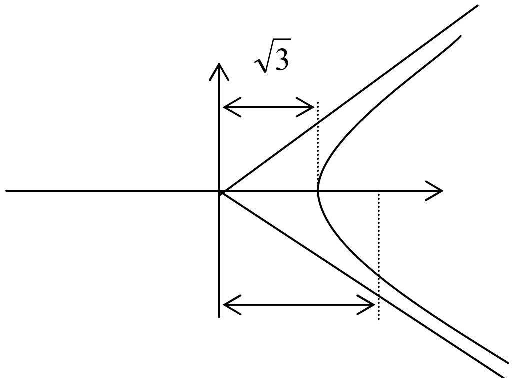
Итого: $\frac{r}{d} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = e$.

Для левой ветви гиперболы доказательство аналогично. <u>Теорема доказана.</u>

<u>Пример.</u> Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.





$\sqrt{3}$

$\sqrt{8}$ $\sqrt{8}$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Пример. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

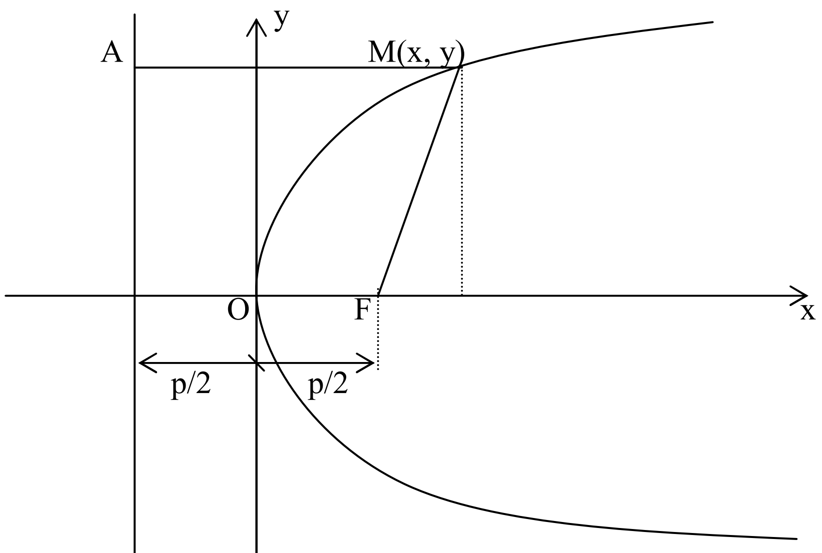
Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 – 9 = 16$.
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 – 4 = 12$.

Итого: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола.

Определение. Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: $AM = MF$; $AM = x + p/2$;

$$MF^2 = y^2 + (x – p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x – p/2)^2$$

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 – xp + p^2/4$$

$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы: $x = -p/2$.

<u>Пример.</u> На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4.
$r = x + p/2 = 4$; следовательно:
$x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

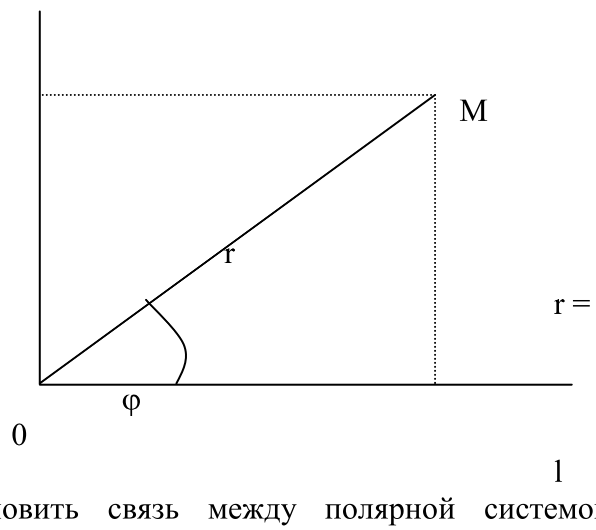
<u>Системы координат.</u>

Любая точка на плоскости может быть однозначно определена при помощи различных координатных систем, выбор которых определяется различными факторами. Способ задания начальных условий для решения какой – либо конкретной технической задачи может определить выбор той или иной системы координат. Для удобства проведения вычислений часто предпочтительнее использовать системы координат, отличные от декартовой прямоугольной системы. Кроме того, наглядность представления окончательного ответа зачастую тоже сильно зависит от выбора системы координат. Ниже рассмотрим некоторые наиболее часто используемые системы координат.

<u>Полярная система координат.</u>

<u>Определение.</u> Точка О называется **полюсом**, а луч l – **полярной осью.**

Суть задания какой- либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояние точки от полюса и угол между полярной осью и радиус– вектором этой точки. Этот угол φ называется **полярным углом**.



$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$

Можно установить связь между полярной системой координат и декартовой прямоугольной системой, если поместить начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ох.

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi; \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

<u>Пример.</u> Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид:

$r = \dfrac{4}{3 - \cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{3 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4$$

$$9x^2 + 9y^2 = 16 + 8x + x^2$$

$$8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$$

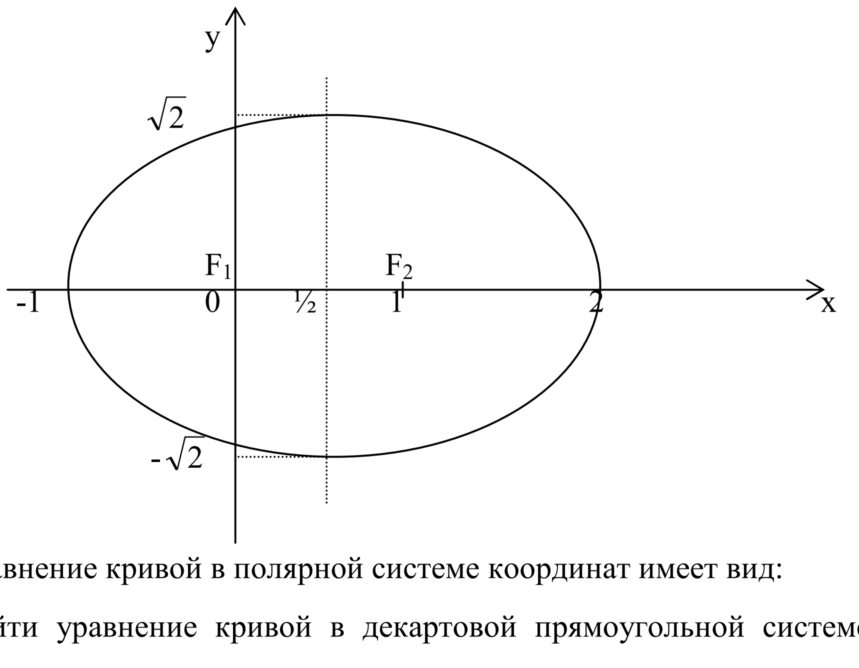
$$8(x^2 - x + 1/4) - 8 \cdot 1/4 + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x - 1/2)^2 - 2 + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x - 1/2)^2 + 9y^2 = 18$$

$$\frac{(x - 1/2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ox на 1/2 вправо, большая полуось a равна 3/2, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, половина расстояния между фокусами равно c = $\sqrt{a^2 - b^2}$ = 1/2. Эксцентриситет равен e = c/a = 1/3. Фокусы $F_1(0; 0)$ и $F_2(1; 0)$.



<u>Пример.</u> Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4-\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$4\sqrt{x^2+y^2}-5x=9$$

$$4\sqrt{x^2+y^2}=5x+9$$

$$16x^2+16y^2=81+90x+25x^2$$

$$9x^2+90x-16y^2+81=0$$

$$9(x^2+10x+25-25)-16y^2+81=0$$

$$9(x+5)^2-225-16y^2+81=0$$

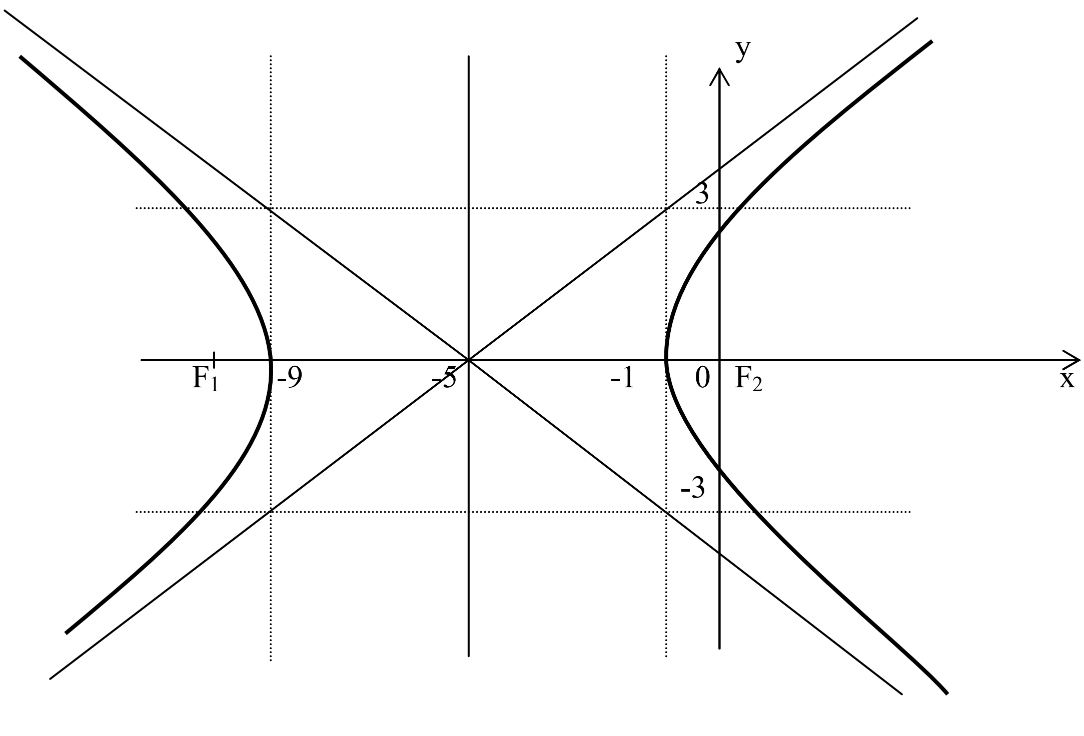
$$9(x+5)^2-16y^2=144$$

$$\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы. Из уравнения видно, что гипербола сдвинута вдоль оси Ох на 5 влево, большая полуось a равна 4, меньшая полуось b равна 3, откуда получаем $c^2 = a^2 + b^2$; c = 5; e = c/a = 5/4.

Фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(0; 0)$.

Построим график этой гиперболы.



Введение в математический анализ.

Числовая последовательность.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n)$$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin\pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1) Умножение последовательности на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\}\cdot\{y_n\} = \{x_n\cdot y_n\}$.
4) Частное последовательностей: $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \leq M.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \geq M$$

Пример. $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Определение. Число **a** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к а при $n\to\infty$.

<u>Свойство:</u> Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

<u>Пример.</u> Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при n > N верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

<u>Пример.</u> Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, ..., 2+\frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Итого: $\{x_n\} = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$

Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. lim $\{x_n\} = 2$.

<u>Теорема.</u> *Последовательность не может иметь более одного предела.*

<u>Доказательство.</u> Предположим, что последовательность $\{x_n\}$имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$$x_n \to a;\ x_n \to b;\quad a \neq b.$$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a-b| = |(a-x_n)+(x_n-b)| \le |a-x_n| + |x_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

А т.к. ε- **любое** число, то $|a-b| = 0$, т.е. a = b. Теорема доказана.

<u>Теорема.</u> *Если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.*

<u>Доказательство.</u> Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время:

$||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$. Теорема доказана.

<u>Теорема.</u> *Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n}, \textit{при четном } n \\ 2-\dfrac{1}{n}, \textit{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Монотонные последовательности.

Определение. 1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.

2)Если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.

3)Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.

4)Если $x_{n+1} \le x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Пример. $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\}= \dfrac{n+1}{2n+2+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности: $\{x_n\}-\{x_{n+1}\}= \dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \dfrac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0$, т.к. $n\in N$, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность $\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Найдем $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+1}{5\cdot 5^n} - \dfrac{n}{5^n} = \dfrac{n+1-5n}{5\cdot 5^n} =$

$= \dfrac{1-4n}{5\cdot 5^n}$, т.к. $n\in N$, то $1 - 4n < 0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Теорема. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$$

Эта последовательность ограничена сверху: $x_n \le M$, где М – некоторое число.

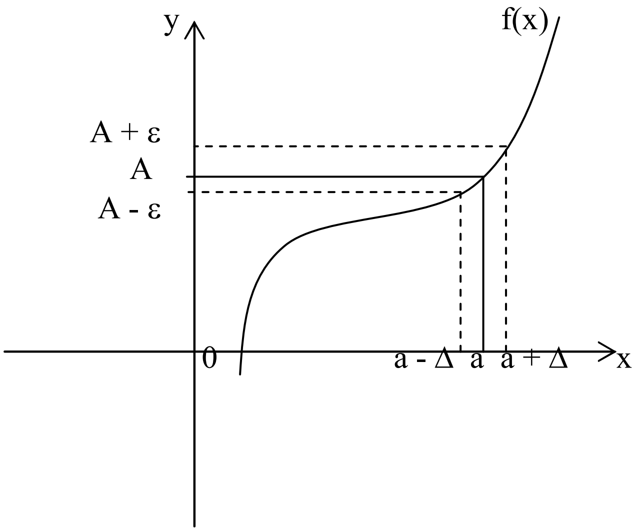
Т.к. любое, ограниченное сверху, числовое множество имеет четкую верхнюю грань, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число N, что $x_N > a - \varepsilon$, где а – некоторая верхняя грань множества.

Т.к. $\{x_n\}$- неубывающая последовательность, то при N > n $a - \varepsilon < x_N \le x_n$,
$x_n > a - \varepsilon$.
Отсюда $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$-\varepsilon < x_n – a < \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim x_n = a$.

Для остальных монотонных последовательностей доказательство аналогично.

Теорема доказана.

Предел функции в точке.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех х таких, что

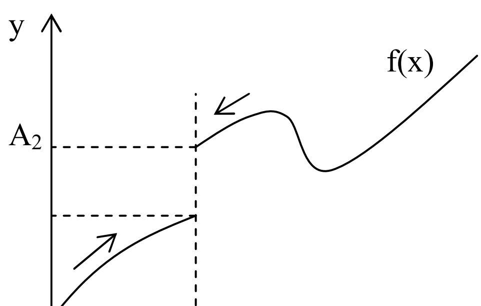
$$0 < |x - a| < \Delta$$

верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:
Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \ne a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



A_1

0 a x

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

<u>Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.</u>

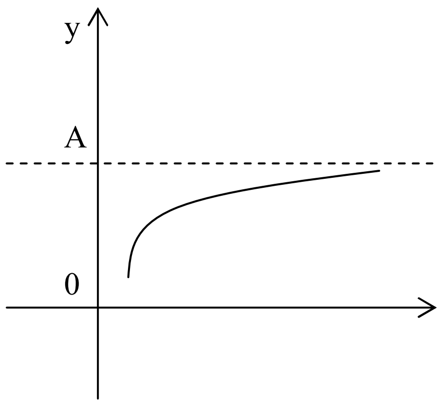
<u>Определение.</u> Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство

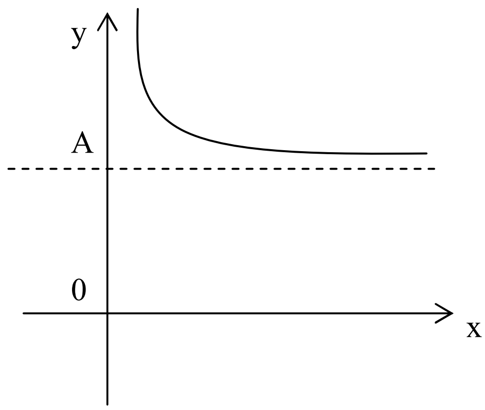
$$\left|A - f(x)\right| < \varepsilon$$

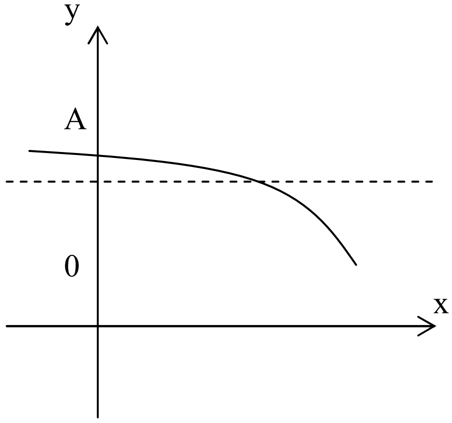
При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

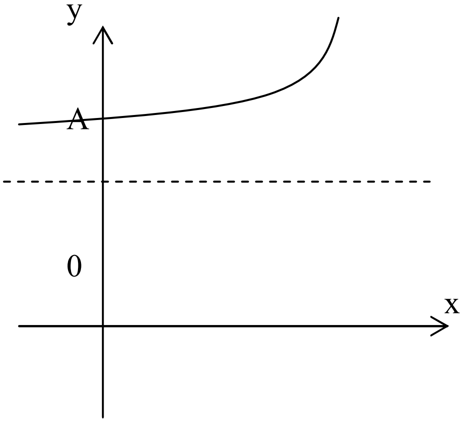
Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Графически можно представить:









Аналогично можно определить пределы $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim_{x\to a} C = C$, где С = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ при $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} u(x) = A$, то и $\lim_{x\to a} = A$.*

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|$<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|\text{, т.е.}$$

$$|f(x)| < M\text{, где } M = \varepsilon + |A|$$

Теорема доказана.

Бесконечно малые функции.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **бесконечно малой** при $x \to a$, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент х. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

<u>Пример.</u> Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x \to 0$ и не является бесконечно малой при $x \to 1$, т.к. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы функция f(x) при $x \to a$ имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

<u>Свойства бесконечно малых функций:</u>

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

<u>Доказательство теоремы 2.</u> Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, тогда

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

A + B = const, $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 3.</u> Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, тогда

$$f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

$A \cdot B$ = const, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} A \cdot B + 0 = A \cdot B = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Теорема доказана.

<u>Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.</u>

<u>Определение.</u> Предел функции f(x) при $x \to a$, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа M>0 существует такое число $\Delta>0$, что неравенство

$$|f(x)|>M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на $f(x)>M$, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x)<M$, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

<u>Определение.</u> Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, где a – чосли или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> *Если $f(x)\to 0$ при $x\to a$ (если $x\to\infty$) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

<u>Сравнение бесконечно малых функций.</u>

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

<u>Определение.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

<u>Пример.</u> Сравним бесконечно малые при $x\to 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{10}}{x}=\lim_{x\to a}x^9=0$$

т.е. функция f(x) = x^{10} – бесконечно малая более высокого порядка, чем f(x) = x.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x\sin x, \quad \beta = x$, то при x→0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}=1$, т.е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

Пример. Если $\alpha = x\sin\frac{1}{x}, \quad \beta = x$, то при x→0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) α ~ α, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha}=1\right)$

2) Если α ~ β и β ~ γ, то α ~ γ, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=1\cdot 1=1\right)$

3) Если α ~ β, то β ~ α, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}=1\right)$

4) Если α ~ α_1 и β ~ β_1 и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=k$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Следствие: а) если α ~ α_1 и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если β ~ β_1 и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=k$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как 1 – cosx = $2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при x→0, то $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}2x=0$.

Пример. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$.

Если α и β - бесконечно малые при x→a, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то γ = α + β - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ.

Пример. Функция x^2 +x – бесконечно малая при x→0, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем α = x^2, β = x, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) = $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

Q(x) = $b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+....+\frac{b_m}{x^m})}=x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & при\quad n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & при\quad n=m\\ \infty, & при\quad n>m\end{cases}$

Второй замечательный предел. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

<u>Третий замечательный предел.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x} = m.$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx - tgx_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0} = 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x} = \left\{\begin{array}{l} y=\pi/2-x \\ x=\pi/2-y \\ \pi-2x=\pi-\pi+2y \end{array}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \left\{\begin{array}{l} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^y\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^4 =$$

$$= \left\{z=\frac{y}{4}\right\} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z} = \left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right)^4 = e^4$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \qquad\qquad x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$D = 36 - 32 = 4; \qquad\qquad D = 64 - 48 = 16;$$

$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4; \qquad\qquad x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$
$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2\ ; \qquad\qquad x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} =$

$= \dfrac{2}{-1\cdot(1+1)} = -1$.

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \left\{x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)\right\} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3),\ \text{т.к.}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\
\underline{x^3 - x^2} & x^2 - 5x + 6 \\
\quad -5x^2 + 11x & \\
\quad \underline{-5x^2 + 5x} & \\
\qquad\quad 6x - 6 & \\
\qquad\quad \underline{6x - 6} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2}=$$
$$=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

Для самостоятельного решения:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+2x^2+5x-6}{x^3+2x^2+7x-1}=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}=2$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}=\frac{3}{4}$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}=-\frac{1}{4}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\frac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}=3$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}$ - не определен.

Непрерывность функции в точке.

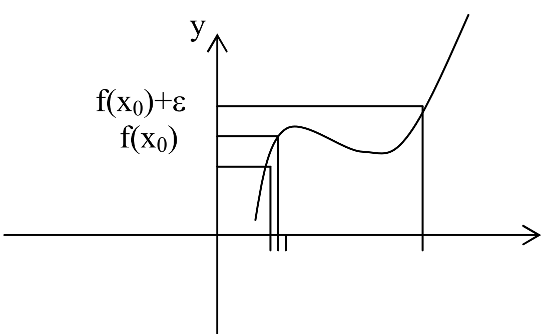
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

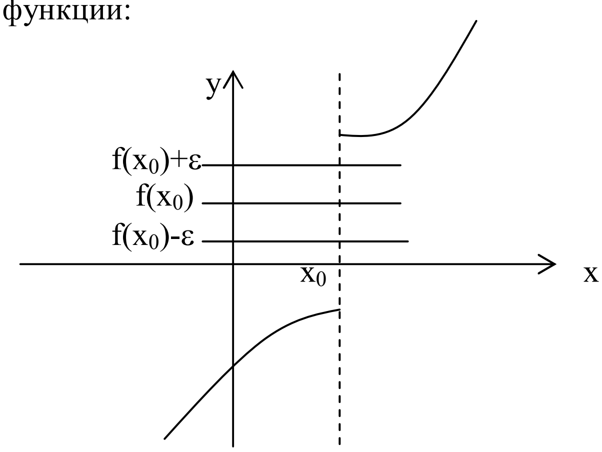
Пример непрерывной функции:



$f(x_0)-\varepsilon$

0 $x_0-\Delta$ x_0 $x_0+\Delta$ x

Пример разрывной функции:



<u>Определение.</u> Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

<u>Свойства непрерывных функций.</u>

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.
Это свойство может быть записано следующим образом:
Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

<u>Непрерывность некоторых элементарных функций.</u>

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x) = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство 3 для функции y = sinx.
Запишем приращение функции Δy = sin(x + Δx) – sinx, или после преобразования:

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при Δx$\to$0 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к. предел функции синус $\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при Δx$\to$0.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция y = sinx – непрерывная функция для любого значения x = x_0 из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Аналогично можно доказать непрерывность остальных тригонометрических функций на всей области определения.

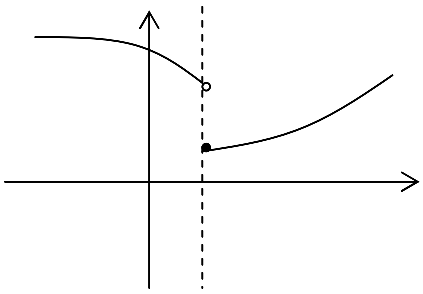
Вообще следует заметить, что все основные элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

Точки разрыва и их классификация.

Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что x = x_0 является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

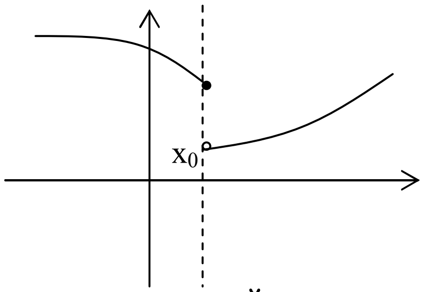
Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



x_0

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x\to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

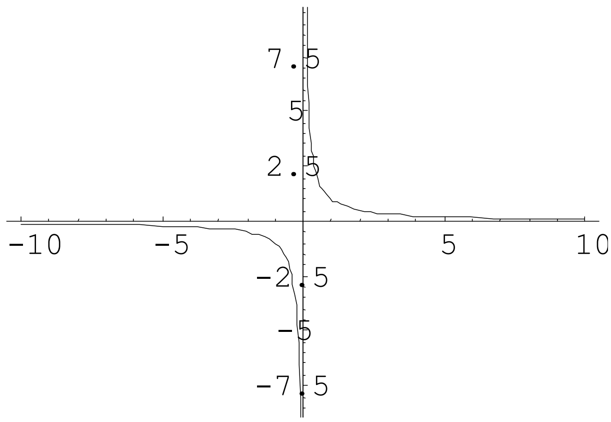
<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = $\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

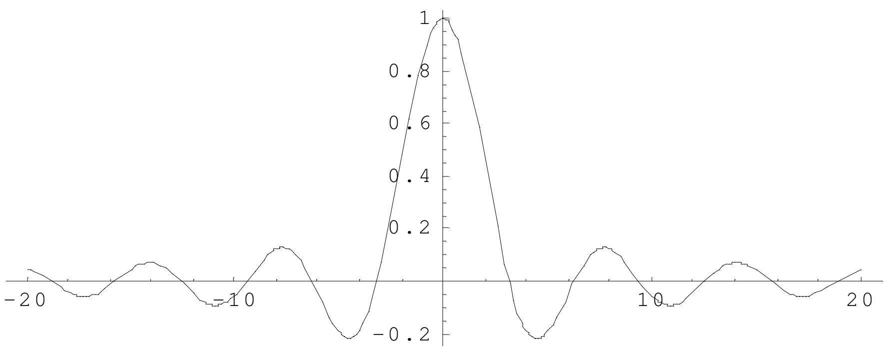


Пример. f(x) = $\dfrac{\sin x}{x}$

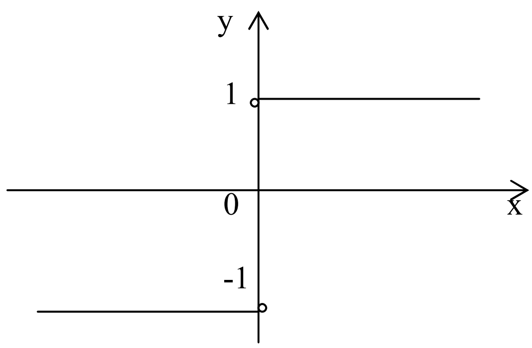
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Пример. f(x) = $\dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x > 0 \\ -1, & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – f(x) = sinx).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

Т.е. если $\mathrm{sign}(f(a)) \ne \mathrm{sign}(f(b))$, то $\exists\, x_0$: $f(x_0) = 0$.

Определение. Функция f(x) называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого ε>0 существует Δ>0 такое, что для любых точек $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

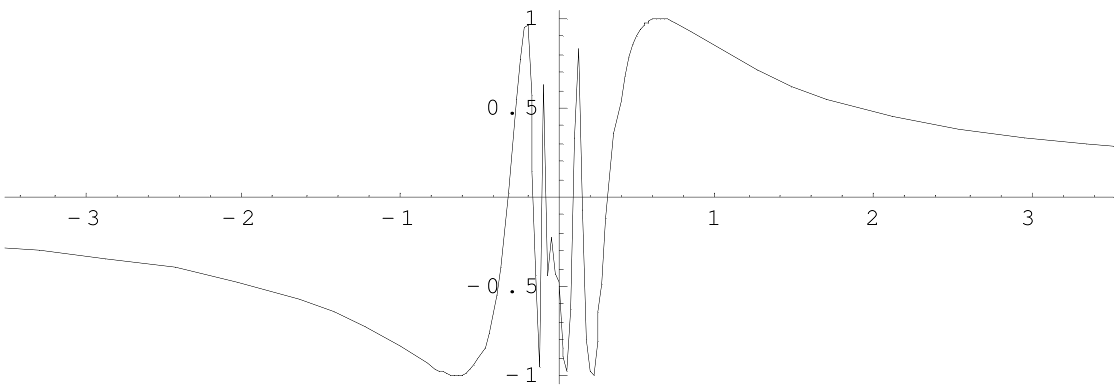
верно неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от "обычной" в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при "обычной" непрерывности Δ зависит от ε и x.

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.
(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Пример. $y = \sin\dfrac{1}{x}$



Функция $y = \sin\dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, a), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число Δ>0 такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

Свойство 7: Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

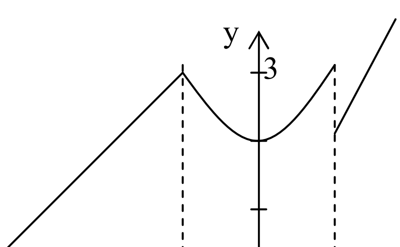
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$$

в точке x = -1 функция непрерывна   в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



2

-4 -1 0 1 x

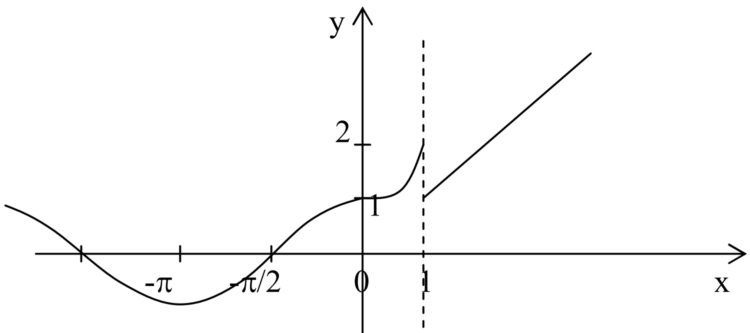
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1$$

в точке x = 0 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода

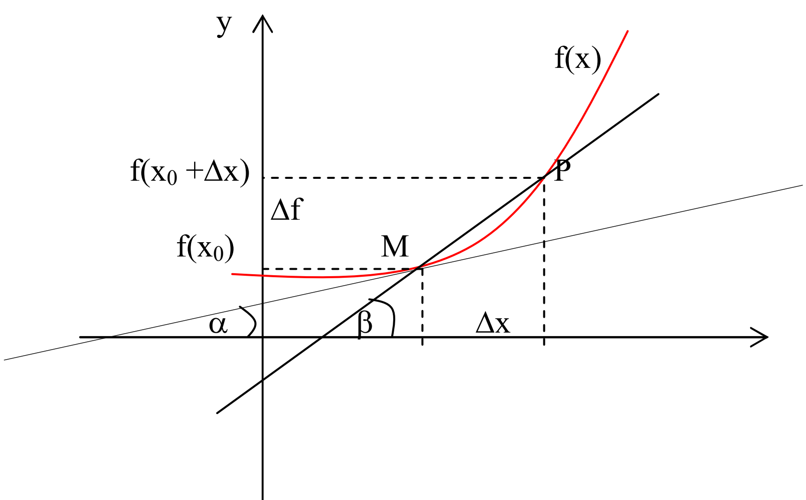


Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



0 x_0 $x_0 + \Delta x$ x

Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x} -$ тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, f(x_0)).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

<u>Односторонние производные функции в точке.</u>

<u>Определение.</u> Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке x = x_0 называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad\qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке x = x_0, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

<u>Например:</u> f(x) = $|x|$ - имеет в точке x = 0 и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

<u>Теорема.</u> (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$, 2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$ 3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

8) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

9) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

10) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

11) $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

16) $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, т.к. u = g(x) – непрерывная функция)

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Теорема доказана.

Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{x} = \dfrac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x, f(x)>0. Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right)$$

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x$; $v = x\cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x\sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x\cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2 + 3x)$$

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x:

$$1 = g'(y)y'$$

т.к. $g'(y) \neq 0$ $$y' = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции arctg.

Функция arctg является функцией, обратной функции tg, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = tgx; \qquad x = arctgy;$$

Известно, что $y' = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(arctgy)/dx}; \qquad \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2$; то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(arctgy)' = \frac{1}{1+y^2};$$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главня линейная часть приращения функции.

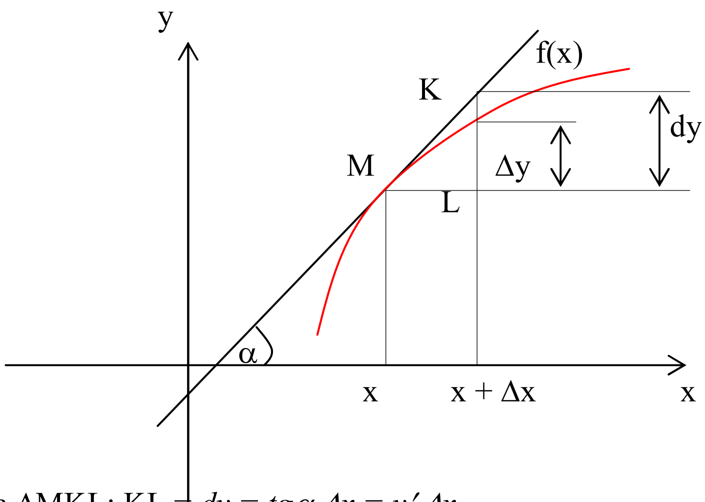
Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$dy = f'(x)dx.$$

Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: $KL = dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке х равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке х, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е у- сложная функция.

Тогда $$dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x- независимая переменная, то

$$dx = \Delta x, \text{ но}$$

если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y = x\cos x \sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2+1)^2}$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x\right)\ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$
$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2 \ln x)$$

Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

(Лопиталь (1661-1704) – французский математик)

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty - \infty$$

Теорема (правило Лопиталя). *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки а, непрерывны в точке а, g′(x) отлична от нуля вблизи а и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между а и х. Учитывая, что f(a) = g(a) = 0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при х→а отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками а и х, то при х→а получим ε→а, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Пример: Найти предел $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; $\qquad g'(x) = e^x$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e};$$

Пример: Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

$$f'(x)=-\frac{2}{1+x^2}; \qquad f'(x)=-\frac{2}{1+x^2}; \qquad g'(x)=e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right]=\frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)}=\frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример: Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x); \qquad g'(x)=1+e^x;$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \qquad g''(x)=e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4}; \qquad g'''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0;$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример: Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$$f'(x)=e^x+e^{-x}-2; \qquad g'(x)=1-\cos x;$$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{1+1-2}{1-1}=\frac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x)=e^x-e^{-x}; \qquad g''(x)=\sin x;$$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ - применяем правило Лопиталя еще раз.

$f'''(x) = e^x + e^{-x}$; $g'''(x) = \cos x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \dfrac{2}{1} = 2$;

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = \left[f(x)\right]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки а при x→a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции lny = g(x)lnf(x).

<u>Пример:</u> Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Здесь y = x^x, lny = xlnx.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \begin{Bmatrix} правило \\ Лопиталя \end{Bmatrix} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0;$.

Следовательно $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \ln \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$

<u>Пример:</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x) = 2x$; $g'(x) = 2e^{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{2x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$;- получили неопределенность. Применяем правило Лопиталя еще раз.

$f''(x) = 2$; $g'(x) = 4e^{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2e^{2x}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$;

<u>Производные и дифференциалы высших порядков.</u>

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y′′ = (y′)′ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $$(u\cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$$

$$\ldots + uv^{(n)}.$$

Это выражение называется **формулой Лейбница.**

Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ может быть найден дифференциал n- го порядка.

Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.*

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Доказательство.

1) Если функция f(x) возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x<0$, тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку [a, b], причем $x_1<x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

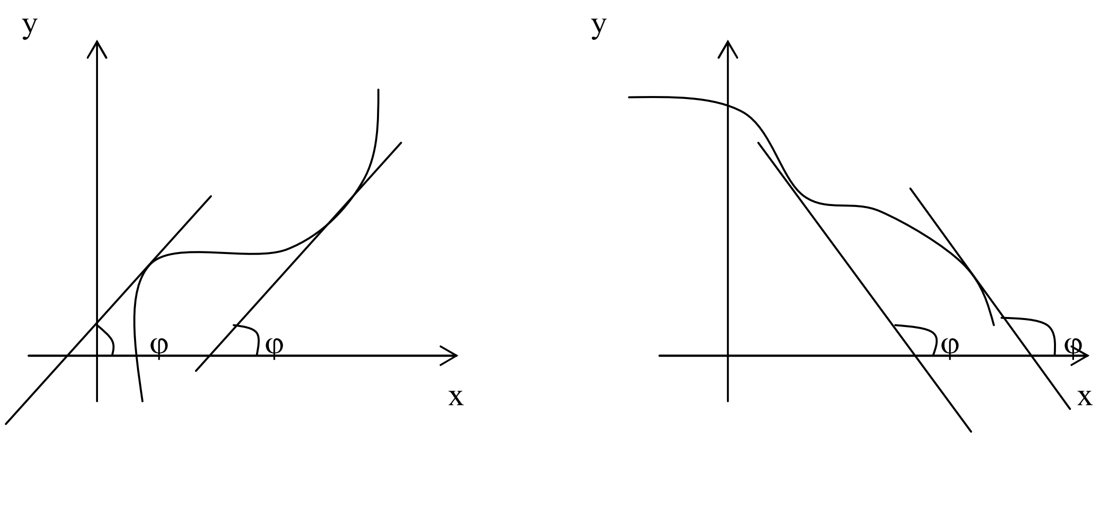
По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) >0$, т.е. функция f(x) возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x)\leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Точки экстремума.

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

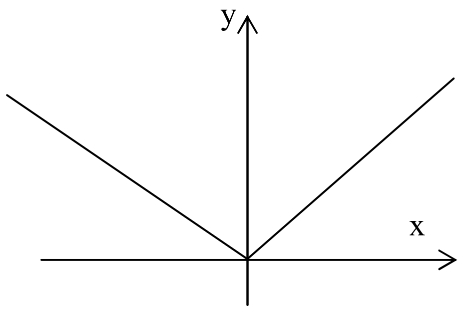
Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке x = 0 равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

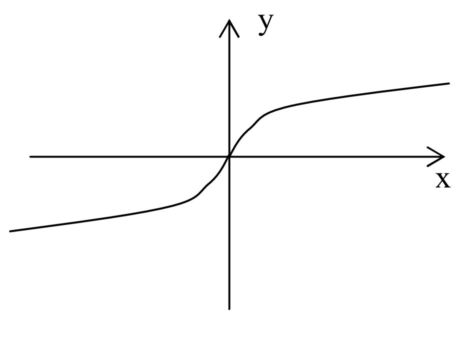
Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



В точке x = 0 функция имеет минимум, но не имеет производной.

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке x = 0 функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью

производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

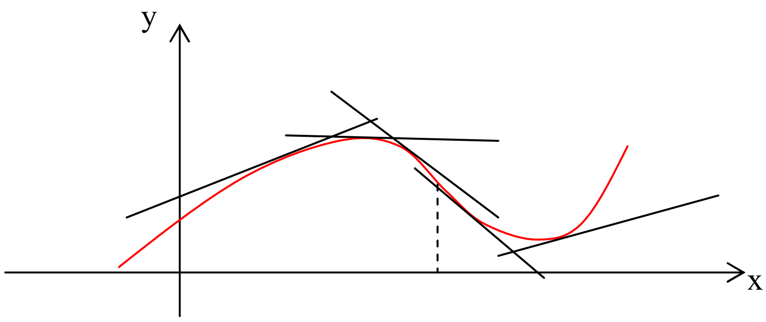
Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: y = f(x);

Уравнение касательной: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y - \overline{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$: $y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию

$f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \overline{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то

$y - \overline{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то кривая y=f(x) вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при

$x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка x = a – точка перегиба.

2) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x < b$. Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда x = b – точка перегиба.

Теорема доказана.

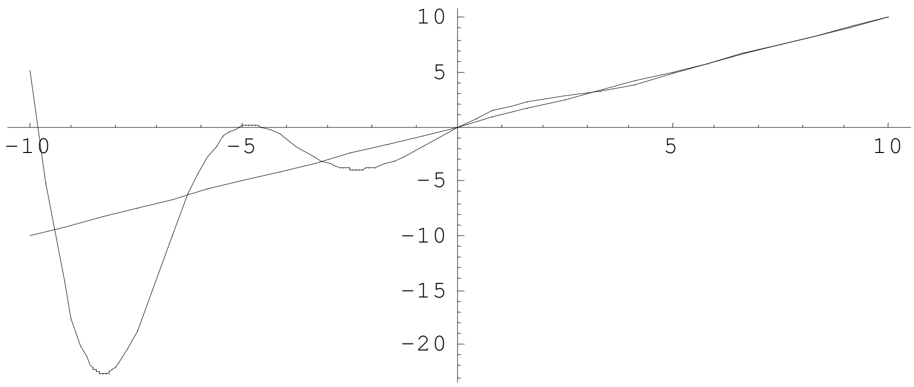
Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты х точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота у = х.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

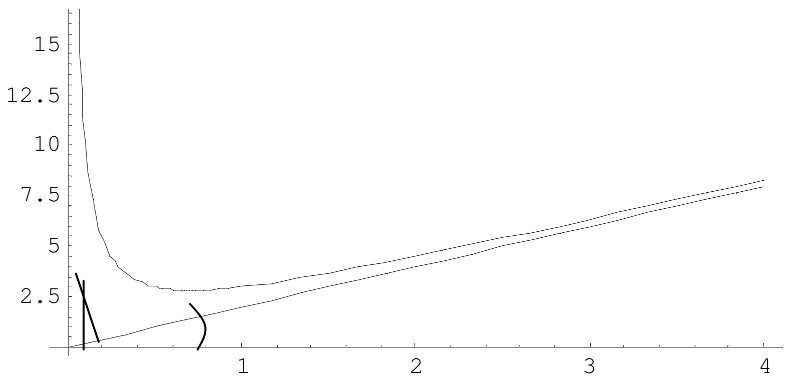
Вертикальные асимптоты.

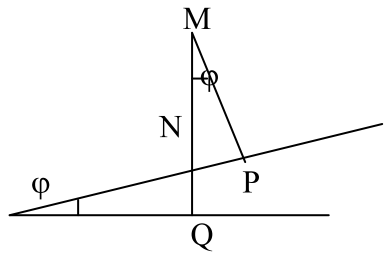
Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая х = а – асимптота кривой у = f(x).

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая х = 5 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая у = f(x) имеет наклонную асимптоту у = kx + b.





Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M, P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ. Перпендикуляр MQ к оси Ох пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ = $\bar{y}$ - ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP| = 0$, $\angle$NMP = φ, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ - постоянный и не равный 90^0, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP| = \lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty}|NM| = 0$$

$$|NM| = \big||MQ| - |QN|\big| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$.

Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. x→∞, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]-\lim\limits_{x\to\infty}b=0$, следовательно,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: y→+∞ x→0-0: y→-∞ x→0+0, следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

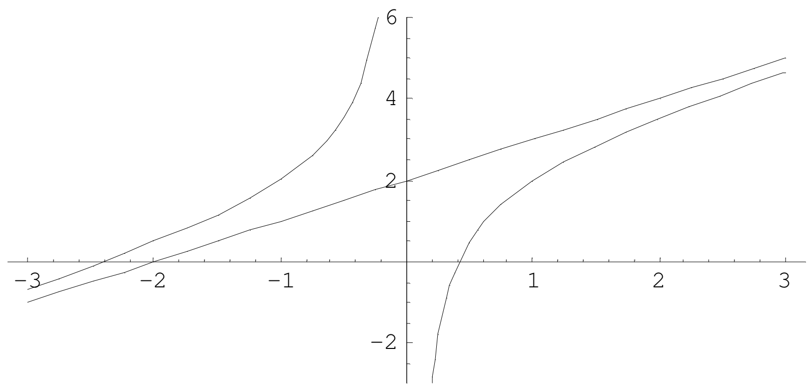
2) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



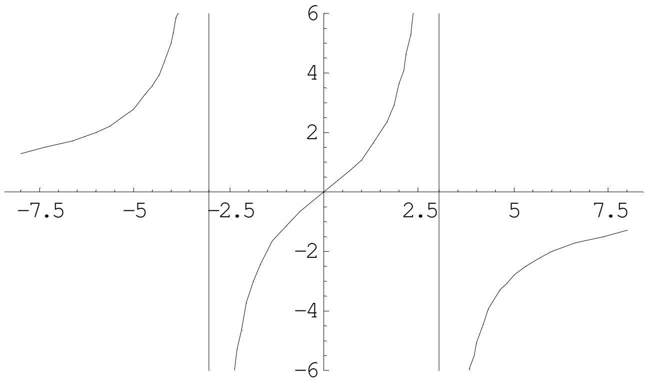
<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{9x}{9-x^2}$.

Прямые x = 3 и x = -3 являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{9-x^2}=0$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2}-1}=0$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.



<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

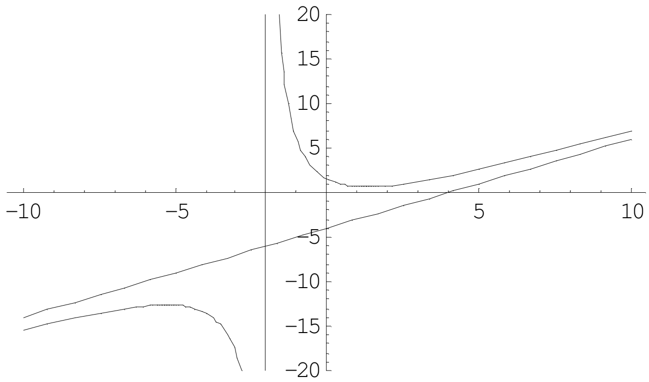
Прямая x = -2 является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая y = x – 4 является наклонной асимптотой.



<u>Схема исследования функций</u>

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.

5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

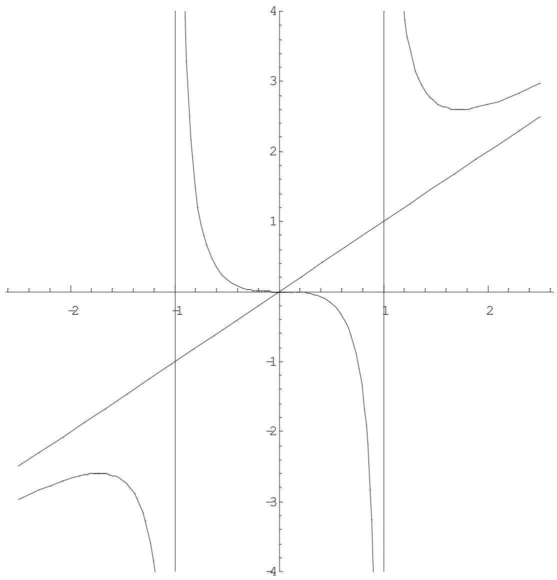
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.

Построим *график* функции:



<u>Параметрическое задание функции.</u>

Исследование и построение графика кривой, которая задана системой уравнений вида:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

производится в общем то аналогично исследованию функции вида y = f(x).

Находим производные:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi'(t) \end{cases}$$

Теперь можно найти производную $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Далее находятся значения параметра t, при которых хотя бы одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ равна нулю или не существует. Такие значения параметра t называются **критическими**.

Для каждого интервала (t_1, t_2), (t_2, t_3), … , (t_{k-1}, t_k) находим соответствующий интервал (x_1, x_2), (x_2, x_3), … , (x_{k-1}, x_k) и определяем знак производной $\dfrac{dy}{dx}$ на каждом из полученных интервалов, тем самым определяя промежутки возрастания и убывания функции.

Далее находим вторую производную функции на каждом из интервалов и, определяя ее знак, находим направление выпуклости кривой в каждой точке.

Для нахождения асимптот находим такие значения t, при приближении к которым или x или y стремится к бесконечности, и такие значения t, при приближении к которым и x и y стремится к бесконечности.

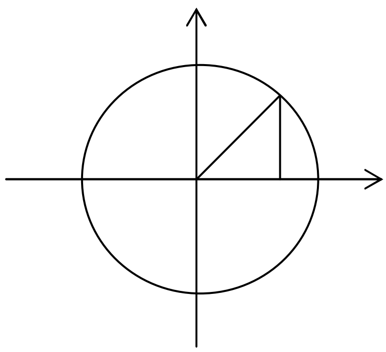
В остальном исследование производится аналогичным также, как и исследование функции, заданной непосредственно.

На практике исследование параметрически заданных функций осуществляется, например, при нахождении траектории движущегося объекта, где роль параметра t выполняет время.

Ниже рассмотрим подробнее некоторые широко известные типы параметрически заданных кривых.

Уравнения некоторых типов кривых в параметрической форме.

Окружность.



Если центр окружности находится в начале координат, то координаты любой ее точки могут быть найдены по формулам:

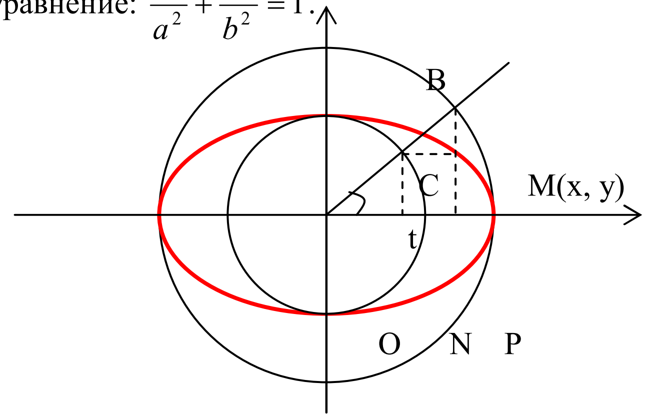
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 360^0$$

Если исключить параметр t, то получим каноническое уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$$

Эллипс.

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Для произвольной точки эллипса M(x, y) из геометрических соображений можно записать: $\frac{x}{\cos t} = a$ из ΔOBP и $\frac{y}{\sin t} = b$ из ΔOCN, где a- большая полуось эллипса, а b- меньшая полуось эллипса, x и y – координаты точки М.

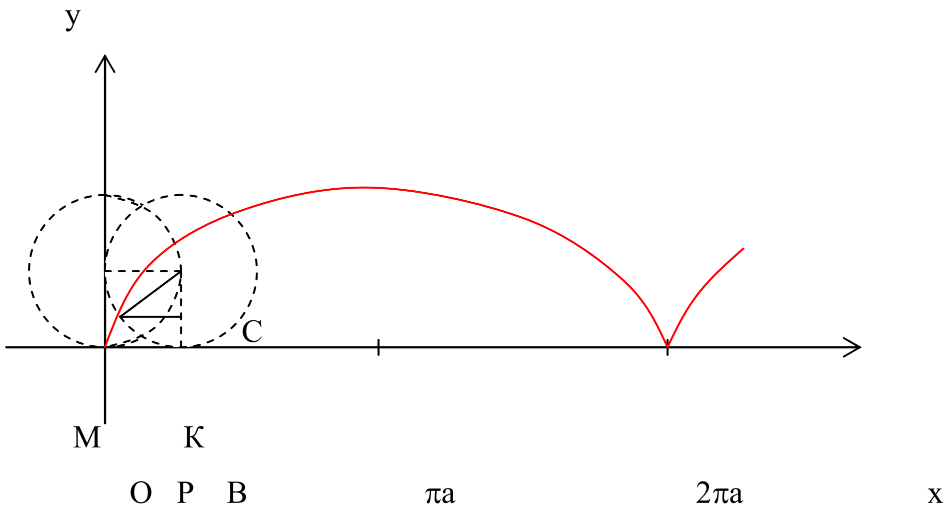
Тогда получаем параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

где $0 \le t \le 2\pi$

Угол t называется **эксцентрическим углом**.

Циклоида.



<u>Определение.</u> **Циклоидой** называется кривая, которую описывает некоторая точка, лежащая на окружности, когда окружность без скольжения катится по прямой.

Пусть окружность радиуса а перемещается без скольжения вдоль оси х. Тогда из геометрических соображений можно записать: OB = $\cup MB$ = at; PB = MK = asint;

$\angle$MCB = t; Тогда y = MP = KB = CB – CK = a – acost = a(1 – cost).

x = at – asint = a(t – sint).

Итого: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ при $0 \le t \le 2\pi$ - это параметрическое уравнение циклоиды.

Если исключить параметр, то получаем:

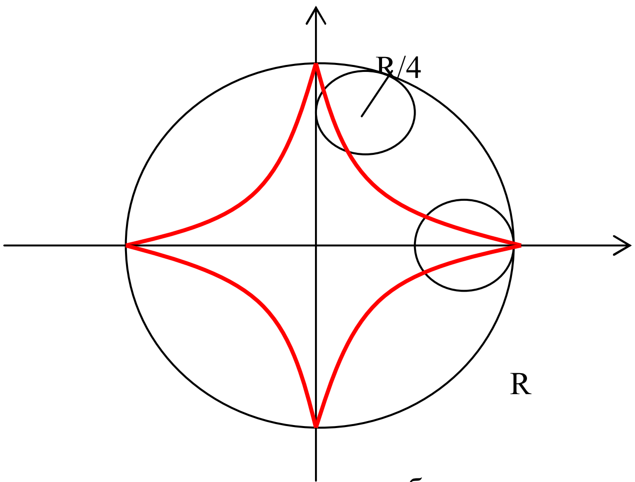
$$x = 2\pi a - \left(a \cdot \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right), \qquad \pi a \le x \le 2\pi a$$

$$x = a \cdot \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, \qquad 0 \le x \le \pi a$$

Как видно, параметрическое уравнение циклоиды намного удобнее в использовании, чем уравнение, непосредственно выражающее одну координату через другую.

<u>Астроида.</u>

Данная кривая представляет собой траекторию точки окружности радиуса R/4, вращающейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R.



Параметрические уравнения, задающие изображенную выше кривую,

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

Преобразуя, получим: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{2/3}$

Производная функции, заданной параметрически.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le T$

Предположим, что эти функции имеют производные и функция x = φ(t) имеет обратную функцию t = Φ(x).

Тогда функция y = ψ(t) может быть рассмотрена как сложная функция y = ψ[Φ(x)].

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt}\frac{d\Phi(x)}{dx}$$

т.к. Φ(x) – обратная функция, то $\dfrac{d\Phi(x)}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}}$

Окончательно получаем: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{d\psi(t)}{dt}}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

Таким образом, можно находить производную функции, не находя непосредственной зависимости у от х.

Пример. Найти производную функции $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Способ 1: Выразим одну переменную через другую $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{b(-2x)}{2a\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Способ 2: Применим параметрическое задание данной кривой: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-atgt}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t; \qquad \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + tg^2 t \quad \Rightarrow \quad tg^2 t = -1 + \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2} \quad tgt = \pm\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Пример: Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции являются все действительные числа (-∞; ∞).

2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.

3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Оу: х = 0; у = 1;

с осью Ох: у = 0; х = 1;

4. Точки разрыва и асимптоты: Вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты: общее уравнение у = kх + b;

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x) = \lim_{x\leftarrow\infty}\frac{(1-x^3+x^3)}{\left[\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+x^2\right]} = 0;$$

Итого: у = -х – наклонная асимптота.

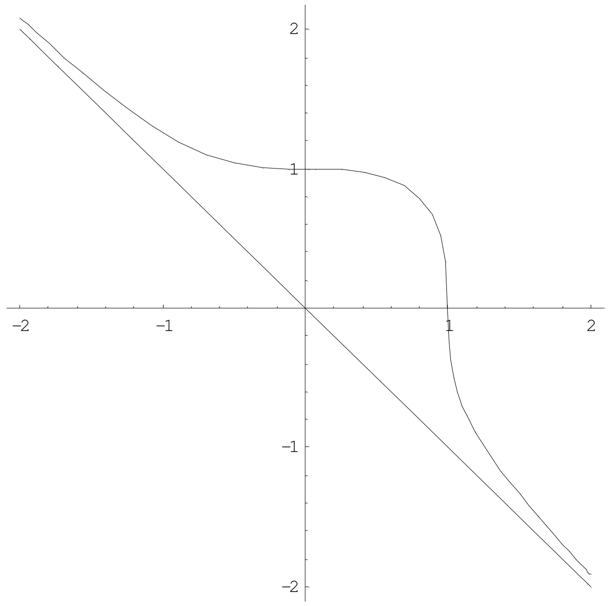
5. Возрастание и убывание функции, точки экстремума.

$y' = \frac{1}{3}(1-x^3)^{2/3}\cdot\left(-3x^2\right)$. Видно, что у′< 0 при любом х ≠ 0, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов. В точке х = 0 первая производная функции равна нулю, однако в этой точке убывание не сменяется на возрастание, следовательно, в точке х = 0 функция скорее всего имеет перегиб. Для нахождения точек перегиба, находим вторую производную функции.

$y'' = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$ у′′ = 0 при х =0 и у′′ = ∞ при х = 1.

Точки (0,1) и (1,0) являются точками перегиба, т.к. у′′(1-h) < 0; у′′(1+h) >0; у′′(-h) > 0; у′′(h) < 0 для любого h > 0.

6. Построим график функции.



<u>Пример:</u> Исследовать функцию $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения функции являются все значения х, кроме х = 0.

2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.

3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Ох: у = 0; х = $-\sqrt[3]{4}$

с осью Оу: х = 0; у – не существует.

4. Точка х = 0 является точкой разрыва $\lim_{x\to 0} y = \infty$, следовательно, прямая х = 0 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты ищем в виде: y = kx + b.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3} = 0.$$

Наклонная асимптота у = х.

5. Находим точки экстремума функции.

$y' = 1-\frac{8}{x^3}$; y′ = 0 при х = 2, y′ = ∞ при х = 0.

y′ > 0 при х ∈ (-∞, 0) – функция возрастает,

y′ < 0 при х ∈ (0, 2) – функция убывает,

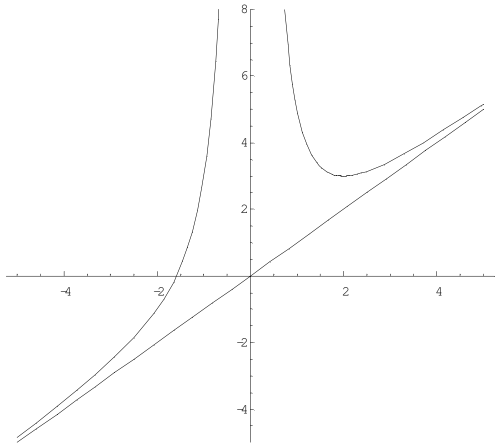
y′ > 0 при х ∈ (2, ∞) – функция возрастает.

Таким образом, точка (2, 3) является точкой минимума.

Для определения характера выпуклости/вогнутости функции находим вторую производную.

$y'' = \dfrac{24}{x^4}$ > 0 при любом x ≠ 0, следовательно, функция вогнутая на всей области определения.

6. Построим график функции.



<u>Пример:</u> Исследовать функцию $y = x(x-1)^3$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции является промежуток x ∈ (-∞, ∞).
2. В смысле четности и нечетности функция является функцией общего вида.
3. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy: x = 0, y = 0;
   с осью Ox: y = 0, x = 0, x = 1.
4. Асимптоты кривой.

Вертикальных асимптот нет.

Попробуем найти наклонные асимптоты в виде y = kx + b.

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x-1)^3}{x} = \infty$ - наклонных асимптот не существует.

5. Находим точки экстремума.

$y' = \left[x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right]' = \left[x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x\right]' = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$

Для нахождения критических точек следует решить уравнение $4x^3 – 9x^2 + 6x – 1 = 0$.

Для этого разложим данный многочлен третьей степени на множители.

Подбором можно определить, что одним из корней этого уравнения является число x = 1. Тогда:

$$\begin{array}{rl} 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 & \big|\ x - 1 \\ -\ 4x^3 - 4x^2 \qquad\quad & \big|\ 4x^2 - 5x + 1 \\ -5x^2 + 6x \quad & \\ -\ -5x^2 + 5x \quad & \\ x - 1 & \end{array}$$

–
x - 1
0

Тогда можно записать (x – 1)($4x^2$ – 5x + 1) = 0. Окончательно получаем две критические точки: x = 1 и x = ¼.

Примечание. Операции деления многочленов можно было избежать, если при нахождении производной воспользоваться формулой производной произведения:

$$y' = \left[x(x-1)^3\right]' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)$$

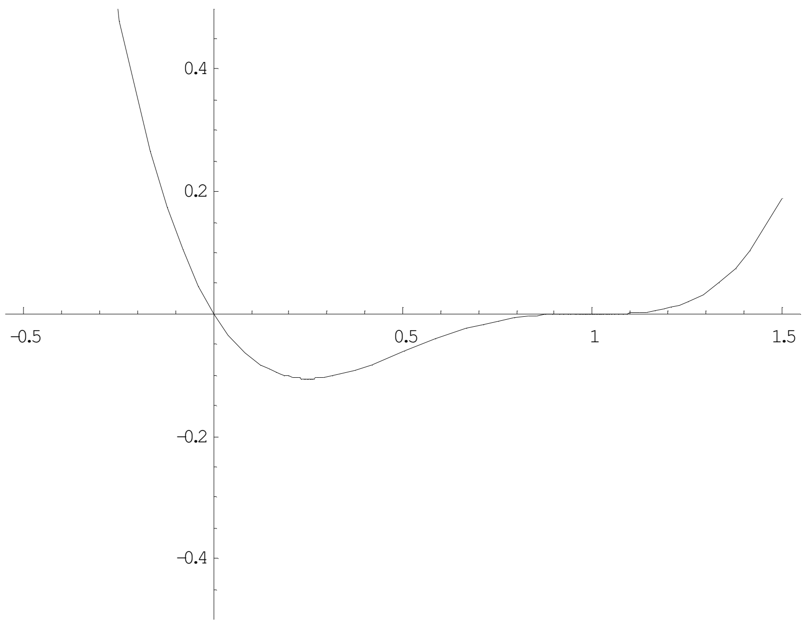
Найдем вторую производную функции: $12x^2$ – 18x + 6. Приравнивая к нулю, находим:

x = 1, x = ½.

Систематизируем полученную информацию в таблице:

	(-∞ ; ¼)	1/4	(¼ ; ½)	1/2	(½ ; 1)	1	(1 ; ∞)
f″(x)	+	+	+	0	-	0	+
f′(x)	-	0	+	+	+	0	+
f(x)	убывает вып.вниз	min	возрастает вып.вниз	перегиб	возрастает вып.вверх	перегиб	возрастает вып. вниз

6. Построим график функции.



Интегральное исчисление

Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

6. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

	Интеграл	Значение		Интеграл	Значение
	$\int tgx dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$		$\int e^x dx$	$e^x + C$
	$\int ctgx dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	0	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	1	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	2	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$
	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	3	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	4	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	5	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	6	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$

Методы интегрирования

Рассмотрим три основных метода интегрирования

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x,\ dt = \cos x dt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Интегрирование по частям

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu\,;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

<u>Пример.</u> $\int x^2 \sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

<u>Пример.</u> $\int e^{2x} \cos xdx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$= \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x} \sin x +$

$+ 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos xe^{2x}dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x} \cos xdx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

<u>Пример.</u>

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

<u>Пример.</u>

$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| +$

$+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x\cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int x^2 e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{x + 1 = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int x\ln x dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{16} arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$$

Интегрирование элементарных дробей

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t = ax + b.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot$$

$$\cdot\, arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{\begin{matrix} u=6x-5; \quad du=6dx; \\ x=\dfrac{u+5}{6}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{\begin{matrix} u=x+3; \quad du=dx; \\ x=u-3; \end{matrix}\right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{\begin{matrix} u=x-3; \quad du=dx; \\ x=u+3; \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{matrix} dv_1 = \dfrac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ v_1 = \displaystyle\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{matrix}\right\}$

$$\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx = \left\{\begin{matrix} u=2ax+b; & du=2adx; \\ x=\dfrac{u-b}{2a}; & s=4ac-b^2; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью *n*, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

<u>Пример:</u>

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \left\{\begin{matrix} u=x-2; & du=dx; \\ x=u+2; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{\begin{matrix} t=u^2+3; \\ dt=2udu; \end{matrix}\right\} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

<u>Интегрирование рациональных дробей.</u>

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

<u>Теорема:</u> Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} +$$
$$+ \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1 x + S_1}{x^2 + rx + s} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Пример.

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{A}{x+3} dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{Dx + E}{x^2 + 2} dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+3) + (Dx+E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$
$$= (D+A)x^4 + (3D+E)x^3 + (A+B+2D+3E+4A)x^2 + (3B+C+6D+2E)x + (2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases} D + A = 3 \\ 3D + E = 0 \\ B + 2D + 3E + 4A = 14 \\ 3B + C + 6D + 2E = 7 \\ 3C + 6E + 4A = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 6 - 2A - 27 + 9A + 4A = 14 \\ 3B + C + 18 - 6A - 18 + 6A = 7 \\ 3C - 54 + 18A + 4A = 15 \end{cases}$$

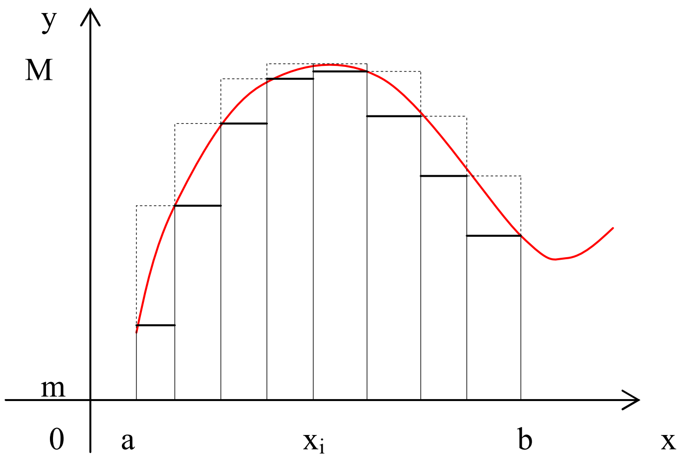
$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 11A = 35 \\ 3B + C = 7 \\ 3C + 22A = 69 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ 11A = 35 - B \\ C = 7 - 3B \\ 21 - 9B + 70 - 2B = 69 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$3\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2} dx = 3\int \frac{dx}{x+3} + 2\int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = 3\ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} +$$
$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Определенный интеграл

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots\ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0,$ то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>Определение:</u> Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Теорема:</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

<u>Свойства определенного интеграла</u>

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$
2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **<u>Теорема о среднем.</u>** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

<u>Доказательство:</u> В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а   a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

<u>Обобщенная теорема о среднем.</u> Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

<u>Вычисление определенного интеграла</u>

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого х, т.е. при х = а:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при х = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную х, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) – F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных

Пусть задан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{Bmatrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{Bmatrix} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример. $\int\limits_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int\limits_0^\pi dx = \int\limits_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int\limits_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int\limits_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям

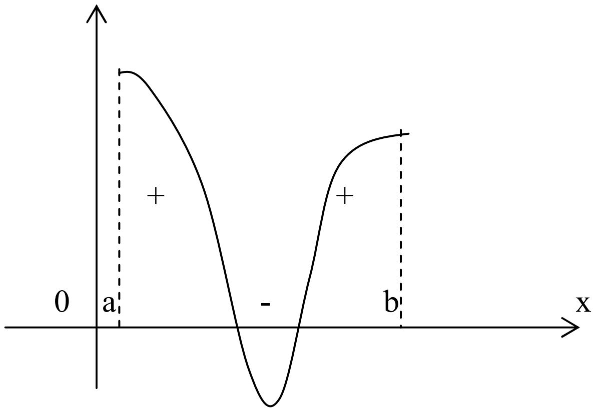
Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.



Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ох, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ох, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Функции нескольких переменных

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение: Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x, y)$$

Определение: Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

Определение: **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Определение: **Окрестностью точки** $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

Определение: Число А называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие

$$MM_0 < r$$

также верно и условие $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

Определение: Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \qquad (1)$$

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция z = f(x, y) не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство

$$f(x_0, y_0, \ldots) \ge f(x, y, \ldots)$$

а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01}, y_{01}, \ldots) \le f(x, y, \ldots)$$

тогда $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – **наименьшее значение** функции f(x, y, …) в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка

$N_0(x_0, y_0, \ldots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \ldots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство. Функция f(x, y, …), непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число К, что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, ...)| < K$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число Δ > 0, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке. См. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z$ = f(x + Δx, y) – f(x, y) называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Полное приращение и полный дифференциал.

Определение. Для функции f(x, y) выражение Δz = f(x + Δx, y + Δy) – f(x, y) называется **полным приращением**.

Если функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] +$$
$$+ [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

Применим теорему Лагранжа (см. Теорема Лагранжа.) к выражениям, стоящим в квадратных скобках.

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\overline{y} \in (y, y+\Delta y)$; $\overline{x} \in (x, x+\Delta x)$

Тогда получаем

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}$$

Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

<u>Определение.</u> Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется **полным приращением** функции f(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

<u>Определение:</u> Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, ..., t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

<u>Пример</u>. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

<u>Пример.</u> Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.

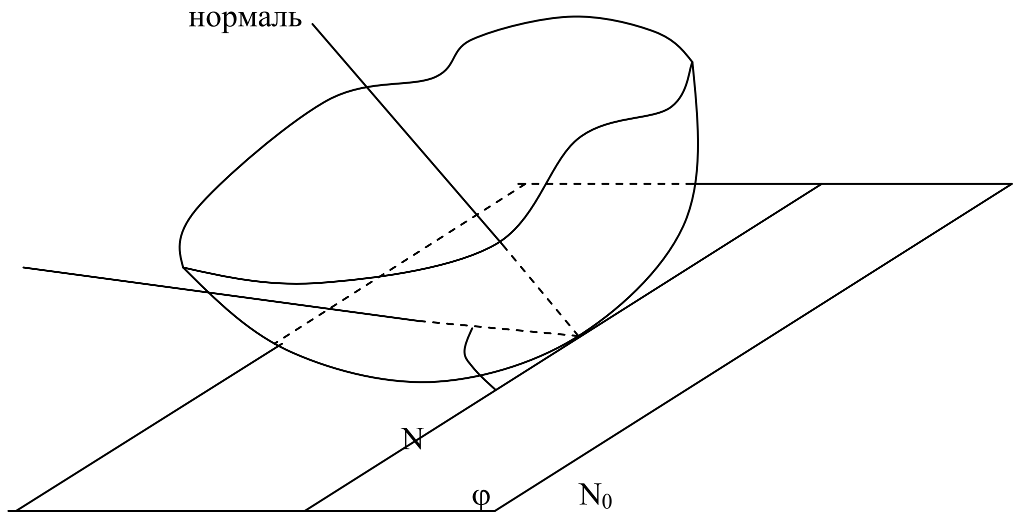
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy$$

Геометрический смысл полного дифференциала

Касательная плоскость и нормаль к поверхности



касательная плоскость

Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Определение. **Нормалью** к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_0,(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

<u>Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.</u>

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

<u>Пример.</u> Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Из заданного выражения определим Δx = 1,04 – 1 = 0,04, Δy = 1,99 – 2 = -0,01,

Δz = 1,02 – 1 = 0,02.

Найдем значение функции u(x, y, z) = $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1{,}2{,}1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

<u>Частные производные высших порядков.</u>

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.**

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

<u>**Определение.**</u> Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

<u>**Теорема.**</u> Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)$$

$$d^2 z = d\left[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy\right] = f''_{x^2}(x, y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{y^2}(x, y)(dy)^2$$

$$d^3 z = f'''_{x^3}(x, y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2 y}(x, y)(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2}(x, y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x, y)(dy)^3$$

…………………

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.

Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y) \right]^2$$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение

φ(x, y) = 0, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда u = f(x, y(x)).

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение u = f(x, y) + λφ(x, y) называется **функцией Лагранжа.**

Пример. Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$u = xy + \lambda(2x+3y-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x+3\lambda;$$

$$\begin{cases}y+2\lambda=0\\ x+3\lambda=0\\ 2x+3y-5=0\end{cases}$$

$$\lambda=-\frac{5}{12}; \qquad x=\frac{5}{4}; \qquad y=\frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

Производная по направлению.

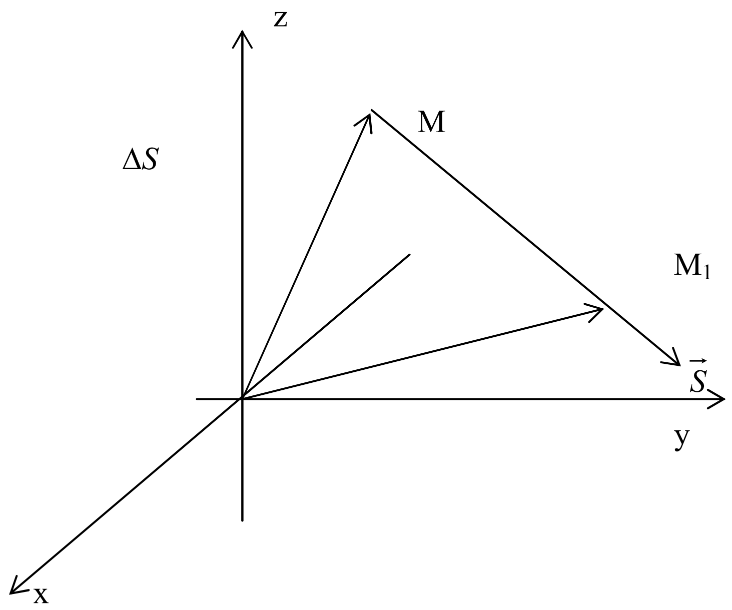
Рассмотрим функцию u(x, y, z) в точке M(x, y, z) и точке M_1(x + Δx, y + Δy, z + Δz).

Проведем через точки М и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками М и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS.

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Высказанные выше предположения, проиллюстрируем на рисунке:



Далее предположим, что функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – бесконечно малые при $\Delta S \to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_2\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

<u>Определение:</u> Предел $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции u(x, y, z) по направлению вектора** $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

<u>Пример.</u> Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B (3, 0).

<u>Решение.</u> Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3-1;\ 0-2) = (2;\ -2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке А : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4;$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

<u>Градиент</u>

<u>Определение:</u> Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u.

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

<u>Связь градиента с производной по направлению</u>

<u>Теорема:</u> *Пусть задана функция u = u(x, y, z) и поле градиентов*

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ *по направлению некоторого вектора* $\vec{S}$ *равняется проекции вектора gradu на вектор* $\vec{S}$.

<u>Доказательство:</u> Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ и некоторую функцию u = u(x, y, z) и найдем скалярное произведение векторов $\vec{S}$ и *gradu*.

$$gradu \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s.

Т.е. $gradu \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами *gradu* и $\vec{S}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\vec{S}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|gradu| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора *gradu* на вектор $\vec{S}$.

Теорема доказана.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Дифференциальное уравнение первого порядка, его общее решение и начальные условия

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

или (если его можно разрешить относительно y') вид:

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

Решение уравнения (1) или (2), содержащее произвольную постоянную C, то есть имеющее вид $y = \varphi(x,C)$, называется ***общим решением*** этого уравнения. Если это решение получается в неявной форме $\Phi(x,y,C) = 0$, то соотношение называется ***общим интегралом*** уравнения (1) или (2).

Если придать произвольной постоянной C некоторое фиксированное значение, то из общего решения (общего интеграла) получим частное решение (частный интеграл) этого уравнения.

Для уравнения (2) справедлива ***теорема о существовании и единственности решения.***

Теорема. *Если в уравнении (2) функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f_y'(x,y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию: при, $x = x_0$, $y = y_0$.*

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется ***начальным условием***. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения уравнения частное решение. Для этого из уравнения $y_0 = \varphi(x_0, C)$ определяется конкретное значение $C = C_0$ и тогда искомое частное решение имеет вид: $y = \varphi(x, C_0) = \psi(x)$.

Уравнения с разделяющими переменными

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется равнением с ***разделяющими переменными***, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ разлагаются на множители, каждый из которых зависит от одной переменной:

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

В таком уравнении путем деления его членов на $f_2(y)\cdot\varphi_1(x)$ переменные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0 \qquad (f_2(y) \neq 0; \quad \varphi_1(x) \neq 0)$$

Общий интеграл находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C$$

Линейные уравнения первого порядка

Уравнения вида $y' + p(x)y = f(x)$, где $p(x)$ и $f(x)$ - заданные непрерывные функции, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка.***

Посредством замены искомой функциии y произведением двух вспомогательных функций $y=uv$ линейное равнение сводится к двум уравнениям с разделяющими переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Пример. Найти общее решение уравнения y'- ytgx=2xsecx.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как оно содержит искомую функцию y и ее производную y' в первой степени и не содержит их произведений.

Применяем подстановку $y = uv$, где u и v - некоторые неизвестные функции аргумента x.

Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид

$$u'v + uv' - uv\,tgx = 2x\,secx,$$

или

$$v(u' - u\,tgx) + uv' = 2x\,secx. \qquad (1)$$

Так как искомая функция y представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках левой части равенства (1), обращалось в нуль, т. е. выберем функцию u так, чтобы имело место равенство

$$u' - utgx = 0 \qquad (2)$$

При таком выборе функции u уравнение (1) примет вид

$$uv' = 2x\,secx \qquad (3)$$

Уравнение (2) есть уравнение с разделяющимися переменными относительно u и x. Решим это уравнение

$$\frac{du}{dx} - utgx = 0; \qquad \frac{du}{dx} = utgx; \qquad \frac{du}{u} = tgxdx;$$

$$\int \frac{du}{u} = \int tgxdx; \qquad \ln u = -\ln\cos x; \qquad u = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Чтобы равенство (2) имело место, достаточно найти одно какое-либо частное решение, удовлетворяющее этому уравнению. Поэтому для простоты при интегрировании этого уравнения находим то частное решение, которое соответствует значению произвольной постоянно $C=0$. Подставив в (3) найденное выражение для u, получим:

$$secxv' = 2x\,secx; \quad v' = 2x; \quad \frac{dv}{dx} = 2x; \quad dv = 2xdx.$$

Интегрируя, получаем $v = x^2 + C$. Тогда $y = secx(x^2 + C)$ общее решение данного уравнения.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным, так как коэффициенты при dx и dy суть однородные функции одного и того же измерения (второго) относительно переменных x и y. Применяем подстановку y = xt, где t- некоторая функция аргумента x.

Если y = xt, то дифференциал dy = d(xt) = tdx + xdt, и данное уравнение примет вид

$$2xxtdt + (x^2t^2 - x^2)(tdx + xdt) = 0.$$

Сократив на x^2, будем иметь: $2tdx + (t^2 - 1)(tdx + xdt) = 0$

$$2tdx + (t^2 - 1)tdx + x(t^2 - 1)dt = 0$$

$$t(2 + t^2 - 1)dx + x(t^2 - 1)dt = 0$$

$$t(1 + t^2)dx = x(1 - t^2)dt$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - t^2}{t(1 + t^2)}dt$$

Мы получили уравнение с разделенными переменными относительно x и t. Интегрируя, находим общее решение этого уравнения:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1 + t^2 - 2t^2}{t(1 + t^2)}dt; \qquad \ln x = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{2t}{1 + t^2}dt;$$

$$\ln x = \ln t - \ln(1+t^2) + \ln C\,; \qquad \ln x = \ln \frac{Ct}{1+t^2}$$

Потенцируя, находим $x = \dfrac{Ct}{1+t^2}$ или $x(1+t^2) = Ct$.

Из введенной подстановки следует, что $t = \dfrac{y}{x}$

Следовательно, $x \cdot \left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) = C\dfrac{y}{x}$ или $x^2 + y^2 = Cy$ - общее решение данного уравнения.

Дифференциальное уравнение второго порядка, его общее решение и начальные условия

Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно y'', имеет вид $y'' = f(x, y, y')$ (1)

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$*, удовлетворяющая уравнению (1) при любых значениях произвольных* C_1 *и* C_2*, называется его* ***общим решением****.*

Решение уравнения (1), получающееся из общего решения при, конкретных значениях произвольных постоянных C_1 и C_2, называется *частным решением уравнения* (1).

Так как в функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ входят две произвольные постоянные C_1 и C_2, то для выделения из общего решения уравнения (1) некоторого частного решения необходимо иметь два начальных условия:

если $x = x_0$, то $y = y_0$, $y' = y_0'$, то есть $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение $y'' + py' + qy = 0$ (1), где p и q - постоянные действительные числа, называется ***линейным однородным*** дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами; p и q его коэффициенты.

Общее решение уравнения (1) находится с помощью ***характеристического уравнения*** $k^2 + pk + q = 0$ (2), которое получается из уравнения (1), если сохраняя в нем коэффициенты p и q, заменить функцию y единицей, а все ее производные соответствующими степенями k.

При этом:

1) если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (2) ***действительные и различные,*** то общее решение уравнения (1) выражается формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}\,; \qquad (3)$$

2) если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (2) ***действительные и равные*** **(** $k_1 = k_2$**)**, то общее решение уравнения (1) выражается формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)\,; \qquad (4)$$

3) если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (2) ***комплексные*** **(** $k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i$ **)**, то общее решение уравнения (1) есть

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)\,. \qquad (5)$$

Теория вероятностей и математическая статистика

Основные понятия теории вероятностей
Событие. Вероятность события

Каждая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. Таковы, например, в геометрии понятия точки, прямой, линии; в механике – понятия силы, массы, скорости, ускорения и т.д. Естественно, что не все основные понятия могут быть строго определены, так как определить понятие – это значит свести его к другим, более известным. Очевидно, процесс определения одних понятий через другие должен где-то заканчиваться, дойдя до самых первичных понятий, к которым сводятся все остальные и которые сами строго не определяются, а только поясняются.

Такие основные понятия существуют и в теории вероятностей. В качестве первого из них введем понятие события.

Под **«событием»** в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Приведем несколько примеров событий:
A – появление герба при бросании монеты;
B – появление трех гербов при трехкратном бросании монеты;
C – попадание в цель при выстреле;
D – появление туза при вынимании карты из колоды;
E – обнаружение объекта при одном цикле обзора радиолокационной станции;
F – обрыв нити в течение часа работы ткацкого станка.

Рассматривая вышеперечисленные события, мы видим, что каждое из них обладает какой-то степенью возможности: одни – большей, другие – меньшей, причем для некоторых из этих событий мы сразу же можем решить, какое из них более, а какое менее возможно. Например, сразу видно, что событие A более возможно, чем B и D. Относительно событий C, E и F аналогичных выводов сразу сделать нельзя; для этого следовало бы уточнить условия опыта. Так или иначе, ясно, что каждое из таких событий обладает той или иной степенью возможности. Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число мы назовем вероятностью события.

Таким образом, мы ввели в рассмотрение второе основное понятие теории вероятностей – **понятие вероятности события**. Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Заметим, что уже при самом введении понятия вероятности события мы связываем с этим понятием определенный практический смысл, а именно: на основании опыта мы считаем более вероятными те события, которые происходят чаще; мало вероятными - те, которые почти никогда не происходят. Таким образом, **понятие вероятности события в самой своей основе связано с опытным, практическим понятием частоты события.**

Сравнивая между собой различные события по степени их возможности, мы должны установить какую-то единицу измерения. В качестве такой единицы измерения естественно принять вероятность достоверного события, т.е. такого события, которое в результате опыта непременно должно произойти. Пример достоверного события – выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости.

Если приписать достоверному событию вероятность, равную единице, то ***все другие события – возможные, но не достоверные – будут характеризоваться вероятностями, меньшими единицы***, составляющими какую-то долю единицы.

Противоположностью по отношению к достоверному событию является невозможное событие, т.е. такое событие, которое в данном опыте не может произойти. Пример невозможного события – появление 12 очков при бросании одной игральной кости. Естественно приписать **невозможному событию вероятность, равную нулю.**

Таким образом, установлены единица измерения вероятностей – вероятность достоверного события – и диапазон изменения вероятностей любых событий – числа от 0 до 1.

Элементы комбинаторики

Если из некоторого количества элементов, различных между собой, составлять различные комбинации, то среди них можно выделить три типа комбинаций, носящих общее название – **соединения: размещения, сочетания, перестановки**

Опр. Если составлять из n различных элементов группы по m элементов в каждой, располагая взятые элементы в различном порядке. Получившиеся при этом комбинации называются **размещениями** из n элементов по m.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Опр. Если из n элементов составлять группы по m элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются **сочетаниями** из n элементов по m

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Опр. Если в некотором множестве $a_1, a_2, ..., a_m$ переставлять местами элементы, оставляя неизменным их количество, то каждая полученная таким образом комбинация называется **перестановкой**.

$$P_m = m!$$

Вообще говоря, перестановки являются частным случаем размещений.

Перестановки с повторяющимися элементами.

Если среди n элементов имеется n_1 одинаковых элементов одного типа, n_2 одинаковых элементов другого типа и т.д., то при перестановке этих элементов всевозможными способами получаем комбинации, количество которых определяется по формуле:

$$\frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} ... P_{n_k}} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Пример. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит в 30 букв.

Очевидно, что количество всех возможных комбинаций из 10 цифр по 4 равно 10.000.

Число всех возможных комбинаций из 30 букв по две равно $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.

Если учесть возможность того, что буквы могут повторяться, то число повторяющихся комбинаций равно 30 (одна возможность повтора для каждой буквы). Итого, полное количество комбинаций по две буквы равно 900.

Если к номеру добавляется еще одна буква из алфавита в 30 букв, то количество комбинаций увеличивается в 30 раз, т.е. достигает 27.000 комбинаций.

Окончательно, т.к. каждой буквенной комбинации можно поставить в соответствие числовую комбинацию, то полное количество автомобильных номеров равно 270.000.000.

Опр. *Вероятностью события А называется отношение числа исходов, благоприятствующих появлению события А, к общему числу равновозможных исходов испытания* $P(A)=\frac{m}{n}$, *где m - число исходов, благоприятствующих появлению события А, n - общее число исходов.*

Если в результате испытания событие обязательно происходит, то его называют ***достоверным.***

Вероятность достоверного события равна 1.

Если в результате испытания событие никогда не происходит, то его называют ***невозможным***.

Вероятность невозможного события равна О.

Вероятность любого события заключена между 0 и 1

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления, одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появлении

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из событий* $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots \bar{A}n \ldots$, *независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий* $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots \bar{A}n$

$$P(A) = 1- q_1,q_2,\ldots.q_n.$$

Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1 B_2, ..., B_n образующих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами.* Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А, т.е. позволяет найти условные вероятности

$$P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), \ldots P_A(B_n)$$

Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B1}(A)+ \ldots +P(B_n)\cdot P_{B_n}(A) \quad (1)$$

Условная вероятность любой гипотезы $B_i (i=\overline{1,n})$ может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{Bi}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots..+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)} \quad (2)$$

Полученные формулы называют *формулами Бейеса*

ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ
1. Формула Бернулли

Если производится n независимых испытаний, при каждом из которых вероятность осуществления событий A постоянна и равна p, а вероятность противоположного события $\overline{A}$ *равна q= 1 - p, то вероятность* $P_n(m)$ *того, что при этом событие A осуществляется ровно m раз вычисляется по формуле*

$$P_n(m) = C_n^m (p)^m (q)^{n-m} \qquad (1)$$

где C_n^m *есть число сочетаний из n элементов по m.*

Формула Бернулли применяется также для нахождения вероятности того, что событие *A* наступит в пределах:

а) менее *m* раз $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1)$

б) не менее *m* раз $P_n(m) + P_n(m+1) + P_n(m+2) + ... + P_n(n)$

в) более *m* раз $P_n(m+1) + P_n(m+2) + ... + P_n(n)$

г) не более *m* раз $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m)$

Пример. Всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) четыре б) не менее четырех.

Решение.

а) По условию задачи вероятность всхожести семян *p=0,9*; тогда *q=0,1*; в данном случае *n=5 и m=4.* Подставляя эти данные в формулу Бернулли , получим

$$P_5(4) = C_5^4 (0{,}9)^4 (0{,}1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 0{,}656 \cdot 0{,}1 = 0{,}328 .$$

б) Искомое событие А состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять.

Таким образом, $P(A) = P_5(4) + P_5(5)$.

Первое слагаемое уже найдено. Для вычисления второго снова применяем формулу (1):

$$P_5(5) = C_5^5 (0{,}9)^5 (0{,}1)^0 = 1 \cdot 0{,}591 \cdot 1 = 0{,}591.$$

Следовательно, P(A)=0,328+0,591 =0,919.

2. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если число испытаний *n* велико, то применение формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям. Использование этой формулы становится практически невозможным. В таких случаях применяют приближенную формулу, которая выражает суть ***локальной теоремы Лапласа.***

Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p (p отлично от нуля и единицы), а число n достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ *того, что в этих испытаниях событие A наступит m раз (безразлично, в какой последовательности) вычисляется приближенно по формуле*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad (2)$$

$$где\ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},\quad а\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Имеются готовые таблицы значений функции $\varphi(x)$ (см. табл. 1 Приложения). Для x>5 считают, что $\varphi(x)\approx 0$. Так как функция $\varphi(x)$ четная, то $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Пример. Вероятность появления события A в каждом из 625 испытаний равна 0,64. Найти вероятность того, что событие A в этих испытаниях появится ровно 415 раз.

Решение. По условию задачи n = 625, m = 415, p = 0,64.
Находим q = 1 - 0,64 = 0,36. Определяем значение x при этих данных:

$$x=\frac{415-625\cdot 0{,}64}{\sqrt{625\cdot 0{,}64\cdot 0{,}36}}=1{,}25.$$

По табл. 1 находим, что φ (1 ,25) = 0,1826. Подставив это значение в (2), получим

$$P_{625}(415)\approx\frac{1}{\sqrt{625\cdot 0{,}64\cdot 0{,}36}}0{,}1826\approx 0{,}015.$$

3. Формула Пуассона

Применение асимптотической формулы (2) для случая, когда вероятность p близка к нулю, приводит к значительному отклонению от точного значения $P_n(m)$. При малых значениях p (и при малых значениях q) применяют асимптотическую *формулу Пуассона.*

Если вероятность появления события A в каждом из т независимых испытании мала, а число испытаний п достаточно велико, то вероятность того, что событие наступит т раз, вычисляется приближенно по формуле

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\qquad (3),$$

где $\lambda = np$.

Формулу (3) применяют в тех случаях, когда $\lambda\le 10$. При этом чем больше число n и меньше число p, тем точнее результат по этой формуле.

Пример. Среди семян ржи 0,04 % сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

Решение. По условию задачи n=5000, m=5, p=0,0004. Тогда $\lambda=5000\cdot 0{,}0004=2$. Применяя (3), получим

$$P_{5000}(5)\approx\frac{2^5}{5!}e^{-2}\approx\frac{32}{120}0{,}1353\ \approx 0{,}036.$$

4. Интегральная теорема Лапласа

Формулы Бернулли, Пуассона, асимптотическая формула (2), выражающая суть локальности теоремы Лапласа, позволяют найти вероятность появления события A ровно m раз при n независимых испытаниях. На практике часто требуется определить вероятность того, что событие A наступит не менее m_1 раз и более m_2 раз, т. е. число т определено неравенствами $m_1\le m\le m_2$. В таких случаях применяют ***интегральную теорему Лапласа.***

Если вероятность наступления события А в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p (p отлично от нуля и единицы), а число n достаточно велико, то вероятность того, что событие А в таких испытаниях наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, вычисляется приближенно по формуле

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (4)$$

где $\alpha = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\qquad \beta = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

Имеются таблицы значений функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

(см. табл. 2 Приложения). Φ(x) - называется функцией Лапласа. Эта функция является нечетной, т.е. Φ(-x) = - Φ(x). Поэтому таблица значений дается только для положительных чисел. Функция Φ(x) является монотонно возрастающей. При неограниченном возрастании x функция Φ(x) стремится к 0,5. Если воспользоваться готовыми значениями функции Лапласа, то формулу (4) можно записать так:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \qquad (5)$$

Пример. Вероятность попадания в цель при отдельном, выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что число попаданий при 600 выстрелах будет заключено пределах от 330 до 375.

Решение.

По условию n=600, p=0,6, m_1=330, m_2=375.

Находим: α и β

$$\alpha = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -2,5;$$

$$\beta = \frac{375 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = 1,25.$$

По табл. 2 находим Φ(I,25) = 0,3944;

Φ(-2,5) = - Φ(2,5)= - 0,4938.

Подставив эти значения в (5), получим искомую вероятность:

$$P_{600}(300 \le m \le 375) \approx 0,3944 - (-0,4938) = 0,8882.$$

5. Нормальный закон распределения случайной величины

Если случайная величина X задана дифференциальной функцией *f(x),* то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α;β), вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Если величина X распределена по нормальному закону, то

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \alpha}{\sigma}\right) \qquad (6)$$

где $\alpha = M(X)$ и $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Пример. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание M(X)=5; дисперсия D(X)=0,64. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение в интервале (4, 7).

Решение. По условию задачи $a=5$, $\sigma = \sqrt{0,64} = 0,8$, α=4 и β=7.

Подставив эти данные в (6), получим

$$P(4 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0,8}\right) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) =$$
$$= \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$$

Пример. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина (математическое ожидание) a=40см, среднее квадратическое отклонение σ =0,4. Найти вероятность того, что отклонение длины детали от стандартной составит по абсолютной величине не более 0,6 см.

Решение. Если X - длина детали, то по условию задачи эта величина должна быть в интервале $(a-\delta, a+\delta)$, где a = 40 и δ= 0,6. Подставив в формулу $\alpha = a - \delta$ и $\beta = a + \delta$, получим

$$P(a-\delta \langle X \langle a+\delta) = \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Таким образом,

$$P(|X - a| \langle \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (7)$$

Подставляя в (7) имеющиеся данные, получим

$$P(|X-40| < 0.6) = 2\Phi\left(\frac{0,6}{0,4}\right) = 2\Phi(1,5) = 2 * 0,4332 = 0,8864$$

Основные сведения из математической статистики

Изучение статистических закономерностей начинается с фиксации (протоколирования) результатов обследования. Затем эти данные представляются в удобной для обозрения и изучения форме - в виде рядов, многоугольников, гистограмм распределений. Методика получения рядов распределений и их графического изображения - многоугольников и гистограмм - является важным в данной теме.

Пример. Результаты обследования 20 семей по числу членов оказались такими: 2; 5; 3; 4; 1; 3; 6; 2; 4; 3; 4; 1; 3; 5; 2; 3; 4; 4; 3. Получить по этим данным вариационный ряд и построить полигон распределения относительных частот.

Решение. Проводим ранжирование заданного ряда. Для этого переписываем результаты наблюдений в порядке возрастания вариант:

1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 6.

По ранжированному ряду определяем частоты различных вариантов. Варианта 1 встречается в заданном ряду 2 раза. Следовательно, ее частота равна $m_1 = 2$. Варианта 2 встречается 3 раза, следовательно, $m_2=3$; аналогично получаем: $m_3=7$, $m_4 = 5$, $m_5 = 2$, $m_6=1$.

Определяем относительные частоты наблюдавшихся в выборке вариант. Они равны отношению соответствующей частоты варианты к общему числу наблюдений. Имея в виду, что общее число наблюдений (объем выборки) есть n=20, относительная частота варианты 1 будет

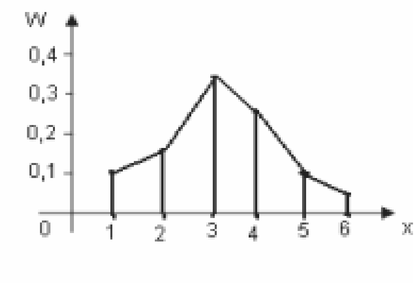


Рис. 25

$$\omega_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}10$$

Аналогично находим:

$$\omega_2 = \frac{m_2}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15 \qquad \omega_3 = \frac{m_3}{n} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

$$\omega_4 = \frac{m_4}{n} = \frac{5}{20} = 0{,}25 \qquad \omega_5 = \frac{m_5}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}10 \qquad \omega_6 = \frac{m_6}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Проверяем правильность расчетов. Для этого суммируем вычисленные относительные частоты:

$$\sum_{i=1}^{6} \omega_i = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}10 + 0{,}05 = 1{,}00$$

Сумма всех относительных частот равна единице, следовательно, вычисления сделаны верно. Результаты вычислений сводим в табл. 1, которая называется вариационным рядом или рядом распределения.

Полученную таблицу представим в виде графика (рис. 24). В прямоугольной системе координат по горизонтальной оси откладываем значения вариант x_i, а по вертикальной оси — относительные частоты ω_i. Концы ординат относительных частот соединяем прямыми личностями. Полученная фигура называется многоугольником или полигоном распределения относительных частот.

Ряд распределения числа членов в семье

Таблица 1

Значение варианты x_i	1	2	3	4	5	6
Частота варианты ω_i.	2	3	7	5	2	1
Относительная частота варианты ω_i.	0.10	0.15	0.35	0.25	0.10	0.05

Олег Анатольевич Дмитриев

МАТЕМАТИКА:

краткий курс лекций

для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения - Димитровград: Технологический институт – филиал УлГАУ, 2019.- 118 с.